Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Vierzigster Theil.

Mit drei lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1863.

Inhaltsverzeichniss des vierzigsten Theils.

Geometrie.

Mechanik.

Nautik.

Physik.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Literarische Berichte *).

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

I.

Ueber eine Anwendung der imaginären Grössen in der Mechanik.

Von

Herrn Dr. *H. Durège*,
Professor am eidgenössischen Polytechnikum in Zürich.

Der geometrischen Interpretation der imaginären Grössen ist bekanntlich eine mechanische Deutung, wenigstens in einem speciellen Falle, vorhergegangen. Fresnel war es, der schon im Jahre 1823 die Gesetze der totalen Reflexion dadurch entdeckte, dass er die bei derselben auftretende complexe Schwingungsamplitude in einer solchen Weise interpretirte, dass dadurch eine Uebereinstimmung mit den Beobachtungen erzielt wurde. Diese mechanische Anwendung der imaginären Grössen steht aber vereinzelt da, und es liegt nahe, sich die Frage zu stellen, ob Fresnel's Erklärungsweise als eine Folge der jetzt allgemein angenommenen geometrischen Deutung zu betrachten ist, oder ob dieselbe als eine davon verschiedene angesehen werden muss. Es soll nun im Folgenden untersucht werden, welche Folgerungen sich aus der Bestimmung der Lage eines Punktes mittelst complexer Grössen für die Bewegung eines Punktes ziehen lassen; dann wird sich aber ergeben, dass einer complexen Schwingungsamplitude eine ganz andere Bedeutung beizulegen ist, als die von Fresnel angenommene, und dass daher die Erklärungsweise des letzteren als eine von jener Deutung verschiedene betrachtet werden muss.

Die Principien der Anwendung der imaginären Grössen auf die

Mechanik sind zwar schon in der Abhandlung von Siebeck „Ueber die graphische Darstellung imaginärer Functionen“ (Crelle's Journ. Bd. 55.) angedeutet worden, es wird aber vielleicht nicht überflüssig sein, sie hier noch einmal in bestimmter Weise hervorzuheben.

Die Bewegung eines Punktes in der Ebene ist vollständig bestimmt, sobald die rechtwinkligen Coordinaten desselben als Functionen der Zeit ausgedrückt sind; bezeichnen aber x und y diese Coordinaten, so wird durch den complexen Ausdruck

$$z = x + iy$$

die Lage des Punktes angegeben, welche zweien zusammengehörigen, zu derselben Zeit stattfindenden Werthen von x und y entspricht. Sind daher die letzteren Functionen der Zeit, so kann für jeden Augenblick der Werth von z, also auch die Lage des Punktes angegeben werden. Wenn daher z als complexe Function der Zeit ausgedrückt ist, so wird dadurch die Bewegung in der Ebene vollständig dargestellt. Die Zeit ist eine veränderliche Grösse, welche ihrer Natur nach nur reelle Werthe annehmen kann, da sich mit einem imaginären Zeitmomente wohl kaum eine klare Vorstellung verbinden lässt. Bezeichnet man nun die Zeit mit t, und mit a, b, c u. s. w. reelle oder complexe Constanten, so lässt sich jeder Ausdruck von der Form

$$z = f(t, a, b, c, \ldots) \tag{1}$$

immer auf die Form

$$z = x + iy$$

bringen, in welcher x und y reelle Functionen von t bedeuten. So lange nun die Constanten a, b, c, u. s. w. reelle Werthe haben, wird immer $y = 0$, und die Gleichung (1) stellt dann eine in der x-Axe vor sich gehende geradlinige Bewegung dar. Gestattet man aber den Constanten, complexe Werthe anzunehmen, so kann durch die Gleichung (1), also durch eine complexe Function einer reellen Veränderlichen, jede beliebige Bewegung in der Ebene dargestellt werden.

Das Differential dz stellt eine unendlich kleine, auch der Richtung nach bestimmte Aenderung des Ortes des beweglichen Punktes dar. Durch den Differentialquotienten $\frac{dz}{dt}$, als dem Grenzwerthe des Verhältnisses zwischen einer Zeitänderung und der ihr entsprechenden Ortsveränderung, wird daher die Geschwin-

digkeit in jedem Augenblicke, und zwar nach Grösse und Richtung zugleich angegeben. Da auch

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}$$

ist, so folgt zugleich, dass die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn die Richtung der Tangente besitzt. Die Geschwindigkeit, welche mit v bezeichnet werden möge, ist im Allgemeinen auch eine Function von t. Bildet man wieder den Differentialquotienten $\frac{dv}{dt}$, so ist dieser der Grenzwerth des Verhältnisses zwischen einer Zeitänderung und der ihr entsprechenden Aenderung der Geschwindigkeit, und giebt folglich die in jedem Augenblicke stattfindende Beschleunigung ebenfalls nach Grösse und Richtung zugleich an. Nimmt man, wie in der Folge immer geschehen soll, die Masse des beweglichen Punktes gleich Eins an, so wird durch $\frac{dv}{dt}$ oder $\frac{d^2z}{dt^2}$ auch die in jedem Augenblicke wirksame Kraft nach Grösse und Richtung dargestellt.

Bei der Anwendung dieser Grundsätze hat man den Vortheil, dass man in allen Fällen, in welchen die Kraft als eine Function von t oder z dargestellt werden kann, es nur mit einer einzigen Differentialgleichung zu thun hat, während sonst eine Bewegung in der Ebene erst durch zwei Differentialgleichungen bestimmt ist.

Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern:

Es wirke gar keine Kraft auf den beweglichen Punkt. Dann ist die Differentialgleichung der Bewegung:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

und man erhält folglich durch Integration:

$$\frac{dz}{dt} = b, \quad z = a + bt;$$

worin a und b zwei im Allgemeinen als complex anzusehende willkürliche Constanten bezeichnen. Ihre Bedeutung ergiebt sich leicht; nämlich a giebt den Ort des Punktes zur Zeit $t = 0$, und b die constante Geschwindigkeit nach Grösse und Richtung an. Die Bewegung ist daher gleichförmig und geradlinig; sind nämlich A und B (Taf. I. Fig. 1.) die durch die complexen Werthe von a und b gegebenen Punkte, und O der Nullpunkt, so bewegt sich der Punkt in einer durch A gehenden, mit OB parallelen

Geraden so, dass in jeder Zeiteinheit eine Strecke gleich OB durchlaufen wird.

Es wirke eine nach Richtung und Grösse constante Kraft. Bezeichnet die complexe Grösse c diese Kraft, so hat man

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c$$

und folglich

$$\frac{dz}{dt} = b + ct, \quad z = a + bt + \tfrac{1}{2}ct^2;$$

wenn a und b wiederum zwei willkürliche complexe Constanten bezeichnen, deren Bedeutung sich leicht dahin ergiebt, dass a den Ort des Ausgangspunktes und b die Anfangsgeschwindigkeit nach Grösse und Richtung bedeutet. Durch die letzte Gleichung wird, wie auf verschiedene Weise gezeigt werden kann, die Wurf-Parabel dargestellt. Man kann auch durch eine Coordinatenverwandlung das Resultat sogleich in seiner einfachsten Gestalt erhalten. Zunächst verlegen wir den Nullpunkt in den Punkt A (Taf. I. Fig. 2.), indem wir z für $z - a$ schreiben; dadurch geht die Gleichung über in

$$z = bt + \tfrac{1}{2}ct^2.$$

Alsdann drehe man die x-Axe so, dass sie mit der Richtung der Kraft c zusammenfällt; setzt man

$$c = ge^{iC},$$

wo g und C reell sind, so geschieht dies durch Multiplication mit e^{-iC}, wodurch man

$$ze^{-iC} = be^{-iC}.t + \tfrac{1}{2}gt^2,$$

oder, wenn man

$$ze^{-iC} = z', \quad be^{-iC} = b'$$

setzt,

$$z' = b't + \tfrac{1}{2}gt^2$$

erhält; und dann haben z' und b' die nämliche Bedeutung in Beziehung auf die neue x-Axe, wie z und b auf die alte. Hierauf kann man den Anfang der Zeit so verlegen, dass die Anfangsgeschwindigkeit senkrecht auf der neuen x-Axe steht, also rein imaginär wird. Setzt man

$$b' = \beta + i\beta',$$

so hat man

$$\frac{dz'}{dt} = \beta + i\beta' + gt,$$

und erreicht daher das Gewünschte, wenn man die von einem anderen Anfang gezählte Zeit t' so einführt, dass

$$t = t' - \frac{\beta}{g}$$

ist; dadurch wird

$$\frac{dz'}{dt'} = i\beta' + gt',$$

und dann

$$z' = -\frac{\beta}{g}(\tfrac{1}{2}\beta + i\beta') + i\beta' t' + \tfrac{1}{2}gt'^2.$$

Setzt man nun endlich noch

$$z' + \frac{\beta}{g}(\tfrac{1}{2}\beta + i\beta') = z'',$$

so kommt

$$z'' = i\beta' t' + \tfrac{1}{2}gt'^2,$$

und der Nullpunkt ist dann so verlegt, dass für $t' = 0$ auch $z'' = 0$ ist. Demnach ist nun

$$x = \tfrac{1}{2}gt'^2, \quad y = \beta' t'$$

und folglich

$$y^2 = 2\frac{\beta'^2}{g}x.$$

Die Bahn des beweglichen Punktes ist also eine Parabel, deren Axe der Kraft parallel läuft, und die ihren Scheitel S (Taf. I. Fig. 2.) im neuen Nullpunkte hat. Die Lage des letzteren in Beziehung auf den Punkt A und die mit der Krafrichtung zusammenfallende x-Axe ist durch die complexe Grösse

$$-\frac{\beta}{g}(\tfrac{1}{2}\beta + i\beta')$$

gegeben; er liegt daher stets auf der Geraden AH, wenn H den Halbirungspunkt der von B auf die y-Axe gefällten Senkrechten bezeichnet, und so, dass immer $\overline{AS} = -\frac{\beta}{g}.\overline{AH}$ ist. Um für verschiedene Zeiten die entsprechenden Punkte der Bahn leicht construiren zu können, schreibe man die ursprüngliche Gleichung:

$$z = t(b' + \tfrac{1}{2}gt);$$

zieht man dann aus B eine Parallele mit der Kraft AC und macht

$$BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = \ldots = \tfrac{1}{2}AC,$$

so sind B, B_1, B_2, u. s. w. die Punkte, durch welche $b' + \frac{1}{2}gt$ für $t = 0, 1, 2$, u. s. w. dargestellt wird. Zieht man ferner die Geraden AB_1, AB_2, AB_3, u. s. w. und macht auf denselben

$$Az_2 = 2.AB_2, \quad Az_3 = 3.AB_3, \quad Az_4 = 4.AB_4, \text{ u. s. w.},$$

so sind A, B_1, z_2, z_3, z_4, u. s. w. die Orte des beweglichen Punktes für $z = 0, 1, 2, 3, 4$, u. s. w.

Es wirke auf einen beweglichen Punkt eine Kraft, welche zwar der Grösse nach constant sei, aber ihre Richtung dergestalt ändere, dass sie sich mit constanter Geschwindigkeit drehe. Um etwas Bestimmtes zu haben, sei angenommen, dass die Kraft im Anfange der Bewegung senkrecht auf der x-Axe stehe und sich mit der constanten Winkelgeschwindigkeit w in negativem Sinne herumdrehe. Alsdann ist, wenn ihre absolute Grösse mit p bezeichnet wird, ihr Ausdruck:

$$ip(\cos wt - i \sin wt);$$

ferner sei angenommen, dass der Punkt seine Bewegung aus dem Nullpunkte und zwar ohne Anfangsgeschwindigkeit beginne. Man hat nun

$$\frac{d^2z}{dt^2} = ip(\cos wt - i \sin wt),$$

und erhält demnach

$$\frac{dz}{dt} = \frac{ip}{w}(\sin wt + i \cos wt) + \frac{p}{w},$$

$$z = \frac{ip}{w^2}(-\cos wt + i \sin wt) + \frac{ip}{w^2};$$

wenn man der obigen Annahme gemäss die willkürlichen Constanten so bestimmt, dass für $t = 0$ sowohl z als auch $\frac{dz}{dt}$ verschwindet. Hiernach wird

$$x = \frac{p}{w^2}(wt - \sin wt), \quad y = \frac{p}{w^2}(1 - \cos wt).$$

Die Bahn des beweglichen Punktes ist also in diesem Falle eine

Cycloide; der Radius r des mit der Winkelgeschwindigkeit w rollenden Kreises $=\frac{p}{w^2}$; die Kraft $p=rw^2$ ist daher nichts anderes, als die durch das Rollen des Kreises im erzeugenden Punkte erregte Centrifugalkraft.

Wir können nun, um zur Deutung einer complexen Schwingungs-Amplitude zu gelangen, in gleicher Weise auch die Schwingungsgleichung behandeln. Wird ein beweglicher Punkt von dem festen Nullpunkte der Entfernung proportional angezogen, und bezeichnet man die im Punkte Eins stattfindende Kraft mit $-k^2$ wo also k reell angenommen wird, so hat man

$$\frac{d^2z}{dt^2}=-k^2z.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist:

$$z=A\cos kt+B\sin kt \tag{2}$$

mit den willkürlichen Constanten A und B. Diese Gleichung stellt im Allgemeinen eine Ellipse dar. Setzt man nämlich, um dies zu sehen:

$$A=\varrho\sin g,\quad B=\varrho\cos g;$$

so erhält man:

$$z=\varrho\sin(g+kt), \tag{3}$$

und kann dann zunächst, indem man die x-Axe in die Richtung von ϱ dreht, die Grösse ϱ reell machen.. Ist ferner:

$$g=\gamma+i\gamma',$$

also

$$z=\varrho\sin\left[k\left(\frac{\gamma}{k}+t\right)+i\gamma'\right],$$

so verlege man den Anfang der Zeit, indem man

$$\frac{\gamma}{k}+t=t'$$

einführt; dann ist

$$\begin{aligned} z&=\varrho\sin(kt'+i\gamma')\\ &=\varrho\cos i\gamma'\sin kt'+i\varrho\frac{\sin i\gamma'}{i}\cos kt'; \end{aligned}$$

und da nun

$$\cos i\gamma' = \frac{e^{\gamma'} + e^{-\gamma'}}{2}; \quad \frac{\sin i\gamma'}{i} = \frac{e^{\gamma'} - e^{-\gamma'}}{2}$$

beide reell sind, so folgt:

$$x = \varrho \cos i\gamma' \sin kt', \quad y = \varrho \frac{\sin i\gamma'}{i} \cos kt'$$

und

$$\frac{x^2}{(\varrho \cos i\gamma')^2} + \frac{y^2}{(\varrho \frac{\sin i\gamma'}{i})^2} = 1;$$

also eine Ellipse mit den Halbaxen $\varrho \cos i\gamma'$ und $\varrho \frac{\sin i\gamma'}{i}$, von denen die erstere mit der Richtung von ϱ zusammenfällt. Der bewegliche Punkt befindet sich in den Scheiteln dieser Halbaxen zu den Zeiten $t' = \frac{\pi}{2k}$ und $= 0$, und da alsdann die Geschwindigkeiten die Werthe $-i\varrho k \frac{\sin i\gamma'}{i}$ und $\varrho k \cos i\gamma'$ annehmen, so sieht man, dass in diesen Punkten die Geschwindigkeit senkrecht auf der Halbaxe steht und der anderen Halbaxe proportional ist.

Die elliptische Bewegung geht in eine kreisförmige über, wenn

$$\cos i\gamma' = \pm \frac{\sin i\gamma'}{i}$$

ist; nun war aber

$$A = \varrho(\sin\gamma \cos i\gamma' + i \cos\gamma \frac{\sin i\gamma'}{i}),$$

$$B = \varrho(\cos\gamma \cos i\gamma' - i \sin\gamma \frac{\sin i\gamma'}{i});$$

man erhält also für den Fall kreisförmiger Schwingungen:

$$A = \varrho(\sin\gamma \pm i\cos\gamma) \cos i\gamma',$$

$$B = \varrho(\cos\gamma \mp i \sin\gamma) \cos i\gamma';$$

das heisst

$$B = \mp iA.$$

Die Gleichung (2) verwandelt sich alsdann in:

$$z = A(\cos kt \mp i \sin kt),$$

und stellt wirklich einen Kreis dar, weil A durch eine blosse Drehung der x-Axe reell gemacht werden kann. Nimmt man ϱ complex $= r + ir'$, g aber als reell an, so hat man nach (3):

$$z = (r + ir')\sin(g + kt),$$

$$x = r\sin(g + kt), \quad y = r'\sin(g + kt);$$

und daher

$$\frac{x}{r} = \frac{y}{r'};$$

die Schwingungen sind also dann geradlinig und gehen in der Richtung von ϱ vor sich.

Hiernach kann man nun übersehen, was eine Schwingungsgleichung bedeutet, wenn in ihr entweder die Phase oder die Amplitude imaginär wird. So lange nämlich die Phase reell ist, hat man stets geradlinige Schwingungen; das Imaginärwerden der Amplitude bedeutet nur, dass die Schwingungsrichtung nicht mehr mit der x-Axe zusammenfällt, während bei elliptischen Schwingungen die Phase imaginär sein muss. Dies stimmt nun mit Fresnel's Interpretation nicht überein, da bei ihm das Imaginärwerden der Amplitude eine Veränderung der Phase bedingt.

Was die Zusammensetzung mehrerer Schwingungen anbelangt, so findet man aus unseren Betrachtungen leicht die bekannten Gesetze wieder. Haben zwei geradlinige Schwingungen dieselbe Phase, so setzen sie sich wieder zu geradlinigen, in der Richtung der Diagonale vor sich gehenden Schwingungen zusammen. Geradlinige Schwingungen von verschiedenen Phasen aber geben elliptische Schwingungen, weil, wenn die Gleichung auf die Form (3) gebracht wird, alsdann die Phase imaginär wird.

Wir schliessen hieran noch die Betrachtung des Falles, dass die Grösse k imaginär ist. Sei

$$k = c + ic' = p(\cos\varphi + i\sin\varphi);$$

dann ist die Kraft nicht mehr nach dem festen Nullpunkte gerichtet, sondern bildet, wie man leicht sieht, mit dem Radius-Vector des beweglichen Punktes den Winkel 2φ. Man hat hier, wie vorhin, die Gleichung

$$z = A\cos kt + B\sin kt,$$

die auf die Form

$$z = \varrho\sin(g + kt)$$

gebracht, und worin ϱ durch Drehung der x-Axe reell gemacht werden kann. Führt man dann

$$g = \gamma + i\gamma' \quad \text{und} \quad k = c + ic'$$

ein, so erhält man

$$z = \varrho \sin\left[c\left(\frac{\gamma}{c}+t\right)+ic'\left(\frac{\gamma'}{c'}+t\right)\right].$$

Hier werde nun wieder der Anfang der Zeit verlegt, indem

$$\frac{\gamma'}{c'}+t=t'$$

gesetzt wird; führt man ausserdem zur Abkürzung

$$\frac{\gamma}{c}-\frac{\gamma'}{c'}=\delta$$

ein, so kommt:

$$z=\varrho\sin[c(\delta+t')+ic't']. \tag{4}$$

Demnach ergiebt sich:

$$x=\varrho\sin c(\delta+t')\cos ic't', \quad y=\varrho\cos c(\delta+t')\frac{\sin ic't'}{i}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Bewegung jetzt nicht mehr in einer geschlossenen Curve vor sich geht, sondern dass die Bahn sich spiralartig um den Nullpunkt herumwindet. Taf. I. Fig. 3. giebt ein Stück dieser Bahn an, welche den Annahmen $p=1$, $\varphi=10^0$, $\varrho=1$, $c\delta=\frac{1}{3}\pi$ entspricht.

Da die Gleichung (4) sich auch in der Form

$$z=\varrho\sin(c\delta+kt')$$

schreiben lässt, und dann, auf die Form $z=A\cos kt'+B\sin kt'$ gebracht, den Grössen A und B reelle Werthe zuertheilt, so geht hervor, dass man in dem Falle eines imaginären k durch eine Drehung der x-Axe und eine Verlegung des Zeit-Anfangs die Grössen A und B immer reell machen kann. Da dann ferner A den Anfangsort und kB die Anfangsgeschwindigkeit bedeutet, so ist damit der Zeitanfang und der ihm entsprechende Anfangsort so gewählt, dass die Anfangsgeschwindigkeit den Winkel zwischen dem Radius-Vector des Anfangsortes und der Kraftrichtung halbirt. In Taf. I. Fig. 3. ist durch AK die Kraft und durch AG die Geschwindigkeit angedeutet, welche in dem Punkte A, welcher der Zeit $t'=0$ entspricht, stattfinden.

Die hier besprochene Art, die Bahn eines beweglichen Punktes durch eine complexe Function der Zeit auszudrücken, lässt auch eine einfache Anwendung auf die relative Bewegung in der Ebene zu. Werden nämlich durch die Gleichungen

$$z_1 = f_1(t), \quad z_2 = f_2(t)$$

die Bewegungen zweier Punkte ausgedrückt, so braucht man zur Bestimmung der relativen Bewegung des einen Punktes gegen den anderen nur in jedem Augenblicke die Lage des einen gegen den anderen, diesen als fest gedacht, zu kennen. Die Lage des Punktes z_2 gegen den Punkt z_1 wird aber durch die Differenz $z_2 - z_1$ ausgedrückt; setzt man daher diese $= z$, so wird durch die Gleichung

$$z = f_2(t) - f_1(t)$$

die scheinbare Bahn ausgedrückt, in welcher die Bahn des Punktes z_2 dem ruhend gedachten Punkte z_1 erscheint. Hat man z. B. zwei in concentrischen Kreisen von den Radien r_1 und r_2 mit verschiedenen aber constanten Winkelgeschwindigkeiten w_1 und w_2 sich bewegende Punkte, und nimmt man etwa an, dass zu Anfang der Bewegung beide sich auf der x-Axe befinden, so werden ihre Bahnen durch die Gleichungen

$$z_1 = r_1(\cos w_1 t + i \sin w_1 t), \quad z_2 = r_2(\cos w_2 t + i \sin w_2 t)$$

gegeben. Die scheinbare Bahn des zweiten Punktes gegen den ersten ist daher:

$$z = (r_2 \cos w_2 t - r_1 \cos w_1 t) + i(r_2 \cos w_2 t - r_1 \sin w_1 t),$$

und aus dieser Gleichung können alle Eigenthümlichkeiten dieser Bewegung mit Leichtigkeit abgeleitet werden.

II.

Zur Polyedrometrie.

(Ein Nachtrag zu einem früheren Aufsatze, Theil XXXVIII. Nr. XXIX.)

Von

Herrn ***Joh. Karl Becker***
in Zürich.

Kurz nach der Veröffentlichung meines Aufsatzes über Polyeder (Theil XXXVIII. Nummer XXIX.) kam mir der eben erschienene zweite Band von Dr. Richard Baltzer's „Elementen der Mathematik" zu Gesichte, ein Buch, das schon seiner gründlichen Quellenangabe wegen Jedem empfohlen zu werden verdient, der tiefer in die mathematischen Wissenschaften eindringen will. Die ausführliche Behandlung der Polyeder in diesem Werke veranlasste mich, dieses Kapitel ebenfalls noch einmal vorzunehmen. So ist der vorliegende Nachtrag entstanden. Auch zu einer Berichtigung sehe ich mich durch das genannte Werk veranlasst. Der Satz, dass Tetraeder, Hexaeder, Octaeder, Dodecaeder und Ikosaeder die einzigen Polyeder mit gleichvieleckigen Flächen und gleichvielseitigen Ecken seien, ist nicht von Steiner, sondern von Gergonne aufgestellt und im Zusammenhang mit einer Reihe anderer Sätze dualistisch entwickelt worden. Die betreffende Abhandlung findet sich im XV. Bande von Gergonne's Annalen und ist auch von Steiner im ersten Bande des Crelle'schen Journals S. 366 neben anderen Arbeiten über die Consequenzen des Euler'schen Satzes erwähnt worden.

1.

Hat ein einfach durchbrochenes Polyeder f Gränzflächen, nämlich f_3 Dreiecke, f_4 Vierecke u. s. w., e Ecken, nämlich e_3 dreiseitige, e_4 vierseitige u. s. w. und k Kanten, so ist:

$$\text{I.}\qquad \begin{cases} e+f=k, \\ 2k=3f_3+4f_4+5f_5+\ldots, \\ 2k=3e_3+4e_4+5e_5+\ldots \end{cases}$$

Hieraus folgt leicht:

$$\text{II.}\qquad \begin{cases} 2f=e_3+2e_4+3e_5+\ldots, \\ 2e=f_3+2f_4+3f_5+\ldots \end{cases}$$

Sind alle Ecken a-seitig, also $e=e_a$, so ist ihre Anzahl $\frac{2}{a-2}\cdot f$; denn die erste der Gleichungen II. heisst dann:

$$2f=(a-2)e.$$

Sind alle Flächen b-eckig, also $f=f_b$, so hat man aus der zweiten der obigen Gleichungen:

$$f=\frac{2}{b-2}\cdot e.$$

Sollen zugleich alle Ecken a-seitig und alle Flächen b-eckig sein, so ergibt sich aus

$$e=\frac{2}{a-2}\cdot f,$$

$$f=\frac{2}{b-2}\cdot e$$

die Gleichung:

$$(a-2)(b-2)=4,$$

oder:

$$ab=2(a+b),$$

woraus sich leicht dieselben Resultate finden lassen, welche ich in meiner vorigen Abhandlung mitgetheilt habe.

Aus den Gleichungen II. entsteht durch Addition:

$$\text{III.}\qquad e_3+f_3=e_5+f_5+2(e_6+f_6)+3(e_7+f_7)+\ldots$$

Hieraus folgt:

Ein einfach durchbrochenes Polyeder ohne dreiseitige Flächen und dreiseitige Ecken hat nur vierseitige Flächen und vierseitige Ecken.

Ist $e = e_a$, sind also alle Ecken a-seitig, so folgt aus II., weil dann $e = \frac{2}{a-2} \cdot f$ ist:

IV. $$4f = (a-2)(f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots).$$

Da mithin $a - 2 \leqq 4$, also $a \leqq 6$ sein muss, so hat man den Satz:

Es ist kein einfach durchbrochenes Polyeder möglich, dessen sämmtliche Ecken gleichvielseitig und mehr als sechsseitg wären.

Hätte ein einfach durchbrochenes Polyeder ausser a-seitigen Ecken auch noch solche mit mehr als a Seiten, so wäre offenbar $e < \frac{2f}{a-2}$, also auch:

$$2e = f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots < \frac{4f}{a-2},$$

oder:

$$4f > (a-2)(f_3 + 2f_4 + 3f_5 + \ldots).$$

Man hat mithin allgemeiner:

Es ist kein einfach durchbrochenes Polyeder möglich mit nur solchen Ecken, die entweder alle mehr als sechs Seiten, oder theils sechs, theils mehr als sechs Seiten haben.

Aus IV. folgt ferner:

Sind alle Ecken sechsseitig, so sind alle Flächen dreiseitig.

Sind alle Ecken fünfseitig, so ist die Anzahl der dreiseitigen Gränzflächen mindestens das Doppelte der übrigen, nämlich:

$$f_3 = 2f_4 + 5f_5 + 8f_6 + \ldots$$

Sind alle Ecken vierseitig, so sind entweder alle Flächen Vierecke, oder die Zahl der Flächen mit mehr als vier Seiten ist höchstens gleich der mit weniger als vier Seiten, nämlich:

$$f_3 = f_5 + 2f_6 + \ldots$$

Sind alle Ecken dreiseitig, so sind entweder alle Flächen

sechsseitig, oder es finden sich sowohl Flächen mit mehr, als solche mit weniger als sechs Seiten, nämlich:

$$3f_3 + 2f_4 + f_5 = f_7 + 2f_8 + \dots$$

Sind alle Flächen b-Ecke, also $f = f_b$, so erhält man aus II. die Gleichung:

$$\text{V.} \qquad 4e = (b-2)(e_3 + 2e_4 + 3e_5 + \dots),$$

und wenn alle Flächen b oder mehr als b Seiten haben, so hat man:

$$4e > (b-2)(e_3 + 2e_4 + 3e_5 + \dots).$$

Daraus folgt aber:

> Es ist kein einfach durchbrochenes Polyeder möglich, dessen sämmtliche Flächen mehr als sechsseitig, oder theils sechsseitig, theils mehr als sechsseitig wären.

Aus V. folgt ferner:

> Sind alle Flächen Sechsecke, so sind alle Ecken dreiseitig.

Sind alle Flächen Fünfecke, so ist die Anzahl der dreiseitigen Ecken mindestens das Doppelte der übrigen, nämlich:

$$e_3 = 2e_4 + 5e_5 + 8e_6 + \dots$$

Sind alle Flächen Vierecke, so sind entweder alle Ecken vierseitig, oder die Zahl der dreiseitigen ist mindestens ebenso gross, als die der mehr als vierseitigen, nämlich:

$$e_3 = e_5 + 2e_6 + \dots$$

Sind alle Flächen Dreiecke, so sind entweder alle Ecken sechsseitig, oder es ist:

$$3e_3 + 2e_4 + e_5 = e_7 + 2e_8 + \dots$$

2.

Hat ein einfach durchbrochenes Polyeder e Ecken, deren jede von α a-Ecken, β b-Ecken, γ c-Ecken, u. s. w. begränzt ist, so dass also alle Ecken nicht bloss gleichvielseitig, sondern auch auf gleiche Weise durch Polygone verschiedener Art zusammengesetzt sind, wie diess bei den Archimedischen Polyedern der Fall ist, so bestehen für dasselbe folgende Gleichungen:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} k = e + f, \\ 2k = (\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots).e, \\ f = \left(\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} + \frac{\gamma}{c} + \ldots\ldots\right).e. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$\text{II.}\quad 2 + \frac{2\alpha}{a} + \frac{2\beta}{b} + \frac{2\gamma}{c} + \ldots\ldots = \alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots,$$

oder:

$$2 = \alpha\frac{a-2}{a} + \beta\frac{b-2}{b} + \gamma\frac{c-2}{c} + \ldots\ldots$$

Dieser Ausdruck lehrt, dass auch für die einfach durchbrochenen Polyeder der schon von Meyer Hirsch bewiesene Satz*) gilt, dass nicht alle Ecken eines Polyeders von mehr als dreierlei Polygonen eingeschlossen werden können.

Um die Anzahl und Beschaffenheit der möglichen Polyeder dieser Art zu bestimmen, bedarf man noch des folgenden schon von Kepler**) bewiesenen und offenbar auch für die durchbrochenen Polyeder gültigen Satzes:

III. „Wenn alle Ecken eines Polyeders auf gleiche Weise von α a-eckigen, β b-eckigen und γ c-eckigen Flächen eingeschlossen sind, und eine der Zahlen a, b, c, z. B. a, ungerade ist, so muss eine der Zahlen $\alpha-1$, β, γ mindestens 2 betragen.“

Wenn man die von einerlei Flächen begränzten Polyeder ausschliesst, so ergeben sich als mögliche Arten der Polyeder von der vorausgesetzten Beschaffenheit:

1) Polyeder mit dreiseitigen Ecken, welche von einem a-Eck und zwei b-Ecken begränzt sind, wo b (nach III.) gerade sein muss.

Für diese Polyeder hat man nach II.:

$$\frac{2}{a} + \frac{4}{b} = 1,$$

und die Auflösungen:

---

*) Meyer Hirsch, Geometr. Aufg. II. S. 171.; vergl. auch Baltzer, Elemente, II. S. 211 und 212.

**) Kepler: Harmonice mundi, II. p. 17.; Meyer Hirsch, Geometr. Aufg., II. S. 171.; Baltzer, Elemente, II. S. 212.

$$a = 3, \quad b = 12,$$

$$a = 4, \quad b = 8.$$

Polyeder dieser Art haben e Ecken, $\frac{3e}{2}$ Kanten, $\frac{e}{a}$ a-eckige, $\frac{2e}{b}$ b-eckige Flächen, wo e unendlich viele verschiedene Werthe haben kann. Die ersteren lassen sich leicht aus den Polyedern mit sechseckigen Flächen und dreiseitigen Ecken, die anderen aus den Polyedern mit vierseitigen Ecken und vierseitigen Flächen ableiten.

2) Polyeder mit dreiseitigen Ecken, welche von einem a-Eck, einem b-Eck und einem c-Eck zusammengesetzt sind, wo a, b, c gerade Zahlen sein müssen.

Man hat (II):

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2},$$

und die einzige Auflösung:

$$a = 4, \quad b = 6, \quad c = 12.$$

Diese Polyeder haben e Ecken, $\frac{e}{2}$ Flächen, worunter $\frac{e}{4}$ Vierecke, $\frac{e}{6}$ Sechsecke und $\frac{e}{12}$ Zwölfecke, und $\frac{3e}{2}$ Kanten, und lassen sich leicht aus den Polyedern mit sechsseitigen Ecken und dreiseitigen Flächen ableiten.

3) Polyeder mit vierseitigen Ecken, deren jede von zwei a-Ecken und zwei b-Ecken begränzt ist.

Man hat (II):

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1,$$

und die einzige Auflösung:

$$a = 3, \quad b = 6.$$

Diese Polyeder haben e Ecken, $2e$ Kanten, $\frac{2e}{3}$ dreiseitige, $\frac{e}{3}$ sechsseitige Flächen, und lassen sich ebenfalls leicht aus den Polyedern ableiten, welche nur sechsseitige Ecken haben.

4) Polyeder mit vierseitigen Ecken, welche von einem a-Eck, zwei b-Ecken und einem c-Eck begränzt sind, wo b gerade sein muss.

Man hat:

$$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}=1,$$

und die einzige Auflösung:

$$a=3,\quad b=4,\quad c=6.$$

Diese Polyeder haben e Ecken, $2e$ Kanten, $\frac{e}{3}$ dreiseitige, $\frac{e}{2}$ vierseitige, $\frac{e}{6}$ sechsseitige Flächen, und lassen sich ebenfalls aus Polyedern mit nur sechsseitigen Ecken ableiten.

5) Polyeder mit fünfseitigen Ecken, welche von 4 a-Ecken und einem b-Eck begränzt sind.

Man hat:

$$\frac{8}{a}+\frac{2}{b}=3,$$

und die einzige Lösung:

$$a=3,\quad b=5.$$

Die Realität solcher Polyeder zu constatiren, ist mir bis jetzt noch nicht gelungen.

6) Polyeder mit fünfseitigen Ecken, welche von 3 a-Ecken und 2 b-Ecken begränzt sind.

Man hat:

$$\frac{6}{a}+\frac{4}{b}=3,$$

und die einzige Auflösung:

$$a=3,\quad b=4.$$

Polyeder dieser Art, welche e Ecken, $\frac{5e}{2}$ Kanten, e dreiseitige und $\frac{e}{2}$ vierseitige Flächen haben, lassen sich ohne Schwierigkeit aus Polyedern mit nur sechsseitigen Ecken ableiten, wenn man an jeder Ecke 2 Gränzdreiecke zu einem Viereck werden lässt.

Andere Polyeder von der vorausgesetzten Beschaffenheit sind unter den einfach durchbrochenen nicht möglich.

Dem Satze III. lässt sich der folgende, wie jener für alle Polyeder gültige Satz zur Seite stellen, der sich fast ebenso wie jener beweisen lässt:

IV. Wenn alle Flächen eines Polyeders auf gleiche Weise

von α a-seitigen, β b-seitigen, γ c-seitigen Ecken umgeben sind, und eine der Zahlen a, b, c, z. B. a, ungerade ist, so muss eine der Zahlen $\alpha-1$, β, γ mindestens zwei betragen.

Man hat ferner für Polyeder dieser Art für die Grössen a, b, c, α, β, γ dieselbe Relation II. wie bei den vorher betrachteten Polyedern, so dass jedem möglichen Polyeder, dessen sämmtliche Ecken von α a-Ecken, β b-Ecken, γ c-Ecken begränzt sind, ein mögliches Polyeder entspricht, von dessen sämmtlichen Flächen jede α a-Ecken, β b-Ecken, γ c-Ecken anliegt.

3.

Soll ein m-fach durchbrochenes Polyeder nur x-seitige oder mehr als x-seitige Ecken haben, so ist:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & f=k-e+2(1-m), \\ & 2k \overset{=}{>} xe. \end{aligned}\right.$$

Nun ist

$$2k \geqq 3f,$$

und:

$$3f=3k-3e+6(1-m),$$

also:

$$2k \geqq 3k-3e+6(1-m),$$

mithin

$$0 \geqq k-3e+6(1-m),$$

oder, da $k \geqq \frac{xe}{2}$:

$$0 \geqq \frac{xe}{2}-3e+6(1-m),$$

oder endlich:

$$(2)\quad m \geqq 1+\frac{e(x-6)}{12}.$$

Sei nun $x \geqq 7$, so hätte man $m \geqq \frac{e}{12}$.

Es ist aber leicht einzusehen, dass diess nicht möglich ist, wenn zugleich in jedem Eckpunkte mindestens 7 Flächen zusam-

mentreffen sollen. Damit ist aber bewiesen, dass kein Polyeder möglich ist, dessen sämmtliche Ecken sieben oder mehr Seiten haben.

Ebenso lässt sich nachweisen, dass auch kein Polyeder möglich ist, dessen Gränzflächen alle sieben oder mehr Seiten haben.

4.

Herr Dr. Baltzer schliesst von den Polyedern, für welche er den Euler'schen Satz als gültig annimmt, nur solche als „uneigentliche Polyeder" aus, die entstehen, „wenn man Polyeder so zusammenstellt, dass weder eine Fläche des einen von einer Ecke des anderen, noch eine Ecke des einen von einer Ecke des anderen gedeckt wird." Es ist mir zwar nicht ganz klar, was für Polyeder dazu gehören, oder nicht dazu gehören; so viel scheint mir aber sicher, dass die von Herrn Dr. Baltzer selbst dazu gezählten Sterndodekaeder, von denen das eine von zwölf Sternfünfecken (oder besser von fünf mal zwölf gleichschenkligen Dreiecken) begränzt ist, die zwölf fünfseitige Ecken bilden, und das andere von zwölf gemeinen Fünfecken (oder eigentlich auch von fünf mal zwölf Dreiecken), welche zwölf körperliche Sternfünfecke bilden, durchaus nicht unter jene Definition passen wollen, obgleich sie allerdings, als Dodekaeder betrachtet, dem Euler'schen Satze nicht entsprechen, da sie, als Dodekaeder betrachtet, 30 Kanten haben.

Nun gehören diese beiden Sterndodekaeder, welche nach Herrn Dr. Baltzer nur „uneigentliche Polyeder" sein sollen (was sie aber „eigentlich" seien, darauf bleibt Herr Doctor Baltzer die Antwort schuldig), aber auch in keine der Klassen von Polyedern, welche ich in meiner letzten Abhandlung den Euler'schen gegenübergestellt habe. Es möchte daher scheinen, als gehörten sie in eine ganz aparte, auch von mir übersehene Klasse von Polyedern.

Bei meiner Untersuchung über die verschiedenen Arten von Polyedern hatte ich jedoch, als sich von selbst verstehend, vorausgesetzt, dass jede vollständig begränzte Ebene an einem Polyeder als eine besondere Gränzfigur (Fläche) angesehen werde, auch dann, wenn etwa mehrere derselben Theile einer und derselben Ebene sein und etwa ein sogenanntes Sternpolygon bilden sollten, und dass jede zweien Gränzfiguren gemeinschaftliche Seite, welche immer die Scheitel zweier Ecken verbindet, als

eine besondere Kante angesehen werde, auch dann, wenn etwa mehrere solcher Kanten eine einzige Gerade bilden sollten.

Unter dieser Voraussetzung erweisen sich aber jene beiden Sterndodekaeder nicht etwa als „uneigentliche Polyeder", sondern als „uneigentliche Dodekaeder" und „eigentliche Pentakisdodekaeder" mit 60 dreiseitigen Flächen, welche bei dem einen 20 dreiseitige und 12 zehnseitige, bei dem anderen 20 sechsseitige und 12 fünfseitige Ecken bilden, so dass also dem Euler'schen Satze Genüge geschieht.

Ich bin ferner von der Auffassung ausgegangen, dass ein Polyeder „ein von allen Seiten durch Ebenen begränzter Raum" sei, und nicht etwa „eine aus ebenen Polygonen zusammengesetzte Fläche." Diess halte ich für nöthig zu erklären; denn bei der letzteren Auffassung könnte man leicht auch von Polyedern reden, die sich selbst schneiden, wie man von Polygonen, „deren Perimeter sich selbst schneidet" eigentlich sagen müsste, dass sie selbst sich schneiden; denn wo davon die Rede ist, versteht man unter dem Polygone und seinem Perimeter ein und dasselbe.

III.

Integration der Differentialgleichung

$$xy^{(r)} - y^{(r-1)} + mx^2y = 0 \qquad (1)$$

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Die Integration der Gleichung (1), in welcher r eine ganze positive Zahl und m eine beliebige constante Zahl bedeutet, ist sehr leicht. Differenzirt man nämlich die Gleichung (1) einmal, so erhält man:

$$xy^{(r+1)} + mx^2y' + 2mxy = 0,$$

oder einfacher:

$$y^{(r+1)} + mxy' + 2my = 0. \tag{2}$$

Die Gleichung (2) lässt sich nach der Laplace'schen Methode integriren, und man erhält mittelst derselben:

$$y = \int_0^\infty ue^{-\frac{u^{r+1}}{r+1}}(C_1 e^{k_1ux} + C_2 e^{k_2ux} + \dots + C_{r+1} e^{k_{r+1}ux})du, \tag{3}$$

woselbst

$$C_1, C_2, \dots, C_{r+1}$$

willkührliche Constanten, und

$$k_1, k_2, \dots, k_{r+1}$$

die $r+1$ Wurzeln der Gleichung

$$k^{r+1} = -m \tag{4}$$

bedeuten. Damit aber das in (3) stehende y der Gleichung (1) Genüge leiste, muss zwischen den $r+1$ Constanten $C_1, C_2, \dots C_{r+1}$ eine gewisse Relation bestehen, und die wollen wir nun aufsuchen. Setzen wir zu dem Zwecke in (1) für y den Werth:

$$y = \mathrm{S}C\int_0^\infty ue^{kux - \frac{u^{r+1}}{r+1}} du, \tag{5}$$

so erhält man:

$$\mathrm{S}C\int_0^\infty e^{kux - \frac{u^{r+1}}{r+1}}(k^r xu^{r+1} - k^{r-1}u^r + mux^2)du = 0, \tag{6}$$

und diess soll identisch stattfinden. Nun ist:

$$\int mux^2 e^{kux - \frac{u^{r+1}}{r+1}} du = \int \frac{mxu}{k} e^{-\frac{u^{r+1}}{r+1}} de^{kux}$$

$$= \frac{mxu}{k} e^{kux - \frac{u^{r+1}}{r+1}} - \int \frac{mx}{k} e^{kux - \frac{u^{r+1}}{r+1}}(1 - u^{r+1})du,$$

folglich hat man;

$$\int_0^\infty mux^2 e^{kux - \frac{u^{r+1}}{r+1}} du = -\int_0^\infty \frac{mx}{k} e^{kux - \frac{u^{r+1}}{r+1}}(1 - u^{r+1})du$$

und die Gleichung (6) geht über in:

$$SC\int_0^\infty e^{kux-\frac{u^{r+1}}{r+1}}\left(k^r x u^{r+1} - k^{r-1}u^r - \frac{mx}{k} + \frac{mx}{k}u^{r+1}\right)du = 0.$$

Vermöge der Gleichung (4) ist aber

$$k^r = -\frac{m}{k},$$

und durch diess reducirt sich die Gleichung (7) auf:

$$SC\int_0^\infty e^{kux-\frac{u^{r+1}}{r+1}}\left(k^{r-1}u^r + \frac{mx}{k}\right)du = 0. \tag{8}$$

Nun ist wieder:

$$\int e^{kux-\frac{u^{r+1}}{r+1}}\frac{mx}{k}du = \int \frac{m}{k^2}e^{-\frac{u^{r+1}}{r+1}}de^{kux}$$

$$= \frac{m}{k^2}e^{kux-\frac{u^{r+1}}{r+1}} + \int \frac{m}{k^2}u^r e^{kux-\frac{u^{r+1}}{r+1}}du,$$

folglich hat man:

$$\int_0^\infty e^{kux-\frac{u^{r+1}}{r+1}}\frac{mx}{k}du = -\frac{m}{k^2} + \int_0^\infty \frac{m}{k^2}u^r e^{kux-\frac{u^{r+1}}{r+1}}du,$$

und die Gleichung (8) geht durch diess über in:

$$-S\left[C\frac{m}{k^2}\right] + SC\int_0^\infty e^{kux-\frac{u^{r+1}}{r+1}}\left(k^{r-1}u^r + \frac{m}{k^2}u^r\right)du = 0. \tag{9}$$

Vermöge der Gleichung (4) ist:

$$k^{r-1} = -\frac{m}{k^2},$$

folglich geht (9) über in:

$$S\left[\frac{Cm}{k^2}\right] = 0,$$

was auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{C_1}{k_1{}^2} + \frac{C_2}{k_2{}^2} + \ldots + \frac{C_{r+1}}{k_{r+1}{}^2} = 0. \tag{10}$$

Es genügt also das in (3) stehende y der Gleichung (1), wenn zwischen den $r+1$ willkührlichen Constanten $C_1, C_2, \ldots, C_{r+1}$ die in (10) aufgestellte Relation statt findet.

So ist z. B. das Integral der Gleichung:

$$xy'' - y' + mx^2y = 0 \qquad (11)$$

von folgender Form:

$$y = \int_0^\infty ue^{-\frac{u^3}{3}}(C_1e^{k_1ux} + C_2e^{k_2ux} + C_3e^{k_3ux})du, \qquad (12)$$

woselbst k_1, k_2, k_3 die drei Wurzeln der Gleichung

$$k^3 = -m$$

sind, und C_1, C_2, C_3 willkührliche Constanten bedeuten, zwischen denen bloss folgende Relation besteht:

$$\frac{C_1}{k_1{}^2} + \frac{C_2}{k_2{}^2} + \frac{C_3}{k_3{}^2} = 0,$$

die einfacher auch so geschrieben werden kann:

$$C_1k_1 + C_2k_2 + C_3k_3 = 0.$$

Es lässt sich auch die Gleichung integriren:

$$xy'' - y' = Ax^my; \qquad (13)$$

denn führt man in selbe eine neue Variable ξ ein, mittelst der Substitution

$$x^{m+1} = \xi^2,$$

so erhält man, da

$$y' = \frac{m+1}{2} x^{\frac{m-1}{2}} \frac{dy}{d\xi},$$

$$y'' = \frac{m^2-1}{4} x^{\frac{m-3}{2}} \frac{dy}{d\xi} + \left(\frac{m+1}{2}\right)^2 x^{m-1} \frac{d^2y}{d\xi^2}$$

ist, folgende Gleichung:

$$(m+1)^2 x^m \frac{d^2y}{d\xi^2} + (m+1)(m-3) x^{\frac{m-1}{2}} \frac{dy}{d\xi} = Ax^my,$$

welche, wenn mann statt x seinen Werth in ξ einführt, die Gestalt annimmt:

$$\xi\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{m-3}{m+1}\frac{dy}{d\xi}-\frac{4A}{(m+1)^2}\xi y=0,$$

welche Gleichung nun leicht zu integriren ist.

Differenzirt man die Gleichung (13), so kommt man auf die Gleichung:

$$y'''=Ax^{m-2}(xy'+my), \tag{14}$$

welche somit ebenfalls zu den integrirbaren gehört.

IV.

Integration der Differenzengleichung

$$\left.\begin{array}{r}X_nf(x+rn)+X_{n-1}f(x+rn-r)+X_{n-2}f(x+rn-2r)+\ldots\\ \ldots+X_1f(x+r)+X_0f(x)=0,\end{array}\right\} \tag{1}$$

in welcher X_n, X_{n-1}, X_{n-2}, ..., X_1, X_0 ganze algebraische Functionen von x sind, und r eine ganze positive Zahl bezeichnet.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,
Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Ich habe im 32sten Theile des Archivs, Seite 334, eine neue Integrations-Methode für Differenzengleichungen mitgetheilt. Nach dieser Methode lässt sich auch die Gleichung (1) behandeln. Es lässt sich aber die Gleichung (1) auch einfacher integriren, und

zwar dadurch, dass man statt x eine neue Variable ξ einführt, mittelst der Substitution

$$x = r\xi.$$

Bezeichnet man das Resultat dieser Substitution in

$$X_n, \ X_{n-1}, \ X_{n-2}, \ldots, \ X_1, \ X_0$$

respective mit

$$\xi_n, \ \xi_{n-1}, \ \xi_{n-2}, \ldots, \ \xi_1, \ \xi_0;$$

so erhält man:

$$\xi_n f(r\xi + rn) + \xi_{n-1} f(r\xi + rn - r) + \xi_{n-2} f(r\xi + rn - 2r) + \ldots$$
$$\ldots + \xi_1 f(r\xi + r) + \xi_0 f(r\xi) = 0.$$

Setzt man nun hierein

$$f(r\xi) = F(\xi),$$

so erhält man:

$$\xi_n F(\xi + n) + \xi_{n-1} F(\xi + n - 1) + \xi_{n-2} F(\xi + n - 2) + \ldots$$
$$\ldots + \xi_1 F(\xi + 1) + \xi_0 F(\xi) = 0,$$

welche Gleichung einfacher als die vorgelegte ist.

V.

Ueber die Anwendung der Formeln der sphärischen Trigonometrie auf die elliptischen Functionen.

Von

Herrn Doctor *Otto Böklen*

zu Sulz a. N. im Königreich Würtemberg.

Wir bezeichnen mit φ, ψ und ω drei Amplituden, welche der Gleichung für die Addition der elliptischen Integrale erster Art:

$$F(k,\varphi)+F(k,\psi)=F(k,\omega),$$

oder der elliptischen Integrale zweiter Art:

$$E(k,\varphi)+E(k,\psi)=E(k,\omega)+k^2\sin\varphi\sin\psi\sin\omega$$

entsprechen, so sind diese Amplituden durch nachstehende Gleichungen verbunden:

$$\cos\varphi=\cos\omega\cos\psi+\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

$$\cos\psi=\cos\omega\cos\varphi+\sin\omega\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\psi},$$

$$\cos\omega=\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}.$$

Wir führen nun drei Hülfswinkel ein, Φ, Ψ, Ω, welche durch diese Werthe gegeben sind:

$$1)\quad\begin{cases}\cos\Phi=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},\\ \cos\Psi=\sqrt{1-k^2\sin^2\psi},\\ \cos\Omega=-\sqrt{1-k^2\sin^2\omega};\end{cases}$$

so haben wir für die Amplituden φ, ψ und ω folgende Gleichungen:

$$2)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \cos\omega\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\Phi, \\ \cos\psi = \cos\omega\cos\varphi + \sin\omega\sin\varphi\cos\Psi, \\ \cos\omega = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\cos\Omega. \end{cases}$$

Man übersieht nun sogleich, dass, wenn φ, ψ, ω die Seiten eines sphärischen Dreiecks sind, die eingeführten Hülfswinkel Φ, Ψ, Ω die Winkel dieses sphärischen Dreiecks sind; und zwar liegen die Seiten φ, ψ, ω der Reihe nach den Winkeln Φ, Ψ, Ω gegenüber.

Aus 1) findet man:

$$3)\quad \begin{cases} \sin\Phi = k\sin\varphi, \\ \sin\Psi = k\sin\psi, \\ \sin\Omega = k\sin\omega; \end{cases}$$

also:

$$\sin\varphi : \sin\psi : \sin\omega = \sin\Phi : \sin\Psi : \sin\Omega.$$

Die Sinus der Amplituden verhalten sich wie die Sinus der ihnen entsprechenden Hülfswinkel; was mit dem Fundamentalsatz der sphärischen Trigonometrie übereinstimmt: Die Sinus der Seiten verhalten sich wie die Sinus der Gegenwinkel.

Wir führen nun zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein:

$$4)\quad s = \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi + \omega), \quad S = \tfrac{1}{2}(\Phi + \Psi + \Omega);$$

so ist:

$$\begin{aligned} s-\varphi &= \tfrac{1}{2}(-\varphi + \psi + \omega), & S-\Phi &= \tfrac{1}{2}(-\Phi + \Psi + \Omega), \\ s-\psi &= \tfrac{1}{2}(\varphi - \psi + \omega), & S-\Psi &= \tfrac{1}{2}(\Phi - \Psi + \Omega), \\ s-\omega &= \tfrac{1}{2}(\varphi + \psi - \omega); & S-\Omega &= \tfrac{1}{2}(\Phi + \Psi - \Omega). \end{aligned}$$

Ferner sei:

$$5)\quad \begin{cases} \sqrt{\sin s \sin(s-\varphi)\sin(s-\psi)\sin(s-\omega)} = i, \\ \sqrt{-\cos S\cos(S-\Phi)\cos(S-\Psi)\cos(S-\Omega)} = J; \end{cases}$$

(geometrisch betrachtet, ist $2i$ der Inhalt des Parallelepipeds, dessen Kanten die drei Kugelhalbmesser sind, welche nach den Ecken unseres sphärischen Dreiecks gehen; $2J$ ist der Inhalt

des Parallelepipeds, dessen Kanten die drei Kugelhalbmesser sind, welche nach den Ecken seines Polardreiecks gehen); so haben wir mit Benützung der Grundgleichungen der sphärischen Trigonometrie folgende kleine Formeln-Sammlung, welche auf die Amplituden der elliptischen Integrale und der von uns eingeführten Hülfswinkel sich bezieht:

6)

$$\cos\tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-\varphi)}{\sin\psi \sin\omega}}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\Phi = \sqrt{\frac{\sin(s-\psi)\sin(s-\omega)}{\sin\psi\sin\omega}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\Psi = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-\psi)}{\sin\varphi \sin\omega}}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\Psi = \sqrt{\frac{\sin(s-\varphi)\sin(s-\omega)}{\sin\varphi\sin\omega}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\Omega = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-\omega)}{\sin\varphi \sin\psi}}; \quad \sin\tfrac{1}{2}\Omega = \sqrt{\frac{\sin(s-\varphi)\sin(s-\psi)}{\sin\varphi\sin\psi}};$$

7)

$$\cos\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{\cos(S-\Psi)\cos(S-\Omega)}{\sin\Psi\sin\Omega}}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\Phi)}{\sin\Psi\sin\Omega}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{\cos(S-\Phi)\cos(S-\Omega)}{\sin\Phi\sin\Omega}}, \quad \sin\tfrac{1}{2}\psi = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\Psi)}{\sin\Phi\sin\Omega}};$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{\cos(S-\Phi)\cos(S-\Psi)}{\sin\Phi\sin\Psi}}; \quad \sin\tfrac{1}{2}\omega = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\Omega)}{\sin\Phi\sin\Psi}}.$$

Der Modulus k ist durch folgende Gleichungen gegeben:

8)

$$k = \frac{\sin\Phi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\Psi}{\sin\psi} = \frac{\sin\Omega}{\sin\omega}$$

$$= \frac{2i}{\sin\varphi\sin\psi\sin\omega} = \frac{\sin\Phi\sin\Psi\sin\Omega}{2J} = \frac{J}{i};$$

9)

$$4Ji = \sin\varphi\sin\psi\sin\omega\sin\Phi\sin\Psi\sin\Omega;$$

$$10)\quad \begin{cases} \sin s = \dfrac{2}{k}\cos\frac{1}{2}\Phi\cos\frac{1}{2}\Psi\cos\frac{1}{2}\Omega, \\[2ex] \sin(s-\varphi) = \dfrac{2}{k}\cos\frac{1}{2}\Phi\sin\frac{1}{2}\Psi\sin\frac{1}{2}\Omega, \\[2ex] \sin(s-\psi) = \dfrac{2}{k}\sin\frac{1}{2}\Phi\cos\frac{1}{2}\Psi\sin\frac{1}{2}\Omega, \\[2ex] \sin(s-\omega) = \dfrac{2}{k}\sin\frac{1}{2}\Phi\sin\frac{1}{2}\Psi\cos\frac{1}{2}\Omega; \end{cases}$$

$$11)\quad \begin{cases} \cos S = -2k\sin\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\omega, \\ \cos(S-\Phi) = 2k\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\omega, \\ \cos(S-\Psi) = 2k\cos\frac{1}{2}\varphi\sin\frac{1}{2}\psi\cos\frac{1}{2}\omega, \\ \cos(S-\Omega) = 2k\cos\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\psi\sin\frac{1}{2}\omega; \end{cases}$$

$$12)\quad \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Phi\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Psi\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Omega = \dfrac{i}{\sin^2 s}, \\[2ex] \operatorname{cotg}\frac{1}{2}\varphi\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\psi\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\omega = \dfrac{J}{\cos^2 S}. \end{cases}$$

Die Zahl solcher Formeln lässt sich mit Benützung der bekannten Gleichungen der sphärischen Trigonometrie noch sehr vermehren.

Aus jeder Gleichung für das sphärische Dreieck lässt sich eine andere ableiten mit Hülfe des Polardreiecks, indem man Winkel und Seiten gegenseitig vertauscht und dafür die Supplemente (Ergänzungen zu 180°) setzt. Hieraus schliesst man:

Jeder Gleichung zwischen den Amplituden φ, ψ, ω der elliptischen Integrale und ihren Hülfswinkeln Φ, Ψ, Ω entspricht eine andere, indem man Amplituden und Hülfswinkel gegenseitig vertauscht und dafür die Supplemente setzt. Also erhalten wir aus 2):

$$13)\quad \begin{cases} \cos\Phi = -\cos\Psi\cos\Omega + \sin\Psi\sin\Omega\cos\varphi, \\ \cos\Psi = -\cos\Phi\cos\Omega + \sin\Phi\sin\Omega\cos\psi, \\ \cos\Omega = -\cos\Phi\cos\Psi + \sin\Phi\sin\Psi\cos\omega. \end{cases}$$

Die dritte Hauptgleichung der sphärischen Trigonometrie liefert uns folgende weiteren Formeln:

$$
14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cot g\,\varphi \sin\psi - \cot g\,\Phi \sin\Omega - \cos\psi\cos\Omega = 0,\\
&\cot g\,\psi \sin\varphi - \cot g\,\Psi \sin\Omega - \cos\varphi\cos\Omega = 0,\\
&\cot g\,\varphi \sin\omega - \cot g\,\Phi \sin\Psi - \cos\omega\cos\Psi = 0,\\
&\cot g\,\omega \sin\varphi - \cot g\,\Omega \sin\Psi - \cos\varphi\cos\Psi = 0,\\
&\cot g\,\varphi \sin\psi - \cot g\,\Psi \sin\Phi - \cos\omega\cos\Phi = 0,\\
&\cot g\,\omega \sin\psi - \cot g\,\Omega \sin\Phi - \cos\psi\cos\Phi = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Hieran schliessen sich noch die Gauss'schen Gleichungen und die Neper'schen Analogien:

$$
15)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\cos\frac{\Phi+\Psi}{2}}{\cos\frac{\Omega}{2}} = \frac{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}, \qquad \frac{\cos\frac{\Phi-\Psi}{2}}{\cos\frac{\Omega}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}};\\
&\frac{\sin\frac{\Phi+\Psi}{2}}{\cos\frac{\Omega}{2}} = \frac{\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}, \qquad \frac{\sin\frac{\Phi-\Psi}{2}}{\cos\frac{\Omega}{2}} = \frac{\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}};
\end{aligned}
\right.
$$

$$
16)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\cos\frac{\Phi-\Psi}{2}}{\cos\frac{\Phi+\Psi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}, \qquad \frac{\sin\frac{\Phi-\Psi}{2}}{\sin\frac{\Phi+\Psi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}};\\
&\frac{\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\Phi+\Psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Omega}{2}}, \qquad \frac{\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\Phi-\Psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Omega}{2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Aus der Gleichung

$$\sin\varphi : \sin\psi = \sin\Phi : \sin\Psi$$

folgt:

$$
17)\qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi+\psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\varphi-\psi}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\Phi+\Psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\Phi-\Psi}{2}}.
$$

Um die Anwendung unserer Formeln zu zeigen, wollen wir einige hierher bezügliche Aufgaben lösen:

Es seien drei Amplituden gegeben, man soll den zugehörigen Modulus k bestimmen.

Um diese Aufgabe zu lösen, könnte man eine der Amplituden-Gleichungen nehmen, z. B. die erste:

$$\cos\varphi = \cos\omega\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi},$$

und aus derselben k durch die gegebenen Amplituden φ, ψ, ω bestimmen. Allein für logarithmische Berechnung geeigneter ist offenbar die Formel 8):

$$k = \frac{2i}{\sin\varphi\sin\psi\sin\omega}.$$

Es ist der Modulus k gegeben, eine Amplitude und die Summe oder Differenz der beiden anderen Amplituden. Man soll jede der letzteren bestimmen.

Wenn die Grössen k, ω und $\varphi+\psi$ gegeben sind, so haben wir nach 8):

$$\sin\Omega = k\sin\omega,$$

woraus sich Ω bestimmen lässt; nach 15) ist ferner:

$$\cos\frac{\Phi+\Psi}{2} = \cos\frac{\Omega}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\varphi+\psi}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}, \quad \cos\frac{\Phi-\Psi}{2} = \cos\frac{\Omega}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi+\psi}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}.$$

Hieraus findet man Φ und Ψ; und nach 8) ist:

$$\sin\varphi = \frac{1}{k}\sin\Phi, \quad \sin\psi = \frac{1}{k}\sin\Psi.$$

Man könnte auch aus $\sin\Omega = k\sin\omega$ direct $\cos\frac{1}{2}\Omega$ bestimmen; es ist nämlich:

$$\cos\tfrac{1}{2}\Omega = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-k^2\sin^2\omega}}{2}}.$$

Ist aber $\varphi-\psi$ gegeben statt $\varphi+\psi$, so bringen wir nach 15) diese Formeln in Anwendung:

$$\sin\frac{\Phi+\Psi}{2} = \cos\frac{\Omega}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\cos\frac{\omega}{2}}, \quad \sin\frac{\Phi-\Psi}{2} = \cos\frac{\Omega}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\varphi-\psi}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}.$$

VI.

Die allgemeinsten Gleichungen und Eigenschaften der kürzesten Linien auf den Flächen, besonders insofern dieselben die Grundlage der sphäroidischen Trigonometrie bilden.

Von
dem Herausgeber.

---

§. 1.

Wir gehen von der folgenden ganz einfachen geometrischen Aufgabe aus, auf die wir den Beweis der Fundamental-Eigenschaft der kürzesten Linie, welche dann unmittelbar zu den allgemeinen Gleichungen dieser Linie führt, hauptsächlich gründen werden:

Aufgabe.

Im Raume seien zwei Punkte und eine Ebene gegeben; man soll in dieser Ebene einen Punkt bestimmen, welcher in derselben eine solche Lage hat, dass er von den beiden gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist, und dass die Summe seiner Entfernungen von den beiden gegebenen Punkten ein Minimum ist.

Auflösung.

Die beiden gegebenen Punkte wollen wir durch A und B und die gegebene Ebene durch E bezeichnen. Weil der gesuchte Punkt, der durch M bezeichnet werden mag, von den beiden gegebenen Punkten A und B gleich weit entfernt sein soll, so ist zuvörderst klar, dass dieser Punkt in der Ebene liegen muss, welche auf der die beiden Punkte A und B verbindenden Gera-

den in deren Mitte senkrecht steht, welche Ebene wir der Kürze wegen durch E' bezeichnen wollen. Da nun aber der gesuchte Punkt M in der gegebenen Ebene E liegen soll, so muss er ein Punkt der Durchschnittslinie der Ebenen E und E' sein, welche Durchschnittslinie durch L bezeichnet werden mag. Ich behaupte nun, dass in Folge der Eigenschaft des Punktes M, dass die Summe $MA+MB$ seiner Entfernungen MA und MB von den beiden Punkten A und B ein Minimum sein soll, dieser Punkt der Punkt sein muss, in welchem die Linie L von der durch die beiden Punkte A und B senkrecht gegen die Ebene E gelegten Ebene, welche wir durch E'' bezeichnen wollen, geschnitten wird. Um dies zu beweisen, sei M' ein beliebiger anderer Punkt der Geraden L. Man denke sich $MA=MB$ und $M'A=M'B$ gezogen. Weil die Ebene E' auf der in der Ebene E'' liegenden Geraden AB senkrecht steht, so steht die Ebene E' auf der Ebene E'' senkrecht; nach der Construction steht aber auch die Ebene E auf der Ebene E'' senkrecht; also steht die Durchschnittslinie L der Ebenen E und E' auf der Ebene E'', folglich auch auf den beiden in der Ebene E'' liegenden, in dem Punkte M der Geraden L sich schneidenden, einander gleichen Geraden MA und MB senkrecht. Folglich sind die beiden Dreiecke AMM' und BMM' bei M rechtwinklig, daher

$$MA < M'A,\quad MB < M'B;$$

also

$$MA+MB < M'A+M'B,$$

und demnach offenbar M der Punkt in der gegebenen Ebene E, welcher von den beiden gegebenen Punkten A und B gleich weit entfernt ist, und für welchen die Summe seiner Entfernungen von diesen beiden Punkten ein Minimum ist, wie behauptet wurde.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar der folgende

Lehrsatz.

Wenn A und B zwei beliebige Punkte im Raume sind und E eine beliebige Ebene ist, und man legt durch den Mittelpunkt C der Geraden AB eine auf AB senkrecht stehende Ebene E', durch die Gerade AB aber eine auf der Ebene E senkrecht stehende Ebene; so ist der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt M der drei Ebenen E, E', E'' derjenige Punkt der Ebene E, welcher in dieser Ebene eine solche Lage hat, dass er von den beiden Punkten A und B gleich weit

entfernt ist, und dass die Summe $MA+MB$ seiner beiden einander gleichen Entfernungen MA und MB von den Punkten A und B ein Minimum ist.

Als Umkehrung dieses Satzes gilt nun aber auch der folgende

Lehrsatz.

Wenn A und B zwei beliebige Punkte im Raume sind und E eine beliebige Ebene ist, und der Punkt M in der Ebene E eine solche Lage hat, dass er von den beiden Punkten A und B gleich weit entfernt ist, und dass die Summe $MA+MB$ seiner beiden gleichen Entfernungen MA und MB von den Punkten A und B ein Minimum ist; so ist der Punkt M der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der Ebene E und zweier Ebenen E' und E'', von denen die erste E' in dem Mittelpunkte C der Geraden AB auf dieser Geraden senkrecht steht, die zweite E'' durch die Gerade AB senkrecht gegen die Ebene E gelegt ist.

Beweis.

Weil nach der Voraussetzung der in der Ebene E liegende Punkt M von den Punkten A und B gleich weit entfernt ist, so muss dieser Punkt M offenbar nothwendig in der in dem Mittelpunkte C der Geraden AB auf dieser Geraden senkrecht stehenden Ebene E', also in der Durchschnittslinie der Ebenen E und E' liegen, da ja aus der Gleichung $MA=MB$ auf der Stelle folgt, dass die Linie MC auf der Geraden AB senkrecht steht, folglich, — und mit ihr natürlich auch der Punkt M, — in der Ebene E' liegt. Läge nun aber der Punkt M nicht auch in der Ebene E'', und wäre also nicht der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Ebenen E, E', E'', so sei M' dieser gemeinschaftliche Durchschnittspunkt; dann wäre nach dem vorhergehenden Satze

$$M'A+M'B<MA+MB,$$

folglich $MA+MB$ kein Minimum, wie doch vorausgesetzt wurde.

§. 2.

Zwei beliebige Punkte auf einer beliebigen Fläche wollen wir uns jetzt durch die Kürzeste zwischen diesen beiden Punkten

auf der Fläche mit einander verbunden denken; so ist zuvörderst klar, dass auch jeder Theil dieser Kürzesten die Kürzeste zwischen seinen Endpunkten auf der Fläche sein muss, weil ja, wenn es zwischen diesen Endpunkten eine kürzere Linie auf der Fläche als den in Rede stehenden Theil geben sollte, es natürlich auch zwischen den beiden ersten Punkten eine kürzere Linie auf der Fläche geben würde als die Linie, welche wir als die Kürzeste auf der Fläche zwischen den beiden in Rede stehenden Punkten voraussetzten, was ungereimt ist.

Ist jetzt M ein beliebiger Punkt in der, zwei gegebene Punkte auf einer Fläche mit einander verbindenden Kürzesten auf dieser Fläche, so denke man sich, dass in diesem Punkte zwei einander gleiche Elemente MA und MB dieser Kürzesten mit einander zusammenstossen; dann muss nach dem vorhergehenden Princip der Punkt M unter allen auf der Fläche liegenden, von A und B gleich weit entfernten Punkten derjenige sein, für welchen $MA+MB$ ein Minimum ist. Denkt man sich aber die Fläche in der unmittelbarsten Nähe des Punktes M durch ihre Berührungsebene in diesem Punkte ersetzt oder repräsentirt, so ist klar, dass auch in dieser Berührungsebene der Punkt M eine solche Lage haben muss, dass $MA+MB$ ein Minimum ist, woraus sich nach den im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Sätzen von selbst ergiebt, dass die Ebene AMB auf der Berührungsebene der Fläche in dem Punkte M, welcher ein ganz beliebiger Punkt der Kürzesten ist, senkrecht stehen muss. Weil nun aber nach den Lehren der höheren Geometrie durch die Ebene AMB bekanntlich die Osculations-Ebene der Kürzesten in dem Punkte M repräsentirt wird; so ergiebt sich aus den vorhergehenden Betrachtungen unmittelbar die folgende Fundamental-Eigenschaft einer jeden Kürzesten auf einer beliebigen Fläche:

In jedem Punkte einer Kürzesten auf einer Fläche steht die Osculations-Ebene der Kürzesten in diesem Punkte auf der Berührungs-Ebene der Fläche in demselben Punkte senkrecht*).

---

*) M. s. Archiv. Thl. XXX. S. 376. Nr. VII.

Da die Haupt-Normale einer beliebigen Curve im Raume bekanntlich die Durchschnittslinie der Normal-Ebene mit der Osculations-Ebene in diesem Punkte ist, und weil die Normal-Ebene offenbar auch immer auf der Berührungs-Ebene der Fläche, auf welcher die Curve liegend gedacht wird, senkrecht steht; so kann man auch sagen, dass in jedem Punkte einer auf einer Fläche gezogenen Kürzesten die Haupt-Normale dieser Kürzesten auf der Berührungs-

Auf diese wichtige Eigenschaft aller Kürzesten auf den Flächen, in der zugleich der Grund liegt, aus welchem man die Kürzesten auch geodätische Curven genannt hat, lässt sich nun mit Hülfe der höheren Geometrie ohne Weiteres die Entwickelung der allgemeinen Gleichungen dieser merkwürdigen Linien gründen, wie wir in den folgenden Paragraphen sehen werden.

§. 3.

Die Gleichung der Fläche, auf welcher wir uns die Kürzeste, die wir jetzt im Allgemeinen betrachten wollen, gezogen denken, sei, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die veränderlichen oder laufenden Coordinaten bezeichnen:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(\mathfrak{x},\mathfrak{y},\mathfrak{z})=0.$$

Ein beliebiger Punkt der Kürzesten sei (xyz), dessen Coordinaten also, weil die Kürzeste auf der durch die Gleichung 1) charakterisirten Fläche liegt, auch der Gleichung:

$$2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad f(x,y,z)=0$$

genügen müssen; insofern wir aber $f(x,y,z)$ bloss als eine Function der drei als unabhängige veränderliche Grössen angesehenen Coordinaten x, y, z betrachten, wollen wir im Folgenden immer

$$3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u=f(x,y,z)$$

setzen. Unter diesen Voraussetzungen ist die Gleichung der Berührungsebene unserer Fläche in dem Punkte (xyz) bekanntlich *):

$$4) \quad \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z}-z)=0,$$

wo natürlich

Ebene der Fläche in diesem Punkte, oder auf dieser Fläche selbst, senkrecht stehen muss. Da ferner bekanntlich der Krümmungs-Mittelpunkt einer Curve für einen gewissen Punkt derselben immer in der diesem Punkte entsprechenden Haupt-Normale liegt; so kann man auch sagen, dass in jedem Punkte einer auf einer Fläche gezogenen Kürzesten der Krümmungs-Halbmesser dieser Kürzesten auf der Berührungs-Ebene der Fläche in diesem Punkte, oder auf dieser Fläche selbst, senkrecht stehen muss. Alles dieses sind nur verschiedene Ausdrücke eines und desselben Satzes.

*) Archiv. Thl. XXX. S. 425. Nr. 61).

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}$$

partielle Differentialquotienten sind. Die Gleichung der Osculations-Ebene der Kürzesten in dem Punkte (xyz) ist aber *), wenn wir uns x, y, z als Functionen der einen beliebigen veränderlichen Grösse φ denken, was bekanntlich verstattet ist, weil x, y, z als Coordinaten eines Punktes einer Curve durch zwei Gleichungen mit einander verbunden gedacht werden müssen:

$$5) \quad \ldots \quad \left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)(\mathfrak{x}-x) \\ +\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right)(\mathfrak{y}-y) \\ +\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\right)(\mathfrak{z}-z) \end{array}\right\}=0.$$

Weil nun nach §. 2. die durch die Gleichungen 4) und 5) charakterisirten Ebenen in jedem Punkte (xyz) der Kürzesten auf einander senkrecht stehen müssen; so sind nach den Lehren der analytischen Geometrie die Coordinaten x, y, z eines jeden Punktes der Kürzesten der Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right) \\ +\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right) \\ +\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\right) \end{array}\right\}=0$$

unterworfen. Da aber die Kürzeste auf der durch die Gleichung 1) charakterisirten Fläche liegt, so sind die Coordinaten x, y, z eines jeden ihrer Punkte auch der Gleichung 2) oder nach 3) der Gleichung $u=0$ unterworfen, und als allgemeine Gleichungen der Kürzesten erhalten wir also die beiden Gleichungen:

$$6) \quad \ldots \quad \left\{\begin{array}{l} u=0, \\ \left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right) \\ +\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right) \\ +\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\right) \end{array}\right\}=0. \end{array}\right.$$

---

*) Archiv. Thl. XXX. S. 381. Nr. 24).

Weil jedoch bekanntlich *)

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$

ist, so kann man die Gleichungen der Kürzesten im Allgemeinen auch unter der Form:

$$7)\quad\ldots\quad\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}=0,\\[2ex] \left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)\\ +\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\\ +\dfrac{\partial u}{\partial z}\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\end{array}\right\}=0\end{array}\right.$$

darstellen.

Zu besonderen Zwecken wird man der zweiten dieser beiden Gleichungen die Form:

$$8)\quad\ldots\quad\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\ +\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\\ +\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\end{array}\right\}=0$$

oder die Form:

$$9)\quad\ldots\quad\left.\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\\ +\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\\ +\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\end{array}\right\}=0$$

geben.

§. 4.

Aus den beiden Gleichungen 7) erhalten wir, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

---

*) Archiv. Theil XXX. S. 418.

$$10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=G\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\\ -\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]\end{array}\right\},\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y}=G\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\\ -\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]\end{array}\right\},\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial z}=G\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\\ -\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]\end{array}\right\}.\end{cases}$$

Nun ist aber, wie sogleich erhellet:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]=2\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right);$$

also kann man die drei vorstehenden Gleichungen auch auf folgende Art ausdrücken:

11)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=G\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=G\left\{\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right\},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=G\left\{\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.-2\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]\right\}.$$

Bezeichnet s den von einem beliebigen bestimmten Anfangspunkte an gerechneten, bei dem Punkte (xyz) sich endigenden Bogen unserer Kürzesten, so ist nach den Lehren der höheren Geometrie bekanntlich in völliger Allgemeinheit:

$$12)\quad\ldots\quad \left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2,$$

also:

$$13) \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right]=2\frac{\partial s}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2},$$

was nach 11) zu den folgenden Gleichungen führt:

$$14) \quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=G\left\{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2\right\},\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=G\left\{\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2\right\},\\
\frac{\partial u}{\partial z}&=G\left\{\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Nimmt man aber, was offenbar verstattet ist, den Bogen s selbst als unabhängige veränderliche Grösse an, und setzt demzufolge $\varphi=s$, so ist:

$$\frac{\partial s}{\partial\varphi}=1,\quad \frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}=0;$$

also nach 14):

$$15) \quad \frac{\partial u}{\partial x}=-G\frac{\partial^2 x}{\partial s^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-G\frac{\partial^2 y}{\partial s^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-G\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}.$$

Aus jedem der vorhergehenden Systeme dreier Gleichungen kann man den Factor G eliminiren, wodurch man u. A. aus den Gleichungen 14) die folgenden Gleichungen erhält:

16)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)&=\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right),\\
\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)&=\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right),\\
\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)&=\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right);
\end{aligned}$$

oder nach einer anderen Anordnung:

17)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\frac{\partial s}{\partial\varphi},\\
\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}&=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)\frac{\partial s}{\partial\varphi},\\
\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2 s}{\partial\varphi^2}&=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\frac{\partial s}{\partial\varphi}.
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen 15) ergeben sich die drei folgenden Gleichungen:

$$18) \quad \ldots \quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}=0, \\ \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=0. \end{array}\right.$$

Nach 16) hat man die Proportionen:

$$19) \quad \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$=\frac{\partial x}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial \varphi}:\frac{\partial y}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial \varphi}:\frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\partial^2 s}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial \varphi},$$

und aus 18) ergeben sich die Proportionen:

$$20) \quad \ldots \quad \frac{\partial u}{\partial x}:\frac{\partial u}{\partial y}:\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}:\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}:\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}.$$

§. 5.

Aus den beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)\frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ +\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right)\frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ +\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\right)\frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{array}\right\}=0$$

folgt, wenn G wieder einen gewissen Factor bezeichnet:

21)

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=G\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}=G\left\{\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}=G\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}\right)-\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}\right)\right\};$$

oder:

$$
22)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial\varphi}&=G\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\\ -\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\end{array}\right\},\\
\frac{\partial y}{\partial\varphi}&=G\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\\ -\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\end{array}\right\},\\
\frac{\partial z}{\partial\varphi}&=G\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)\\ -\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\left[\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\end{array}\right\}.
\end{aligned}\right.
$$

Nun ist aber bekanntlich *):

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\\
+\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\\
+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}
\end{array}\right\}=0,
$$

welche Gleichung auch auf folgende Art:

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\\
+\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}\\
+\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}\\
+\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}
\end{array}\right\}=0,
$$

also offenbar auf folgende Art:

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\\
+\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\dfrac{\partial x}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\dfrac{\partial y}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}
\end{array}\right\}=0
$$

---

*) Archiv. Theil XXX. S. 418. Nr. XV.

dargestellt werden kann, so dass also nach 21):

23)

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-G\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\\+\frac{\partial u}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right]\end{array}\right\},$$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=-G\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\\+\frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right]\end{array}\right\},$$

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=-G\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\\+\frac{\partial u}{\partial z}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right]\end{array}\right\}$$

ist.

Multiplicirt man diese drei Gleichungen nach der Reihe mit

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial y}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man, weil bekanntlich

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0$$

ist, die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=-G\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right),$$

also:

$$\frac{1}{G}=-\frac{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}.$$

Multiplicirt man die drei Gleichungen 23) nach der Reihe mit

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

und addirt sie dann zu einander, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

$$=-G\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right]\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\\+\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right]\end{array}\right\},$$

also:

$$\frac{1}{G}=-\frac{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right\}}{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}}$$

$$-\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}.$$

Setzt man nun die beiden so eben entwickelten Ausdrücke von $\frac{1}{G}$ einander gleich, so erhält man die folgende wichtige Gleichung:

24)
$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}}\\[2ex]
+\dfrac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}\\[2ex]
-\dfrac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}
\end{array}\right\}=0.$$

Wir wollen der Kürze wegen:

$$25)\quad\left\{\begin{array}{l}
P=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi},\\[1ex]
Q=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,\\[1ex]
R=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2
\end{array}\right.$$

setzen; dann ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial\varphi}= &\ \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\\
&+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial Q}{\partial\varphi}=&\ 2\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\},\\
\frac{\partial R}{\partial\varphi}=&\ 2\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right);
\end{aligned}$$

findet nun aber, welches ein besonders wichtiger Fall ist, die Gleichung:

$$26) \ldots \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

Statt, so kann man nach dem Vorhergehenden die Gleichung 24) offenbar auf folgende Art schreiben:

$$27) \quad \ldots \quad \frac{1}{P}\cdot\frac{\partial P}{\partial\varphi}+\frac{1}{Q}\cdot\frac{\partial Q}{\partial\varphi}-\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial R}{\partial\varphi}=0.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber:

$$\frac{1}{PQ}\left(Q\frac{\partial P}{\partial\varphi}+P\frac{\partial Q}{\partial\varphi}\right)-\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial R}{\partial\varphi}=0,$$

also:

$$\frac{1}{PQ}\cdot\frac{\partial.PQ}{\partial\varphi}-\frac{1}{R}\cdot\frac{\partial R}{\partial\varphi}=0$$

oder:

$$R\frac{\partial.PQ}{\partial\varphi}-PQ\frac{\partial R}{\partial\varphi}=0,$$

und folglich auch:

$$\frac{R\frac{\partial.PQ}{\partial\varphi}-PQ\frac{\partial R}{\partial\varphi}}{R^2}=0,$$

also nach den Lehren der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{PQ}{R}\right)=0,$$

woraus unmittelbar, wenn C eine Constante bezeichnet,

$$28) \quad \ldots\ldots \quad \frac{PQ}{R}=C$$

folgt, oder nach dem Obigen:

29)

$$\frac{\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left\{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right\}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}$$

$$=C;$$

natürlich immer nur unter der durch die Gleichung 26) ausgesprochenen Voraussetzung, unter welcher also die Gleichung 29) als ein erstes Integral der allgemeinen Gleichung 24) zu betrachten ist.

Für Flächen des zweiten Grades ist die Gleichung 26) jederzeit erfüllt. In diesem Falle ist nämlich:

$$u = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx + Gx + Hy + Jz + K,$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2Ax + Dy + Fz + G,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Dx + 2By + Ez + H,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = Fx + Ey + 2Cz + J;$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & (2A\frac{\partial x}{\partial\varphi} + D\frac{\partial y}{\partial\varphi} + F\frac{\partial z}{\partial\varphi})\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} \\
& + (D\frac{\partial x}{\partial\varphi} + 2B\frac{\partial y}{\partial\varphi} + E\frac{\partial z}{\partial\varphi})\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} \\
& + (F\frac{\partial x}{\partial\varphi} + E\frac{\partial y}{\partial\varphi} + 2C\frac{\partial z}{\partial\varphi})\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}$$

und:

$$\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

$$\begin{aligned}
= \quad & (2A\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + D\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + F\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2})\frac{\partial x}{\partial\varphi} \\
& + (D\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + 2B\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + E\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2})\frac{\partial y}{\partial\varphi} \\
& + (F\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + E\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} + 2C\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2})\frac{\partial z}{\partial\varphi} \\
= \quad & (2A\frac{\partial x}{\partial\varphi} + D\frac{\partial y}{\partial\varphi} + F\frac{\partial z}{\partial\varphi})\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} \\
& + (D\frac{\partial x}{\partial\varphi} + 2B\frac{\partial y}{\partial\varphi} + E\frac{\partial z}{\partial\varphi})\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2} \\
& + (F\frac{\partial x}{\partial\varphi} + E\frac{\partial y}{\partial\varphi} + 2C\frac{\partial z}{\partial\varphi})\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2},
\end{aligned}$$

folglich in der That:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$$

$$=\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

wie es die Gleichung 26) verlangt.

§. 6.

Aus den Gleichungen der Kürzesten wollen wir jetzt

$$\frac{\partial z}{\partial\varphi} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}$$

ganz eliminiren. Zu dem Ende setzen wir:

$$-\sigma=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2},$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}=-\sigma-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2},$$

und folglich:

$$\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$=-\sigma\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)$$

$$=\sigma\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2};$$

aber bekanntlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=0,$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi};$$

daher nach dem Obigen:

$$\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)=-\sigma\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)=\quad\sigma\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right).$$

Für die Kürzeste ist nun nach der zweiten der Gleichungen 7), wenn man diese Gleichung mit $\frac{\partial u}{\partial z}$ multiplicirt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right),$$

also nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$\left.\begin{array}{c}-\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\sigma\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ +\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\end{array}\right\}=0$$

oder:

$$\left.\begin{array}{c}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\\ +\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\end{array}\right\}=0.$$

Es ist aber bekanntlich *):

$$\sigma=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$
$$+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}+2\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi},$$

folglich, wenn man mit $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ multiplicirt, und

$$\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)$$

setzt:

---

*) Archiv. Theil XXX. S. 418.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \sigma = \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$-2\frac{\partial u}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right),$$

also, wie leicht erhellet:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \sigma = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+2\left\{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right\}\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$+\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2;$$

ferner ist, wie man sogleich übersieht:

30)

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial z} : \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial z} : \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial z} : \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right\} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2};$$

also:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \sigma = \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z} : \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$+2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z} : \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}$$

$$+\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z} : \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2;$$

und man hat folglich nach dem Obigen für die Kürzeste offenbar die folgende Gleichung:

31)

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\\ \qquad+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\\ \times\left\{\begin{array}{l}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}:\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2\\ +2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}:\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\\ +\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}:\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]\right\}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\end{array}\right\}\end{array}\right\}=0,$$

durch welche, in Verbindung mit der Gleichung $u=0$, die Kürzeste vollständig charakterisirt wird.

Wenn die Gleichung $u=0$ unter der Form

$$z=f(x,y) \quad \text{oder} \quad z-f(x,y)=0$$

gegeben ist, so ist

$$u=z-f(x,y)$$

zu setzen, und es ist folglich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial_x f(x,y)}{\partial x}=-\frac{\partial_x z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial_y f(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial_y z}{\partial y},$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=1;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial_x{}^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial_y{}^2 z}{\partial y^2},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial_{xy}{}^2 z}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0,\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0;$$

also nach 30):

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial z}:\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial z}:\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right\}=0,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial z}:\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\}=0;$$

folglich wird die Gleichung 31) der Kürzesten:

32)

$$\left.\begin{array}{l}\left\{1+\left(\frac{\partial_x z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial_y z}{\partial y}\right)^2\right\}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}\right)\\ +\left(\frac{\partial_y z}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial_x z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)\left\{\frac{\partial_x{}^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+2\frac{\partial_{xy}{}^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial_y{}^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right\}\end{array}\right\}=0.$$

Setzt man aber, was natürlich verstattet ist, $\varphi=x$, also

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=1,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}=0;$$

so geht die vorstehende Gleichung in die Gleichung:

33)

$$\left.\begin{array}{l}\left\{1+\left(\frac{\partial_x z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial_y z}{\partial y}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\\ +\left(\frac{\partial_y z}{\partial y}-\frac{\partial_x z}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left\{\frac{\partial_x{}^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial_{xy}{}^2 z}{\partial x\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial_y{}^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\end{array}\right\}=0$$

über.

§. 7.

Nach diesen allgemeinen Entwickelungen wollen wir jetzt zu der besonderen Betrachtung der Rotationsflächen übergehen.

Wenn wir die Axe der z als Drehungsaxe annehmen und Z eine Function von z bezeichnet, so kann man sich im vorliegenden Falle die Gleichung $u=0$ immer auf die Form:

34) . . . $Z^2=x^2+y^2$ oder $x^2+y^2-Z^2=0$

gebracht denken, und kann also:

35) . . . . $u=x^2+y^2-Z^2$

setzen; folglich ist:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=-2Z\frac{\partial Z}{\partial z}.$$

Nach 10) ist nun offenbar im Allgemeinen:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}}{\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}}{\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}{\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}},$$

also im vorliegenden Falle:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\frac{x\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}}{x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}}.$$

Nun ist aber, wie man sogleich übersieht:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}},$$

also:

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}=\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}};$$

ferner ist, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)=x\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-y\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2},$$

so dass man also nach dem Vorhergehenden für Rotationsflächen die folgende Gleichung der Kürzesten hat:

$$36)\qquad \frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}}=\frac{\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)}{x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}},$$

also:

$$\left.\begin{array}{l}\left(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\\ -\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\end{array}\right\}=0,$$

folglich auch:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}\left(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\\ -\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)\end{array}\right\}}{\left(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2}=0$$

also nach der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}}{x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}}\right\}=0,$$

woraus unmittelbar

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}}{x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}}=\text{Const.},$$

also auch, wenn C eine Constante bezeichnet:

$$37)\quad \frac{x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}}=C$$

oder:

$$38)\quad x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}=C\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}$$

folgt.

Aus der Gleichung

$$x^2+y^2=Z^2$$

ergiebt sich, wenn man der Kürze wegen

$$Z'=\frac{\partial Z}{\partial z}$$

setzt:

$$x\frac{\partial x}{\partial\varphi}+y\frac{\partial y}{\partial\varphi}=Z\frac{\partial Z}{\partial\varphi}=Z\frac{\partial Z}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=ZZ'\frac{\partial z}{\partial\varphi},$$

also:

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{ZZ'\frac{\partial z}{\partial\varphi}-x\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{y},$$

und folglich:

$$x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{xZZ'\frac{\partial z}{\partial\varphi}-(x^2+y^2)\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{y}=\frac{Z\left(xZ'\frac{\partial z}{\partial\varphi}-Z\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)}{y},$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=\frac{y^2\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+(ZZ'\frac{\partial z}{\partial \varphi}-x\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2}{y^2}$$

$$=\frac{(Z^2-x^2)\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right\}+(ZZ'\frac{\partial z}{\partial \varphi}-x\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2}{y^2}.$$

Daher hat man nach 38) die folgende Gleichung:

$$Z^2(xZ'\frac{\partial z}{\partial \varphi}-Z\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2$$

$$=C^2\{(Z^2-x^2)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right]+(ZZ'\frac{\partial z}{\partial \varphi}-x\frac{\partial x}{\partial \varphi})^2\},$$

welche man leicht auf die Form:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2-\frac{2xZ'\frac{\partial z}{\partial \varphi}}{Z}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}=-\frac{C^2\{Z^2(1+Z'^2)-x^2\}-x^2Z^2Z'^2}{Z^2(C^2-Z^2)}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2,$$

oder, wenn man auf bekannte Weise die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens zu einem vollkommenen Quadrate ergänzt, nach einigen leichten Transformationen auf die Form:

$$39)\quad \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}-\frac{xZ'}{Z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}{x^2-Z^2}=\frac{C^2(1+Z'^2)}{Z^2(C^2-Z^2)}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

bringt, welche Gleichung also für alle Rotationsflächen gilt.

Setzt man nun aber

$$40)\quad x=Zv,$$

so ist:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=Z\frac{\partial v}{\partial \varphi}+v\frac{\partial Z}{\partial \varphi}=Z\frac{\partial v}{\partial \varphi}+v\frac{\partial Z}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}=Z\frac{\partial v}{\partial \varphi}+vZ'\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$

und

$$\frac{xZ'}{Z}=vZ';$$

also:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}-\frac{xZ'}{Z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}=Z\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad x^2-Z^2=Z^2(v^2-1);$$

folglich nach 39):

$$\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2}{v^2-1}=\frac{C^2(1+Z'^2)}{Z^2(C^2-Z^2)}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

oder:

$$\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right)^2}{1-v^2} = \frac{C^2(1+Z'^2)}{Z^2(Z^2-C^2)} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2.$$

Aus dieser Gleichung erhellet unmittelbar, dass $1-v^2$ und Z^2-C^2 immer gleiche Vorzeichen haben müssen. Weil

$$x^2 = Z^2 v^2, \quad Z^2 = x^2 + y^2$$

ist; so ist:

$$x^2 = (x^2+y^2)v^2, \quad v^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad 1-v^2 = \frac{y^2}{x^2+y^2};$$

also $1-v^2$, und daher nach dem Obigen auch Z^2-C^2 positiv. Folglich ist:

$$\frac{\frac{\partial v}{\partial \varphi}}{\sqrt{1-v^2}} = \pm \frac{C\sqrt{1+Z'^2}}{Z\sqrt{Z^2-C^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial \varphi},$$

also:

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \pm \frac{C\sqrt{1+Z'^2}}{Z\sqrt{Z^2-C^2}} \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi} : \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) = \pm \frac{C\sqrt{1+Z'^2}}{Z\sqrt{Z^2-C^2}} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}$$

oder:

$$41) \quad \ldots \quad \frac{\partial v}{\sqrt{1-v^2}} = \pm \frac{C\sqrt{1+Z'^2}}{Z\sqrt{Z^2-C^2}} \partial z,$$

in welcher Gleichung, weil Z und Z' Functionen von z allein sind, die veränderlichen Grössen gesondert sind, die Integration dieser Gleichung also auf blosse Quadraturen zurückgeführt ist.

Auf die Form 41) hat Euler die Gleichung gebracht in der Methodus inveniendi lineas Maximi Minimive proprietate gaudentes. Lausannae et Genevae. 1744. pag. 141.

§. 8.

Für Rotationsflächen kann man auch setzen:

$$42) \quad \ldots \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = f(r);$$

also:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi}=\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}-r\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi}=\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}+r\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi}=\frac{\partial z}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial \varphi}=f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial \varphi};$$

folglich:

$$x\frac{\partial y}{\partial \varphi}-y\frac{\partial x}{\partial \varphi}=r^2$$

und:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=r^2+\{1+[f'(r)]^2\}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2;$$

also nach 37):

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2+\{1+[f'(r)]^2\}\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2}}=C,$$

woraus man, wenn man auf beiden Seiten quadrirt, nach einigen Reductionen leicht die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2=\frac{r^2}{C^2}\cdot\frac{r^2-C^2}{1+\{f'(r)\}^2},$$

oder:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2=\frac{C^2}{r^2}\cdot\frac{1+\{f'(r)\}^2}{r^2-C^2},$$

also:

$$43)\quad \ldots\ldots\quad \frac{\partial \varphi}{\partial r}=\pm\frac{C}{r}\sqrt{\frac{1+\{f'(r)\}^2}{r^2-C^2}},$$

oder:

$$44)\quad \ldots\ldots\quad \partial\varphi=\pm\frac{C\partial r}{r}\sqrt{\frac{1+\{f'(r)\}^2}{r^2-C^2}}$$

erhält, wo wieder die veränderlichen Grössen gesondert sind.

§. 9.

Endlich kann man über den Fall der Rotations-Flächen auch noch das Folgende bemerken.

Man setze:

$$45)\quad \ldots\quad z=f(x^2+y^2)\ \text{ oder }\ z-f(x^2+y^2)=0,$$

also:

$$u = z - f(x^2 + y^2),$$

und folglich:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial x} = -\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial f(x^2+y^2)}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial y};$$

aber:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'(x^2+y^2), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yf'(x^2+y^2);$$

also:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2xf'(x^2+y^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2yf'(x^2+y^2).$$

Nun ist aber nach 18):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = 0,$$

also nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$46) \quad \ldots \ldots \quad x\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - y\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = 0$$

oder:

$$\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}\right) - \left(y\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0,$$

folglich:

$$\frac{\partial \, . \, x\frac{\partial y}{\partial s}}{\partial s} - \frac{\partial \, . \, y\frac{\partial x}{\partial s}}{\partial s} = 0$$

oder:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(x\frac{\partial y}{\partial s} - y\frac{\partial x}{\partial s}\right) = 0,$$

also, wenn C wieder eine gewisse Constante bezeichnet:

$$47) \quad \ldots \ldots \quad x\frac{\partial y}{\partial s} - y\frac{\partial x}{\partial s} = C.$$

§. 10.

Wir wollen jetzt das allgemeine dreiaxige Ellipsoid, dessen Gleichung

$$48) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{z}}{c}\right)^2=1$$

ist, besonders betrachten.

In diesem Falle müssen wir also

$$49) \quad \ldots\ldots \quad u=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2-1$$

setzen; auch soll im Folgenden, was bekanntlich verstattet ist:

$$50) \quad x=a\cos\varphi\cos\psi, \quad y=b\sin\varphi\cos\psi, \quad z=c\sin\psi$$

gesetzt werden.

Hieraus ergiebt sich sogleich:

$$51) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{2x}{a^2}=\dfrac{2\cos\varphi\cos\psi}{a}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{2y}{b^2}=\dfrac{2\sin\varphi\cos\psi}{b}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{2z}{c^2}=\dfrac{2\sin\psi}{c}; \end{cases}$$

und:

$$52) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{2}{a^2}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\dfrac{2}{b^2}, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\dfrac{2}{c^2}; \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=0, \quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}=0. \end{cases}$$

Aus 51) folgt unmittelbar:

$$53) \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2=4\left\{\left(\dfrac{x}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{b^2}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c^2}\right)^2\right\} \\ =4\left\{\left(\dfrac{\cos\varphi\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\varphi\cos\psi}{b}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}. \end{cases}$$

Ferner ist:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{8z^2}{a^2c^4}=\frac{8\sin\psi^2}{a^2c^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{8z^2}{b^2c^4}=\frac{8\sin\psi^2}{b^2c^2};$$

und:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}:\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=\frac{8x^2}{a^4c^2}=\frac{8\cos\varphi^2\cos\psi^2}{a^2c^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}:\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{8xy}{a^2b^2c^2}=\frac{8\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi^2}{abc^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}:\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-2\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$=\frac{8y^2}{b^4c^2}=\frac{8\sin\varphi^2\cos\psi^2}{b^2c^2};$$

also:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^4\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}:\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$=\frac{8}{a^2c^2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}=\frac{8}{a^2c^2}\left\{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{8}{a^2c^2}(\cos\varphi^2\cos\psi^2+\sin\psi^2)=\frac{8}{a^2c^2}(1-\sin\varphi^2\cos\psi^2),$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}:\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\right]$$

$$=\frac{8xy}{a^2b^2c^2}=\frac{8\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi^2}{abc^2},$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial u}{\partial z}:\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$=\frac{8}{b^2c^2}\left\{\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}=\frac{8}{b^2c^2}\left\{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{8}{b^2c^2}(\sin\varphi^2\cos\psi^2+\sin\psi^2)=\frac{8}{b^2c^2}(1-\cos\varphi^2\cos\psi^2).$$

Folglich wird im vorliegenden Falle die Gleichung 31), wenn man das dortige $\varphi=x$ setzt:

54)

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{z}{c}\right)^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\\ +\left(\frac{y}{b^2}-\frac{x}{a^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left\{\frac{1}{a^2}\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]+\frac{2xy}{a^2b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{b^2}\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\end{array}\right\}=0$$

oder:

55)

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{z}{c}\right)^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\\ +\left(\frac{y}{b^2}-\frac{x}{a^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{a^2b^2}\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right\}\end{array}\right\}=0,$$

wozu natürlich noch die Gleichung

$$56) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

kommt.

Zu einer anderen Gleichung, welche als das erste Integral der vorstehenden Gleichung 55) zu betrachten ist, führt die Gleichung 29). Setzt man nämlich das dortige $\varphi = x$, so ist nach 51):

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{2}{a^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{2}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{2}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x};$$

also:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

$$=2\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\};$$

folglich nach 29):

57)

$$\frac{\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right\}}{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}=C,$$

wo statt $\frac{1}{8}C$ in 29) hier C geschrieben worden ist. Zu dieser Gleichung kommen natürlich noch die beiden Gleichungen:

$$58)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1,\quad \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0;$$

deren zweite sich aus der bekannten allgemeinen Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0$$

unmittelbar ergiebt.

Nach 50) ist nun aber auch:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-a(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}),$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=b(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}),$$
$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=c\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi};$$

also, wie man leicht mittelst 51) findet:

$$\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}$$

$$=-2\cos\psi\{\cos\psi\left(\frac{a}{b}\sin\varphi^2+\frac{b}{a}\cos\varphi^2\right)+\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\}.$$

Ferner ist:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}$$

$$=-a\{\cos\varphi\cos\psi-2\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\cos\varphi\cos\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}$$

$$=-b\{\sin\varphi\cos\psi+2\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+\sin\varphi\cos\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\};$$

also, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}=ab\{\cos\psi^2+(1+\sin\psi^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\sin\psi\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\}.$$

Es ist aber:

$$(1-\sin\varphi^2\cos\psi^2)(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})^2$$

$$-2\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi^2(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})$$

$$+(1-\cos\varphi^2\cos\psi^2)(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})^2$$

$$=(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})^2+(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})^2$$

$$-\cos\psi^2\{\sin\varphi(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})+\cos\varphi(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})\}^2$$

$$=\cos\psi^2+\sin\psi^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2-\cos\psi^4=\sin\psi^2\{\cos\psi^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\},$$

und wir haben also, wie man leicht findet, nach 31) die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{b}{a}\cos\varphi^2\cos\psi^2+\frac{a}{b}\sin\varphi^2\cos\psi^2+\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\sin\psi^2\right)$$

$$\times\{\cos\psi^2+(1+\sin\psi^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\sin\psi\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\}$$

$$-\cos\psi\{\cos\psi\left(\frac{a}{b}\sin\varphi^2+\frac{b}{a}\cos\varphi^2\right)+\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\}$$

$$\times\{\cos\psi^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\}=0$$

oder:

59)

$$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\sin\psi\cos\psi^2-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi^3\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

$$+\sin\psi\left\{\left(\frac{a}{b}\sin\varphi^2+\frac{b}{a}\cos\varphi^2\right)\cos\psi^2+\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}(1+\sin\psi^2)\right\}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^3$$

$$+\cos\psi\left\{\left(\frac{a}{b}\sin\varphi^2+\frac{b}{a}\cos\varphi^2\right)\cos\psi^2+\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\sin\psi^2\right\}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=0.$$

Für das Rotations-Ellipsoid ist, wenn die Drehungsaxe die Axe der z ist, $a=b$; also nach 59):

60)

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2\sin\psi\cos\psi^2+\sin\psi\{\cos\psi^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\cdot(1+\sin\psi^2)\}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$+\cos\psi\{\cos\psi^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\cdot\sin\psi^2\}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=0$$

oder:

$$61) \quad \ldots \quad \cos\psi^2\{\sin\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\}$$

$$+\left(\frac{a}{c}\right)^2\sin\psi\{\cos\psi^2+(1+\sin\psi^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\sin\psi\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\}=0.$$

Setzt man:

$$62) \quad \ldots \quad \varepsilon^2=\left(\frac{a}{c}\right)^2-1=\frac{a^2-c^2}{c^2},$$

so ist:

$$\cos\psi^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2(1+\sin\psi^2)=2+\varepsilon^2(1+\sin\psi^2),$$

$$\cos\psi^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\sin\psi^2=1+\varepsilon^2\sin\psi^2;$$

also:

$$63) \quad \ldots \quad \sin\psi\cos\psi^2+2\sin\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

$$+\varepsilon^2\sin\psi\{\cos\psi^2+(1+\sin\psi^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\sin\psi\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\}=0.$$

Für die Kugel ist $\varepsilon=0$, also:

$$64) \quad \ldots \quad \sin\psi\cos\psi^2+2\sin\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=0.$$

Weil

$$\frac{\partial\sin\psi}{\partial\varphi}=\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},\quad \frac{\partial^2\sin\psi}{\partial\varphi^2}=-\sin\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2};$$

also

$$3\sin\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial^2\sin\psi}{\partial\varphi^2}=2\sin\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

ist, so ist für die Kugel auch:

$$\sin\psi\cos\psi^2+3\sin\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{\partial^2\sin\psi}{\partial\varphi^2}=0,$$

also:

$$65) \quad \sin\psi\cos\psi^4+3\sin\psi\left(\frac{\partial\sin\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos\psi^2\frac{\partial^2\sin\psi}{\partial\varphi^2}=0.$$

Es ist auch, wie man leicht findet:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=1:\frac{\partial\varphi}{\partial\psi},\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}=-\left\{\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}:\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^3\right\};$$

also für die Kugel nach 64):

$$66) \ldots \quad 2\sin\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}+\sin\psi\cos\psi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^3-\cos\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2}=0.$$

Leicht erhält man nach dem Obigen:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{2}{a^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-\frac{2}{a}(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}),$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{2}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{2}{b}(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}),$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{2}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{2}{c}\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi};$$

also:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}\\
&=2(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})^2\\
&\quad+2(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})^2\\
&\quad+2\cos\psi^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\\
&=2\left\{\cos\psi^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\right\},
\end{aligned}$$

und folglich nach 29):

$$67)\quad \frac{\left\{\left(\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi\cos\psi}{b}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}\left\{\cos\psi^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\right\}}{\left\{\begin{aligned}&a^2(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})^2\\&+b^2(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi})^2\\&+c^2\cos\psi^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\end{aligned}\right\}}=C,$$

wo statt $\frac{1}{8}C$ in 29) hier C geschrieben worden ist.

Für die Kugel, wenn nämlich $a=b=c$ ist, führen die Gleichungen 57) und 67) beide auf die Gleichung $Ca^4=1$.

§. 11.

Die Gleichung der Berührungsebene einer Fläche in dem Punkte (xyz) ist bekanntlich:

$$68) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z}-z)=0,$$

und die Gleichungen der Berührenden einer Curve in dem Punkte (xyz) sind:

$$69) \quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial z}{\partial \varphi}}\;{}^{*)}.$$

Die Gleichungen der durch den Anfang der Coordinaten mit der Berührenden in dem Punkte (xyz) parallel gelegten Geraden sind:

$$70) \quad \frac{\mathfrak{x}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{y}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}=\frac{\mathfrak{z}}{\frac{\partial z}{\partial \varphi}}.$$

Bezeichnen wir das von dem Anfange der Coordinaten auf die Berührungsebene in dem Punkte (xyz) gefällte Perpendikel durch P, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$71) \quad P^2=\frac{\left(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Ist nun die Fläche ein Ellipsoid, so ist nach dem vorhergehenden Paragraphen bekanntlich:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{a^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{b^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{c^2};$$

also:

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=2\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}=2,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2=4\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right);$$

folglich nach 71):

$$72) \quad P^{-2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2.$$

---

*) Archiv. Thl. XXX. S. 425. Nr. 61) und S. 367. Nr. 3).

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt der durch den Anfang der Coordinaten oder den Mittelpunkt des Ellipsoids parallel mit der Berührenden der Kürzesten in dem Punkte (xyz) gelegten Geraden mit dem Ellipsoid durch (XYZ); so hat man zur Bestimmung der Coordinaten X, Y, Z die folgenden Gleichungen:

$$\frac{X}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}=\frac{Y}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}=\frac{Z}{\frac{\partial z}{\partial \varphi}}=G,\quad \left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2+\left(\frac{Z}{c}\right)^2=1:$$

aus denen sich leicht:

$$73)\ \ldots\ G=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}},$$

also:

$$74)\ \ldots\ \begin{cases} X=\pm\dfrac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}}, \\ Y=\pm\dfrac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}}, \\ Z=\pm\dfrac{\frac{\partial z}{\partial \varphi}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}} \end{cases}$$

ergiebt. Bezeichnen wir nun ferner den nach dem Punkte (XYZ) gezogenen Halbmesser des Ellipsoids durch R, so ist

$$R=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

also:

$$75)\ \ldots\ R=\sqrt{\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}},$$

oder:

$$76)\ \ldots\ R^{-2}=\frac{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}.$$

Bekanntlich ist aber

$$\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2,$$

also nach 76):

$$R^{-2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}:\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}:\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}:\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2,$$

folglich:

$$77) \quad \ldots \quad R^{-2}=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2.$$

Weil bei dem Ellipsoid:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2}{b^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2}{c^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}=0$$

ist; so hat man die beiden folgenden Gleichungen *):

$$\frac{x}{a^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi}=0,$$

$$\frac{x}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2}+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2}+\frac{z}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2=0;$$

oder, wenn man s für φ setzt:

$$\frac{x}{a^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{z}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}=0,$$

$$\frac{x}{a^2}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{y}{b^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{z}{c^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}+\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2=0.$$

Für die Kürzeste kann man aber nach 18) oder 20), wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}=G'\frac{\partial u}{\partial x}=2G'\frac{x}{a^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}=G'\frac{\partial u}{\partial y}=2G'\frac{y}{b^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=G'\frac{\partial u}{\partial z}=2G'\frac{z}{c^2}$$

---

*) Archiv. Thl. XXX. S. 418.

setzen, und es ist folglich nach der oben stehenden Gleichung und nach 72) und 77):

$$2G'P^{-2}+R^{-2}=0,$$

woraus:

78) . . . . $2G'=-\frac{P^2}{R^2}$

folgt.

Bezeichnen wir den Krümmungshalbmesser der Kürzesten in dem Punkte (xyz) durch $\mathfrak{R}$, so ist bekanntlich *):

$$\mathfrak{R}^2=\frac{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right\}^3}{\left\{\begin{array}{c}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2\right\}\\-\left(\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2\end{array}\right\}},$$

oder, weil

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2=\left(\frac{\partial s}{\partial s}\right)^2=1$$

ist:

$$\mathfrak{R}^2=\frac{1}{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2-\left(\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber:

$$\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}+\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}+\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}=G'\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right)=0$$

und

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2=4G'^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}$$
$$=4G'^2P^{-2},$$

also nach dem Obigen:

$$\mathfrak{R}^2=\frac{1}{4G'^2P^{-2}}=\frac{P^2}{4G'^2},$$

und folglich:

79) . . . . $4G'^2=\frac{P^2}{\mathfrak{R}^2}.$

---

*) Archiv. Thl. XXX. S. 401. Nr. 41).

Vergleicht man nun die Gleichungen 78) und 79) mit einander, so erhält man:

$$80) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad R^2 = P\mathfrak{R}$$

oder die stetige Proportion:

$$81) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad P:R = R:\mathfrak{R}.$$

Weil

$$\frac{\partial . P^{-2}}{\partial s} = -2P^{-3}\frac{\partial P}{\partial s}, \quad \frac{\partial . R^{-2}}{\partial s} = -2R^{-3}\frac{\partial R}{\partial s}$$

ist, so ist nach 72) und 77):

$$-P^{-3}\frac{\partial P}{\partial s} = \frac{x}{a^4}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y}{b^4}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{z}{c^4}\cdot\frac{\partial z}{\partial s},$$

$$-R^{-3}\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{1}{b^2}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{1}{c^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial s^2};$$

also nach dem Obigen:

$$-R^{-3}\frac{\partial R}{\partial s} = 2G'\left(\frac{x}{a^4}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y}{b^4}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{z}{c^4}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right),$$

und folglich nach 78):

$$R^{-3}\frac{\partial R}{\partial s} = \frac{P^2}{R^2}\left(\frac{x}{a^4}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y}{b^4}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{z}{c^4}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right).$$

Daher haben wir die beiden folgenden Gleichungen:

$$P^{-1}\frac{\partial P}{\partial s} = -P^2\left(\frac{x}{a^4}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y}{b^4}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{z}{c^4}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right),$$

$$R^{-1}\frac{\partial R}{\partial s} = \quad P^2\left(\frac{x}{a^4}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{y}{b^4}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{z}{c^4}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}\right);$$

aus denen durch Addition die Gleichung:

$$P^{-1}\frac{\partial P}{\partial s} + R^{-1}\frac{\partial R}{\partial s} = 0$$

oder

$$R\frac{\partial P}{\partial s} + P\frac{\partial R}{\partial s} = 0,$$

also

$$\frac{\partial . PR}{\partial s} = 0,$$

und folglich, wenn C eine gewisse Constante bezeichnet, die merkwürdige Gleichung:

$$82) \quad PR = C$$

folgt.

Weil nach 72) und 77):

$$P = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2}}$$

ist, so ist nach 82):

$$83) \quad \sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2} = \frac{1}{C} = C'$$

oder:

$$84) \quad \left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\} \left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2\right\} = C'^2.$$

Weil nach 80)

$$\mathfrak{R} = \frac{R^2}{P}$$

ist, so ist nach 82):

$$85) \quad \mathfrak{R} = \frac{C^2}{P^3}, \quad P^3\mathfrak{R} = C^2.$$

Wenn $\overline{A_1 A_2 A_3}$ ein auf der Oberfläche des Ellipsoids von Kürzesten eingeschlossenes Dreieck ist, die von dem Mittelpunkte des Ellipsoids auf dessen Berührungsebenen in A_1, A_2, A_3 gefällten Perpendikel respective durch P_1, P_2, P_3, und die Krümmungshalbmesser

in A_1	von	A_1A_2 A_3A_1	durch	$\mathfrak{R}_{12}$, $\mathfrak{R}_{13}$,
„ A_2	„	A_2A_3 A_1A_2	„	$\mathfrak{R}_{23}$, $\mathfrak{R}_{21}$,
„ A_3	„	A_{31} A_{23}	„	$\mathfrak{R}_{31}$ $\mathfrak{R}_{32}$

bezeichnet werden, so ist nach 85):

$$\mathfrak{K}_{12}=\frac{C_{12}{}^2}{P_1{}^3},\quad \mathfrak{K}_{13}=\frac{C_{31}{}^2}{P_1{}^3};$$

$$\mathfrak{K}_{23}=\frac{C_{23}{}^2}{P_2{}^3},\quad \mathfrak{K}_{21}=\frac{C_{12}{}^2}{P_2{}^3};$$

$$\mathfrak{K}_{31}=\frac{C_{31}{}^2}{P_3{}^3},\quad \mathfrak{K}_{32}=\frac{C_{23}{}^2}{P_3{}^3};$$

also offenbar:

$$86)\ \ldots\ldots\ \mathfrak{K}_{12}\mathfrak{K}_{23}\mathfrak{K}_{31}=\mathfrak{K}_{13}\mathfrak{K}_{21}\mathfrak{K}_{32}.$$

Wenn man die Gleichung 84) mit $\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2$ oder $\left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2$ multiplicirt, so erhält man die Gleichungen:

87)

$$\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}$$
$$=C'^2\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}\left\{\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2\right\}$$
$$=C'^2\left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2.$$

§. 12.

Wir wollen nun wieder setzen:

$$88)\ \ldots\ x=a\cos\varphi\cos\psi,\quad y=b\sin\varphi\cos\psi,\quad z=c\sin\psi;$$

also:

$$89)\ \ldots\ \begin{cases}\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-a\left(\sin\varphi\cos\psi+\cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right),\\[2mm] \frac{\partial y}{\partial\varphi}=\quad b\left(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right),\\[2mm] \frac{\partial z}{\partial\varphi}=\quad c\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\end{cases}$$

und:

$$90)\ \ldots\ \begin{cases}\frac{\partial x}{\partial\psi}=-a\left(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right),\\[2mm] \frac{\partial y}{\partial\psi}=-b\left(\sin\varphi\sin\psi-\cos\varphi\cos\psi\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right),\\[2mm] \frac{\partial z}{\partial\psi}=\quad c\cos\psi;\end{cases}$$

folglich:

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2=\left(\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi\cos\psi}{b}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2$$

und, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=\cos\psi^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial x}{\partial\psi}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{\partial y}{\partial\psi}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial z}{\partial\psi}\right)^2=1+\cos\psi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2.$$

Also haben wir nach 87) die beiden folgenden Gleichungen:

91)

$$\left\{\left(\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi\cos\psi}{b}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}\left\{\cos\psi^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\right\}$$
$$=C'^2\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$\left\{\left(\frac{\cos\varphi\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\varphi\cos\psi}{b}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}\left\{1+\cos\psi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2\right\}$$
$$=C'^2\left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2.$$

Die erste dieser beiden Gleichungen stimmt mit der Gleichung 67) ganz überein.

Für das Rotations-Ellipsoid, wenn die Drehungsaxe als Axe der z angenommen und folglich $a=b$ gesetzt wird, werden diese beiden Gleichungen:

92)

$$\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}\left\{\cos\psi^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\right\}=C'^2\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2,$$

$$\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}\left\{1+\cos\psi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2\right\}=C'^2\left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2.$$

Nach 47) ist für das Rotations-Ellipsoid, wenn C eine Constante bezeichnet, die natürlich nicht mit der im vorhergehenden Paragraphen eben so bezeichneten Constante verwechselt werden darf:

$$x\frac{\partial y}{\partial s}-y\frac{\partial x}{\partial s}=C,$$

also, wenn man auf beiden Seiten mit $\frac{\partial s}{\partial\varphi}$ multiplicirt:

$$x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}=C\frac{\partial s}{\partial\varphi};$$

aus 88) und 89) ergiebt sich aber leicht allgemein:

$$x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}=ab\cos\psi^2,$$

also für das Rotations-Ellipsoid:

$$x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi}=a^2\cos\psi^2,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$93)\quad . \quad . \quad C\frac{\partial s}{\partial\varphi}=a^2\cos\psi^2,\quad C\frac{\partial s}{\partial\psi}=a^2\cos\psi^2\frac{\partial\varphi}{\partial\psi};$$

also:

$$94)\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=\frac{C}{a^2\cos\psi^2}\cdot\frac{\partial s}{\partial\psi}.$$

Wegen der zweiten der Gleichungen 92) ist folglich:

$$\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\left\{1+\frac{C^2}{a^4}\sec\psi^2\left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2\right\}=C'^2\left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2,$$

$$\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}\left\{1+\cos\psi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2\right\}=a^4\frac{C'^2}{C^2}\cos\psi^4\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2;$$

also:

95)

$$\left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2=\frac{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2}{C'^2-\frac{C^2}{a^4}\sec\psi^2\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}},$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2=\frac{\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}\sec\psi^2}{a^4\frac{C'^2}{C^2}\cos\psi^2-\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}}.$$

Einfachere Formeln erhält man auf folgende Art. Nach 93) ist:

$$a^4\cos\psi^4=C^2\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2,$$

und nach 89) ist für das Rotations-Ellipsoid:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=a^2\cos\psi^2+(a^2\sin\psi^2+c^2\cos\psi^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2,$$

also:

$$a^4\cos\psi^4 = C^2\{a^2\cos\psi^2 + (a^2\sin\psi^2 + c^2\cos\psi^2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2\}$$

und folglich:

$$a^4\cos\psi^4\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2 = C^2\{a^2\sin\psi^2 + c^2\cos\psi^2 + a^2\cos\psi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2\}$$

oder:

$$\frac{a^2}{C^2}\cos\psi^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\left(\frac{a^2}{c^2}\operatorname{tang}\psi^2 + 1\right) + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2,$$

woraus sogleich:

$$96) \quad \ldots\ldots \quad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\frac{a^2}{c^2}\operatorname{tang}\psi^2 + 1}{\frac{a^2}{C^2}\cos\psi^2 - 1}$$

folgt. Verbindet man diese Gleichung mit der zweiten der Gleichungen 93), so erhält man:

$$97) \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2 = \frac{a^2c^2}{C^2}\cos\psi^4\frac{\frac{a^2}{c^2}\operatorname{tang}\psi^2 + 1}{\frac{a^2}{C^2}\cos\psi^2 - 1},$$

oder:

$$98) \quad \ldots \quad \left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2 = c^2\frac{\frac{a^2}{C^2}\cos\psi^4\left(\frac{a^2}{c^2}\operatorname{tang}\psi^2 + 1\right)}{\frac{a^2}{C^2}\cos\psi^2 - 1}.$$

Mit diesen Formeln wollen wir die Formeln 95) vergleichen, um zugleich ein Kriterium für die Richtigkeit unserer Rechnungen zu haben.

Es ist, wie man sogleich übersieht:

$$a^4\frac{C'^2}{C^2}\cos\psi^2 - \left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\} = \left(a^4\frac{C'^2}{C^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\cos\psi^2 - \frac{1}{c^2}$$

und

$$\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}\sec\psi^2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2}{c^2}\operatorname{tang}\psi^2 + 1\right),$$

also nach der zweiten der Gleichungen 95) offenbar:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\frac{a^2}{c^2}\operatorname{tang}\psi^2 + 1}{c^2\left(a^4\frac{C'^2}{C^2} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\cos\psi^2 - 1},$$

welche Gleichung, mit der Gleichung 96) verglichen, zu der Relation

$$c^2\left(a^4\frac{C'^2}{C^2}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{a^2}{C^2},$$

also:

$$99) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad a^4C'^2=\frac{a^2}{c^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)C^2$$

führt.

Nach der ersten der Gleichungen 95) ist:

$$\left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2=\frac{a^4\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}}{a^4C'^2-C^2\sec\psi^2\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}},$$

also nach 99):

$$\left(\frac{\partial s}{\partial\psi}\right)^2=\frac{a^4\left\{\left(\frac{\cos\psi}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\psi}{c}\right)^2\right\}}{\frac{a^2}{c^2}+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)C^2-C^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{\operatorname{tang}\psi^2}{c^2}\right)}$$

$$=\frac{a^2\cos\psi^2\left(\frac{a^2}{c^2}\operatorname{tang}\psi^2+1\right)}{\frac{a^2}{c^2}-\frac{C^2}{c^2}\sec\psi^2}$$

$$=c^2\frac{\frac{a^2}{C^2}\cos\psi^4\left(\frac{a^2}{c^2}\operatorname{tang}\psi^2+1\right)}{\frac{a^2}{C^2}\cos\psi^2-1},$$

was ganz mit der Formel 98) übereinstimmt.

§. 13.

Die Gleichung der Berührungsebene der Fläche in dem Punkte (xyz) ist bekanntlich:

$$100) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial u}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial u}{\partial z}(\mathfrak{z}-z)=0.$$

Die Gleichungen einer beliebigen durch den Punkt (xyz) gelegten Geraden seien:

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\xi}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\eta}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\zeta}.$$

Soll diese Gerade in der Berührungsebene liegen, so muss

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\xi+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\eta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\zeta=0$$

sein. Wenn aber ausserdem diese Gerade die Axe der $\mathfrak{z}$ schneiden soll, so muss gleichzeitig $\mathfrak{x}=0$, $\mathfrak{y}=0$ sein, was nach dem Vorhergehenden unmittelbar zu der Gleichung:

$$-\frac{x}{\cos\xi}=-\frac{y}{\cos\eta},\quad \frac{x}{\cos\xi}=\frac{y}{\cos\eta}$$

oder: $y\cos\xi-x\cos\eta=0$ führt. Also ist, wenn G einen gewissen Factor bezeichnet:

101)

$$\cos\xi=Gx\frac{\partial u}{\partial z},\quad \cos\eta=Gy\frac{\partial u}{\partial z},\quad \cos\zeta=-G(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y});$$

folglich, weil $\cos\xi^2+\cos\eta^2+\cos\zeta^2=1$ ist:

$$102)\ \ldots\ G=\pm\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y})^2}},$$

oder, wie man leicht findet:

103)

$$G=\pm\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-(x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x})^2}};$$

also:

104)

$$\cos\xi=\pm\frac{x\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-(x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x})^2}},$$

$$\cos\eta=\pm\frac{y\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-(x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x})^2}},$$

$$\cos\zeta=\mp\frac{x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}}{\sqrt{(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\}-(x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x})^2}}.$$

Liegt nun auf der Fläche eine beliebige Curve, so sind die Gleichungen der Berührenden dieser Curve in dem Punkte (xyz), wenn φ, wie gewöhnlich bei solchen allgemeinen Betrachtungen,

eine beliebige veränderliche Grösse bezeichnet, von welcher x, y, z abhängig gedacht werden:

$$105) \quad \ldots\ldots \frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{\partial x}{\partial \varphi}} = \frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}} = \frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{\partial z}{\partial \varphi}},$$

und es ist bekanntlich:

$$106) \quad \ldots\ldots \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche eine der beiden Richtungen dieser Berührenden mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen einschliesst, durch ξ', η', ζ'; so ist, wenn G' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$107) \ldots \cos\xi' = G'\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \quad \cos\eta' = G'\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \quad \cos\zeta' = G'\frac{\partial z}{\partial \varphi};$$

also, weil $\cos\xi'^2 + \cos\eta'^2 + \cos\zeta'^2 = 1$ ist:

$$108) \ldots\ldots G' = \pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}},$$

und folglich:

$$109) \ldots \left\{ \begin{aligned} \cos\xi' &= \pm\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}}, \\ \cos\eta' &= \pm\frac{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}}, \\ \cos\zeta' &= \pm\frac{\frac{\partial z}{\partial \varphi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}}. \end{aligned} \right.$$

Wenn nun ω den 180° nicht übersteigenden Winkel bezeichnet, welche die durch die Winkel ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' bestimmten Richtungen der beiden vorher betrachteten Geraden mit ein ander einschliessen, so ist bekanntlich:

$$\cos\omega = \cos\xi\cos\xi' + \cos\eta\cos\eta' + \cos\zeta\cos\zeta',$$

also nach 101) und 107):

$$\cos\omega = GG'\left\{\left(x\frac{\partial x}{\partial \varphi} + y\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)\frac{\partial u}{\partial z} - \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right\}$$

oder:

$$\cos\omega = GG'\{(x\frac{\partial x}{\partial\varphi}+y\frac{\partial y}{\partial\varphi}+z\frac{\partial z}{\partial\varphi})\frac{\partial u}{\partial z}-(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial z}{\partial\varphi}\};$$

also nach 103) und 108):

110) . . . . $\cos\omega$

$$=\pm\frac{(x\frac{\partial x}{\partial\varphi}+y\frac{\partial y}{\partial\varphi}+z\frac{\partial z}{\partial\varphi})\frac{\partial u}{\partial z}-(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial z}{\partial\varphi}}{\sqrt{\left\{\begin{array}{c}\{(\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2+(\frac{\partial y}{\partial\varphi})^2+(\frac{\partial z}{\partial\varphi})^2\}\\ \times\{(x^2+y^2)[(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2+(\frac{\partial u}{\partial z})^2]-(x\frac{\partial u}{\partial y}-y\frac{\partial u}{\partial x})^2\}\end{array}\right\}}}.$$

Es ist aber auch:

$$\begin{aligned}\sin\omega^2 &= 1-(\cos\xi\cos\xi'+\cos\eta\cos\eta'+\cos\zeta\cos\zeta')^2\\ &= (\cos\xi^2+\cos\eta^2+\cos\zeta^2)(\cos\xi'^2+\cos\eta'^2+\cos\zeta'^2)\\ &\quad -(\cos\xi\cos\xi'+\cos\eta\cos\eta'+\cos\zeta\cos\zeta')^2,\end{aligned}$$

also nach einer bekannten arithmetischen Transformation:

$$\begin{aligned}\sin\omega^2 = &\ (\cos\xi\cos\eta'-\cos\eta\cos\xi')^2\\ &+(\cos\eta\cos\zeta'-\cos\zeta\cos\eta')^2\\ &+(\cos\zeta\cos\xi'-\cos\xi\cos\zeta')^2,\end{aligned}$$

und folglich nach 101) und 107):

$$\sin\omega^2 = G^2G'^2\left\{\begin{array}{c}(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2(\frac{\partial u}{\partial z})^2\\ +[y\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}+(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial y}{\partial\varphi}]^2\\ +[x\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}+(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y})\frac{\partial x}{\partial\varphi}]^2\end{array}\right\}$$

oder:

$$\sin\omega^2 = G^2G'^2\left\{\begin{array}{c}(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2(\frac{\partial u}{\partial z})^2\\ +[(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial y}{\partial\varphi}+(y\frac{\partial z}{\partial\varphi}-z\frac{\partial y}{\partial\varphi})\frac{\partial u}{\partial z}]^2\\ +[(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial x}{\partial\varphi}+(x\frac{\partial z}{\partial\varphi}-z\frac{\partial x}{\partial\varphi})\frac{\partial u}{\partial z}]^2\end{array}\right\}.$$

Nach 106) ist: $\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\varphi}$, also offenbar:

$$\begin{aligned}(y\frac{\partial z}{\partial\varphi}-z\frac{\partial y}{\partial\varphi})\frac{\partial u}{\partial z} &= (x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi})\frac{\partial u}{\partial x}-(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial y}{\partial\varphi},\\ (x\frac{\partial z}{\partial\varphi}-z\frac{\partial x}{\partial\varphi})\frac{\partial u}{\partial z} &= -(x\frac{\partial y}{\partial\varphi}-y\frac{\partial x}{\partial\varphi})\frac{\partial u}{\partial y}-(x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z})\frac{\partial x}{\partial\varphi};\end{aligned}$$

folglich nach dem Vorhergehenden, wie man sogleich übersieht:

$$\sin\omega^2 = G^2G'^2(x\frac{\partial y}{\partial\varphi} - y\frac{\partial x}{\partial\varphi})^2\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\},$$

also nach 103) und 108):

111) . . . . $\sin\omega =$

$$\pm\frac{(x\frac{\partial y}{\partial\varphi} - y\frac{\partial x}{\partial\varphi})\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}}{\sqrt{\begin{array}{c}\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\} \\ \times\left\{(x^2+y^2)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] - (x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x})^2\right\}\end{array}}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grösse

$$x\frac{\partial y}{\partial\varphi} - y\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$

positiv oder negativ ist, weil ω zwischen 0 und 180° liegt.

Für Rotationsflächen ist nach §. 9.:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -2xf'(x^2+y^2), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2yf'(x^2+y^2);$$

also:

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

und folglich nach 111):

$$112)\quad \sin\omega = \pm\frac{x\frac{\partial y}{\partial\varphi} - y\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\sqrt{(x^2+y^2)\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2\right\}}}$$

oder:

$$113)\ .\ .\ .\ .\ .\quad \sin\omega = \pm\frac{x\frac{\partial y}{\partial\varphi} - y\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\sqrt{(x^2+y^2)\left(\frac{\partial s}{\partial\varphi}\right)^2}},$$

wo man immer das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grösse

$$x\frac{\partial y}{\partial\varphi} - y\frac{\partial x}{\partial\varphi}$$

positiv oder negativ ist.

Setzt man $\varphi = s$, so wird für Rotations-Flächen:

$$114) \quad \sin\omega = \pm \frac{x\frac{\partial y}{\partial s} - y\frac{\partial x}{\partial s}}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grösse

$$x\frac{\partial y}{\partial s} - y\frac{\partial x}{\partial s}$$

positiv oder negativ ist.

§. 14.

Das Vorhergehende wollen wir nun auf das Ellipsoid, insbesondere auf das Rotations-Ellipsoid, immer für die Axe der z als Drehungsaxe, anwenden.

Für das Ellipsoid überhaupt ist nach §. 11., wenn P seine bekannte Bedeutung hat:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 4\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\} = 4P^{-2}$$

und

$$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = -2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)xy,$$

also:

$$(x^2+y^2)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] - \left(x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$$

$$= \frac{4}{P^2}\left\{(x^2+y^2) - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 P^2x^2y^2\right\},$$

folglich nach 111):

$$115)$$

$$\sin\omega = \pm \frac{x\frac{\partial y}{\partial \varphi} - y\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2\right\}\left\{(x^2+y^2) - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 P^2x^2y^2\right\}}},$$

oder:

$$116) \quad \sin\omega = \pm \frac{x\frac{\partial y}{\partial \varphi} - y\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\sqrt{\left\{(x^2+y^2) - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 P^2x^2y^2\right\}\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2}},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem die Grösse

$$x\frac{\partial y}{\partial \varphi}-y\frac{\partial x}{\partial \varphi}$$

positiv oder negativ ist.

Setzt man nun aber:

$$117)\quad x=a\cos\varphi\cos\psi,\quad y=b\sin\varphi\cos\psi,\quad z=c\sin\psi;$$

so ist nach §. 12.

$$x\frac{\partial y}{\partial \varphi}-y\frac{\partial x}{\partial \varphi}=ab\cos\psi^2,$$

also:

$$118)\quad \sin\omega=\frac{ab\cos\psi^2}{\sqrt{\left\{(x^2+y^2)-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2P^2x^2y^2\right\}\left(\frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)^2}},$$

oder, wenn man den Bogen s, was offenbar verstattet ist, sich immer so genommen denkt, dass φ und s gleichzeitig zunehmen und abnehmen:

$$119)\ \ldots\ \sin\omega=\frac{ab\cos\psi^2}{\frac{\partial s}{\partial \varphi}\sqrt{(x^2+y^2)-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2P^2x^2y^2}}.$$

Für das Rotations-Ellipsoid, welches wir jetzt allein betrachten wollen, ist also:

$$120)\ \ldots\ldots\quad \sin\omega=\frac{a^2\cos\psi^2}{\frac{\partial s}{\partial \varphi}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Ist nun die auf dem Ellipsoid angenommene Curve eine Kürzeste, so ist bekanntlich nach 47):

$$x\frac{\partial y}{\partial s}-y\frac{\partial x}{\partial s}=C,\ \text{also:}\ x\frac{\partial y}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial \varphi}-y\frac{\partial x}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial \varphi}=C\frac{\partial s}{\partial \varphi},$$

folglich:

$$x\frac{\partial y}{\partial \varphi}-y\frac{\partial x}{\partial \varphi}=C\frac{\partial s}{\partial \varphi},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$121)\ \ldots\ldots\quad a^2\cos\psi^2=C\frac{\partial s}{\partial \varphi};$$

daher nach 120):

$$122)\ \ldots\ldots\quad \sin\omega=\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Es ist aber nach 117) für das Rotations-Ellipsoid:

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos\psi^2,$$

also, insofern bekanntlich ψ immer zwischen -90^0 und $+90^0$ genommen wird:

$$\sqrt{x^2+y^2} = a\cos\psi,$$

und folglich nach 122):

$$123) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a\cos\psi\sin\omega = C,$$

wobei wir bemerken wollen, dass die Constante C stets positiv ist, weil ψ zwischen -90^0 und $+90^0$, ω zwischen 0 und 180^0 liegt, so dass also $\cos\psi$ und $\sin\omega$ stets positive Grössen sind.

Aus der Gleichung 123) folgt

$$\cos\psi = \frac{C}{a\sin\omega}, \quad \operatorname{tang}\psi^2 = \frac{a^2}{C^2}\sin\omega^2 - 1;$$

also:

$$124) \quad \ldots\ldots \quad \operatorname{tang}\psi = \pm\sqrt{\frac{a^2}{C^2}\sin\omega^2 - 1},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem ψ positiv oder negativ ist. Durch Differentiation nach ω folgt aus der Gleichung 123):

$$\cos\psi\cos\omega - \sin\psi\sin\omega\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = 0,$$

also:

$$125) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{\partial\psi}{\partial\omega} = \cot\psi\cot\omega,$$

und daher nach 124):

$$126) \quad \ldots\ldots \quad \frac{\partial\psi}{\partial\omega} = \pm\frac{\cot\omega}{\sqrt{\frac{a^2}{C^2}\sin\omega^2 - 1}},$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem ψ positiv oder negativ ist.

Nach 96) und dem Vorhergehenden ist:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)^2 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{\frac{a^2}{c^2}\left(\frac{a^2}{C^2}\sin\omega^2 - 1\right) + 1}{\operatorname{cosec}\omega^2 - 1} \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega}\right)^2;$$

also, wenn man

$$127) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}$$

setzt, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)^2 = \frac{\frac{a^2}{C^2}\sin\omega^2 - e^2}{\cot\omega^2} \cdot \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)^2,$$

und folglich nach 126):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}\right)^2 = \frac{\frac{a^2}{C^2}\sin\omega^2 - e^2}{\frac{a^2}{C^2}\sin\omega^2 - 1} = \frac{1 - \frac{C^2}{a^2}e^2\operatorname{cosec}\omega^2}{1 - \frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\omega^2},$$

also:

$$128) \quad \ldots \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{C^2}{a^2}e^2\operatorname{cosec}\omega^2}{1 - \frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\omega^2}},$$

wo die Bestimmung wegen des Vorzeichens nachher gegeben werden wird.

Nach 121) und 123) ist:

$$\frac{\partial s}{\partial\varphi} = \frac{a^2\cos\psi^2}{C} = \frac{C}{\sin\omega^2},$$

also:

$$\frac{\partial s}{\partial\omega} = \frac{\partial s}{\partial\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \frac{C}{\sin\omega^2} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\omega},$$

und folglich nach 128):

$$129) \quad \ldots \quad \frac{\partial s}{\partial\omega} = \pm\frac{C}{\sin\omega^2}\sqrt{\frac{1 - \frac{C^2}{a^2}e^2\operatorname{cosec}\omega^2}{1 - \frac{C^2}{a^2}\operatorname{cosec}\omega^2}},$$

wo in den Formeln 128) und 129) die oberen und unteren Zeichen auf einander zu beziehen sind.

Wie nun aber in diesen beiden Formeln die Zeichen zu nehmen sind, kann auf folgende Art ermittelt werden, wozu jedoch noch die folgende Annahme nöthig ist. Wir wollen nämlich den zwischen 0 und 180° liegenden Winkel ω von jetzt an immer so nehmen, dass derselbe, von dem durch den Punkt $(\varphi\psi)$ gelegten Meridiane des Rotations-Ellipsoids an gerechnet, nach der Seite hin, nach welcher die Winkel φ von 0 bis 360° gezählt werden, und, von der Kürzesten an gerechnet, nach der Seite der positi-

ven ψ hin liegt; dann erhellet durch eine sehr einfache Betrachtung, dass $\partial\varphi$ und ∂s, welche nach dem Obigen bekanntlich immer gleiche Vorzeichen haben, mit $\partial\psi$ gleiches oder ungleiches Vorzeichen haben, jenachdem $\omega < 90^0$ oder $\omega > 90^0$ ist. Nach der Gleichung 125) ist $\frac{\partial\psi}{\partial\omega}$ positiv oder negativ, jenachdem $\cot\psi$ und $\cot\omega$ gleiche oder ungleiche Vorzeichen haben. Alles dieses vorausgesetzt, unterscheide man nun die folgenden Fälle:

I. ψ positiv, $\cot\psi$ positiv.

1. $\omega < 90^0$, $\cot\omega$ positiv; $\frac{\partial\psi}{\partial\omega}$ positiv; $\partial\psi$ und $\partial\omega$ haben gleiche Vorzeichen; $\partial\varphi$ und ∂s haben mit $\partial\psi$ gleiche Vorzeichen; $\partial\varphi$ und ∂s haben mit $\partial\omega$ gleiche Vorzeichen; $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ und $\frac{\partial s}{\partial\omega}$ sind positiv.

2. $\omega > 90^0$, $\cot\omega$ negativ; $\frac{\partial\psi}{\partial\omega}$ negativ; $\partial\psi$ und $\partial\omega$ haben ungleiche Vorzeichen; $\partial\varphi$ und ∂s haben mit $\partial\psi$ ungleiche Vorzeichen; $\partial\varphi$ und ∂s haben mit $\partial\omega$ gleiche Vorzeichen; $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ und $\frac{\partial s}{\partial\omega}$ sind positiv.

II. ψ negativ, $\cot\psi$ negativ.

1. $\omega < 90^0$, $\cot\omega$ positiv; $\frac{\partial\psi}{\partial\omega}$ negativ; $\partial\psi$ und $\partial\omega$ haben ungleiche Vorzeichen; $\partial\varphi$ und ∂s haben mit $\partial\psi$ gleiche Vorzeichen; $\partial\varphi$ und ∂s haben mit $\partial\omega$ ungleiche Vorzeichen; $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ und $\frac{\partial s}{\partial\omega}$ sind negativ.

2. $\omega > 90^0$, $\cot\omega$ negativ; $\frac{\partial\psi}{\partial\omega}$ positiv; $\partial\psi$ und $\partial\omega$ haben gleiche Vorzeichen; $\partial\varphi$ und ∂s haben mit $\partial\psi$ ungleiche Vorzeichen; $\partial\varphi$ und ∂s haben mit $\partial\omega$ ungleiche Vorzeichen; $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ und $\frac{\partial s}{\partial\omega}$ sind negativ.

Im Allgemeinen sind also $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ und $\frac{\partial s}{\partial\omega}$ positiv oder negativ, jenachdem ψ positiv oder negativ ist, und man hat also in den Formeln 128) und 129) die oberen oder unteren Vorzeichen zu nehmen, jenachdem ψ positiv oder negativ ist.

Nach 128), 126), 129) haben wir also die folgenden Formeln:

$$130) \ldots \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - e^2 \dfrac{C^2}{a^2} \operatorname{cosec} \omega^2}{1 - \dfrac{C^2}{a^2} \operatorname{cosec} \omega^2}}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\omega} = \pm \dfrac{\cot \omega}{\sqrt{\dfrac{a^2}{C^2} \sin \omega^2 - 1}}, \\ \dfrac{\partial s}{\partial\omega} = \pm \dfrac{C}{\sin \omega^2} \sqrt{\dfrac{1 - e^2 \dfrac{C^2}{a^2} \operatorname{cosec} \omega^2}{1 - \dfrac{C^2}{a^2} \operatorname{cosec} \omega^2}}; \end{cases}$$

wo stets die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem ψ positiv oder negativ ist; mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen kann man diese Formeln, weil C bekanntlich positiv ist, auch auf folgende Art schreiben:

$$131) \ldots \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \pm \sqrt{\dfrac{1 - e^2 \dfrac{C^2}{a^2} \operatorname{cosec} \omega^2}{1 - \dfrac{C^2}{a^2} \operatorname{cosec} \omega^2}}, \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial\omega} = \pm \dfrac{C \cos \omega}{a \sin \omega^2 \sqrt{1 - \dfrac{C^2}{a^2} \operatorname{cosec} \omega^2}}, \\ \dfrac{\partial s}{\partial\omega} = \pm \dfrac{C^2}{\sin \omega^2} \sqrt{\dfrac{1 - e^2 \dfrac{C^2}{a^2} \operatorname{cosec} \omega^2}{1 - \dfrac{C^2}{a^2} \operatorname{cosec} \omega^2}}. \end{cases}$$

Anmerkung.

Rücksichtlich der Gleichung 122) ist noch zu bemerken, dass dieselbe für Rotations-Flächen im Allgemeinen gilt, und auch zu einem bemerkenswerthen Satze von diesen Flächen überhaupt führt. Nach 114) ist nämlich für Rotations-Flächen überhaupt:

$$\sin \omega = \pm \frac{x \dfrac{\partial y}{\partial s} - y \dfrac{\partial x}{\partial s}}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

wenn man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse

$$x\frac{\partial y}{\partial s}-y\frac{\partial x}{\partial s}$$

positiv oder negativ ist. Ist nun aber die betrachtete Curve eine Kürzeste auf der Fläche, so ist nach 47):

$$x\frac{\partial y}{\partial s}-y\frac{\partial x}{\partial s}=C,$$

also:

$$\sin\omega=\pm\frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem C positiv oder negativ ist. Bezeichnen wir nun den Halbmesser des Parallelkreises der Fläche in dem Punkte der Kürzesten, welchem der Winkel ω entspricht, durch r, so ist offenbar $r=\sqrt{x^2+y^2}$, also nach dem Vorstehenden:

$$132) \quad \sin\omega=\pm\frac{C}{r}, \quad r\sin\omega=\pm C;$$

immer mit derselben Bestimmung wegen des Vorzeichens wie vorher. Sind nun überhaupt für zwei beliebige Punkte der Kürzesten r_0, ω_0 und r_1, ω_1 die Werthe von r, ω; so ist:

$$r_0\sin\omega_0=\pm C, \quad r_1\sin\omega_1=\pm C;$$

die oberen oder unteren Zeichen genommen, jenachdem C positiv oder negativ ist; also ist:

$$133) \quad r_0\sin\omega_0=r_1\sin\omega_1.$$

Wenn $\overline{A_0A_1A_2}$ ein von Kürzesten gebildetes Dreieck auf unserer Rotations-Fläche ist, so wollen wir die Halbmesser der Parallelkreise auf dieser Fläche in A_0, A_1, A_2 respective durch r_0, r_1, r_2 bezeichnen; ferner sollen die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Kürzeste $\overline{A_0A_1}$ mit den Meridianen in A_0, A_1 einschliesst, durch ω_{01}, ω_{10}; die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Kürzeste $\overline{A_1A_2}$ mit den Meridianen in A_1, A_2 einschliesst, durch ω_{12}, ω_{21}; die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die Kürzeste $\overline{A_2A_0}$ mit den Meridianen in A_2, A_0 einschliesst, durch ω_{20}, ω_{02} bezeichnet werden; dann ist nach 133):

$$r_0\sin\omega_{01}=r_1\sin\omega_{10},$$

$$r_1\sin\omega_{12}=r_2\sin\omega_{21},$$

$$r_2\sin\omega_{20}=r_0\sin\omega_{02};$$

welches durch Multiplication auf beiden Seiten zu der bemerkenswerthen, für alle Rotations-Flächen geltenden Gleichung:

$$134) \quad \sin\omega_{01}\sin\omega_{12}\sin\omega_{20} = \sin\omega_{10}\sin\omega_{21}\sin\omega_{02}$$

führt.

§. 15.

Wenn wir zwei zusammengehörende bestimmte, und insofern als constant zu betrachtende Werthe von ω, ψ durch ω_0, ψ_0 bezeichnen; so haben wir nach 123) die folgenden Gleichungen:

$$135) \quad a\sin\omega_0\cos\psi_0 = C, \quad a\sin\omega\cos\psi = C;$$

aus denen sich unmittelbar die Gleichung:

$$136) \quad \sin\omega_0\cos\psi_0 = \sin\omega\cos\psi$$

ergiebt.

Führt man für das bekanntlich positive C den Ausdruck

$$C = a\sin\omega_0\cos\psi_0$$

in die Gleichungen 130) ein, so werden dieselben:

137)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \pm\sqrt{\frac{\sin\omega^2 - e^2\sin\omega_0^2\cos\psi_0^2}{\sin\omega^2 - \sin\omega_0^2\cos\psi_0^2}},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial\omega} = \pm\frac{\sin\omega_0\cos\psi_0\cot\omega}{\sqrt{\sin\omega^2 - \sin\omega_0^2\cos\psi_0^2}},$$

$$\frac{\partial s}{\partial\omega} = \pm a\frac{\sin\omega_0\cos\psi_0}{\sin\omega^2}\sqrt{\frac{\sin\omega^2 - e^2\sin\omega_0^2\cos\psi_0^2}{\sin\omega^2 - \sin\omega_0^2\cos\psi_0^2}};$$

in denen man die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen hat, jenachdem ψ positiv oder negativ ist.

Wegen der Gleichung 136) ist aber:

$$\sin\omega^2 - \sin\omega_0^2\cos\psi_0^2$$

$$= \sin\omega_0^2\cos\psi_0^2\frac{1-\cos\psi^2}{\cos\psi^2} = \sin\omega_0^2\cos\psi_0^2\operatorname{tang}\psi^2,$$

also:

$$\sqrt{\sin\omega^2 - \sin\omega_0^2\cos\psi_0^2} = \pm\sin\omega_0\cos\psi_0\operatorname{tang}\psi,$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem ψ positiv oder negativ ist; ferner ist:

$$\sin\omega^2 - e^2\sin\omega_0{}^2\cos\psi_0{}^2 = \sin\omega_0{}^2\cos\psi_0{}^2\,\frac{1-e^2\cos\psi^2}{\cos\psi^2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\sin\omega^2 - e^2\sin\omega_0{}^2\cos\psi_0{}^2}{\sin\omega^2 - \sin\omega_0{}^2\cos\psi_0{}^2} = \frac{1-e^2\cos\psi^2}{\sin\psi^2},$$

also:

$$\sqrt{\frac{\sin\omega^2 - e^2\sin\omega_0{}^2\cos\psi_0{}^2}{\sin\omega^2 - \sin\omega_0{}^2\cos\psi_0{}^2}} = \pm\frac{\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}}{\sin\psi},$$

indem man das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem ψ positiv oder negativ ist. Daher hat man nach 137) die folgenden, gar keine Zweideutigkeit wegen des Zeichens lassenden Formeln:

$$138)\ \ldots \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \dfrac{\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}}{\sin\psi}, \\[2ex] \dfrac{\partial\psi}{\partial\omega} = \cot\omega\cot\psi, \\[2ex] \dfrac{\partial s}{\partial\omega} = a\,\dfrac{\sin\omega_0\cos\psi_0}{\sin\omega^2\sin\psi}\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}. \end{cases}$$

§. 16.

Die im Vorhergehenden entwickelten Formeln können durch Einführung gewisser Hülfsgrössen noch in einer sehr bemerkenswerthen Weise transformirt werden, welche wir jetzt entwickeln wollen, und zwar, ohne, wie es sonst zu geschehen pflegt*), uns an geometrische Betrachtungen anzuschliessen, nach rein analytischer Methode, wobei wir, was wohl zu beachten ist, immer die Gleichung 136), nämlich die Gleichung

$$\sin\omega_0\cos\psi_0 = \sin\omega\cos\psi$$

als erfüllt oder bestehend voraussetzen.

Unter dieser Voraussetzung lässt sich die Grösse P immer so bestimmen, dass den beiden Gleichungen:

$$139)\ \ldots \begin{cases} \sin\psi_0 = \sin\psi\cos P - \cos\omega\cos\psi\sin P, \\ \sin\psi = \sin\psi_0\cos P + \cos\omega_0\cos\psi_0\sin P \end{cases}$$

*) M. s. Archiv. Thl. XXII. S. 95.

zugleich genügt wird, wie auf folgende Art gezeigt werden kann Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch gewöhnliche algebraische Elimination sogleich:

$$140)\quad \begin{cases} \cos P = \dfrac{\cos\omega_0 \sin\psi_0 \cos\psi_0 + \cos\omega \sin\psi \cos\psi}{\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi}, \\[2ex] \sin P = \dfrac{\sin\psi^2 - \sin\psi_0^2}{\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi}; \end{cases}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$141)\quad \begin{cases} U = \dfrac{\cos\omega_0 \sin\psi_0 \cos\psi_0 + \cos\omega \sin\psi \cos\psi}{\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi}, \\[2ex] U' = \dfrac{\sin\psi^2 - \sin\psi_0^2}{\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi} \end{cases}$$

setzen:

$$142)\quad \ldots\ldots \cos P = U, \quad \sin P = U'.$$

Es ist nun:

$$U^2 + U'^2 = \frac{(\cos\omega_0 \sin\psi_0 \cos\psi_0 + \cos\omega \sin\psi \cos\psi)^2 + (\sin\psi^2 - \sin\psi_0^2)^2}{(\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi)^2},$$

und der Zähler dieses Ausdrucks ist:

$$\begin{aligned}
& (\cos\omega_0 \sin\psi_0 \cos\psi_0 + \cos\omega \sin\psi \cos\psi)^2 + (\sin\psi^2 - \sin\psi_0^2)^2 \\
= \;& (\sin\psi^2 - \sin\psi_0^2)^2 \\
& + \cos\omega_0^2 \sin\psi_0^2 \cos\psi_0^2 + \cos\omega^2 \sin\psi^2 \cos\psi^2 \\
& - \cos\omega_0^2 \cos\psi_0^2 \sin\psi^2 - \cos\omega^2 \sin\psi_0^2 \cos\psi^2 \\
& + (\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi)^2 \\
= \;& (\sin\psi^2 - \sin\psi_0^2)(\sin\psi^2 - \sin\psi_0^2 - \cos\omega_0^2 \cos\psi_0^2 + \cos\omega^2 \cos\psi^2) \\
& + (\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi)^2 \\
= \;& (\sin\psi^2 - \sin\psi_0^2)(\cos\psi_0^2 - \cos\psi^2 - \cos\omega_0^2 \cos\psi_0^2 + \cos\omega^2 \cos\psi^2) \\
& + (\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi)^2 \\
= \;& (\sin\psi^2 - \sin\psi_0^2)(\sin\omega_0^2 \cos\psi_0^2 - \sin\omega^2 \cos\psi^2) \\
& + (\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi)^2 \\
= \;& (\cos\omega_0 \cos\psi_0 \sin\psi + \cos\omega \sin\psi_0 \cos\psi)^2,
\end{aligned}$$

wegen der oben als erfüllt oder bestehend vorausgesetzten Gleichung 136); also:

$$U^2+U'^2=1,$$

woraus sich unmittelbar ergiebt, dass P immer so bestimmt werden kann, dass den beiden Gleichungen 142) oder 140) zugleich genügt wird. Auch ist es verstattet, P als positiv anzunehmen, und sich nur zwischen den Gränzen 0 und 2π verändern zu lassen, wenn man sich bei der Bestimmung von P nur an die folgenden Regeln hält:

U	U'	
positiv	positiv	$0<P<\frac{1}{2}\pi$
negativ	positiv	$\frac{1}{2}\pi<P<\pi$
negativ	negativ	$\pi<P<\frac{3}{2}\pi$
positiv	negativ	$\frac{3}{2}\pi<P<2\pi.$

Zur Bestimmung von P kann man sich jedoch Formeln entwickeln, welche bei dieser Bestimmung eine grössere Bequemlichkeit wie die Formeln 140) gewähren. Aus der ersten dieser beiden Formeln ergiebt sich nämlich leicht:

$$1+\cos P=2\cos\tfrac{1}{2}P^2$$

$$=\frac{(\cos\omega_0\cos\psi_0+\cos\omega\cos\psi)(\sin\psi+\sin\psi_0)}{\cos\omega_0\cos\psi_0\sin\psi+\cos\omega\sin\psi_0\cos\psi},$$

$$1-\cos P=2\sin\tfrac{1}{2}P^2$$

$$=\frac{(\cos\omega_0\cos\psi_0-\cos\omega\cos\psi)(\sin\psi-\sin\psi_0)}{\cos\omega_0\cos\psi_0\sin\psi+\cos\omega\sin\psi_0\cos\psi};$$

also nach sehr bekannten Zerlegungen:

143)

$$\cos\tfrac{1}{2}P^2=\frac{(\cos\omega_0\cos\psi_0+\cos\omega\cos\psi)\sin\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)}{\cos\omega_0\cos\psi_0\sin\psi+\cos\omega\sin\psi_0\cos\psi},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}P^2=\frac{(\cos\omega_0\cos\psi_0-\cos\omega\cos\psi)\cos\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)\sin\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)}{\cos\omega_0\cos\psi_0\sin\psi+\cos\omega\sin\psi_0\cos\psi}.$$

Nach der zweiten der Gleichungen 140) ist:

144)

$$\sin\tfrac{1}{2}P\cos\tfrac{1}{2}P=\frac{2\sin\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)\cos\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)\sin\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)}{\cos\omega_0\cos\psi_0\sin\psi+\cos\omega\sin\psi_0\cos\psi}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Division:

$$145)\quad \tang\tfrac{1}{2}P^2=\frac{\cos\omega_0\cos\psi_0-\cos\omega\cos\psi}{\cos\omega_0\cos\psi_0+\cos\omega\cos\psi}\cdot\frac{\tang\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)}{\tang\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)}$$

und:

$$146)\ \ldots \left\{\begin{aligned}\tang\tfrac{1}{2}P&=\frac{2\cos\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)\sin\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)}{\cos\omega_0\cos\psi_0+\cos\omega\cos\psi},\\ \tang\tfrac{1}{2}P&=\frac{\cos\omega_0\cos\psi_0-\cos\omega\cos\psi}{2\sin\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)}.\end{aligned}\right.$$

Nun ist aber nach 136):

$$\cos\psi=\frac{\sin\omega_0\cos\psi_0}{\sin\omega},$$

also, wie man leicht findet:

$$\cos\omega_0\cos\psi_0+\cos\omega\cos\psi=\frac{\sin(\omega+\omega_0)\cos\psi_0}{\sin\omega},$$

$$\cos\omega_0\cos\psi_0-\cos\omega\cos\psi=\frac{\sin(\omega-\omega_0)\cos\psi_0}{\sin\omega};$$

folglich nach 145) und 146):

$$147)\ \ldots\ \tang\tfrac{1}{2}P^2=\frac{\sin(\omega-\omega_0)}{\sin(\omega+\omega_0)}\cdot\frac{\tang\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)}{\tang\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)}$$

und:

$$148)\ \left\{\begin{aligned}\tang\tfrac{1}{2}P&=\frac{2\sin\omega\cos\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)\sin\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)}{\sin(\omega+\omega_0)\cos\psi_0},\\ \tang\tfrac{1}{2}P&=\frac{\sin(\omega-\omega_0)\cos\psi_0}{2\sin\omega\sin\frac{1}{2}(\psi+\psi_0)\cos\frac{1}{2}(\psi-\psi_0)}.\end{aligned}\right.$$

Weil $0<\frac{1}{2}P<\pi$ ist, so wird mittelst der beiden letzten Formeln P ohne alle Zweideutigkeit bestimmt.

In ähnlicher Weise kann man die Grösse Q immer so bestimmen, dass den beiden Gleichungen:

$$149)\ \ldots \left\{\begin{aligned}\cos\omega_0&=\cos\omega\cos Q+\sin\omega\sin\psi\sin Q,\\ \cos\omega&=\cos\omega_0\cos Q-\sin\omega_0\sin\psi_0\sin Q\end{aligned}\right.$$

zugleich genügt wird. Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$150)\quad \begin{cases} \cos Q = \dfrac{\sin\omega_0\cos\omega_0\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega\sin\psi}{\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi}, \\[2ex] \sin Q = \dfrac{\cos\omega_0{}^2 - \cos\omega^2}{\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi}; \end{cases}$$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

$$151)\quad \begin{cases} V = \dfrac{\sin\omega_0\cos\omega_0\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega\sin\psi}{\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi}, \\[2ex] V' = \dfrac{\cos\omega_0{}^2 - \cos\omega^2}{\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi} \end{cases}$$

setzen:

$$152)\quad \ldots\ldots\quad \cos Q = V, \quad \sin Q = V'.$$

Es ist nun

$$V^2 + V'^2 = \frac{(\sin\omega_0\cos\omega_0\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega\sin\psi)^2 + (\cos\omega_0{}^2 - \cos\omega^2)^2}{(\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi)^2},$$

und der Zähler dieses Ausdrucks ist:

$$\begin{aligned}
&(\sin\omega_0\cos\omega_0\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega\sin\psi)^2 + (\cos\omega_0{}^2 - \cos\omega^2)^2 \\
= \;& (\cos\omega_0 - \cos\omega)^2 \\
&+ \sin\omega_0{}^2\cos\omega_0{}^2\sin\psi_0{}^2 + \sin\omega^2\cos\omega^2\sin\psi^2 \\
&- \sin\omega_0{}^2\cos\omega^2\sin\psi_0{}^2 - \sin\omega^2\cos\omega_0{}^2\sin\psi^2 \\
&+ (\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi)^2 \\
= \;& (\cos\omega_0 - \cos\omega)^2(\cos\omega_0{}^2 - \cos\omega^2 + \sin\omega_0{}^2\sin\psi_0{}^2 - \sin\omega^2\sin\psi^2) \\
&+ (\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi)^2 \\
= \;& (\cos\omega_0{}^2 - \cos\omega^2)(\sin\omega^2 - \sin\omega_0{}^2 + \sin\omega_0{}^2\sin\psi_0{}^2 - \sin\omega^2\sin\psi^2) \\
&+ (\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi)^2 \\
= \;& (\cos\omega_0{}^2 - \cos\omega^2)(\sin\omega^2\cos\psi^2 - \sin\omega_0{}^2\cos\psi_0{}^2) \\
&+ (\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi)^2 \\
= \;& (\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi)^2,
\end{aligned}$$

wegen der Gleichung 136); also:

$$V^2 + V'^2 = 1,$$

woraus sich ergiebt, dass Q immer so bestimmt werden kann, dass den beiden Gleichungen 152) zugleich genügt wird. Auch

ist es verstattet, Q als positiv anzunehmen, und sich nur zwischen den Gränzen 0 und 2π verändern zu lassen, wenn man sich an die folgenden Regeln hält:

V	V'	
positiv	positiv	$0 < Q < \frac{1}{2}\pi$
negativ	positiv	$\frac{1}{2}\pi < Q < \pi$
negativ	negativ	$\pi < Q < \frac{3}{2}\pi$
positiv	negativ	$\frac{3}{2}\pi < Q < 2\pi.$

Formeln, die eine leichtere Berechnung von Q gestatten, ergeben sich auf folgende Art. Es ist nach der ersten der Gleichungen 150):

$$1 + \cos Q = 2\cos\tfrac{1}{2}Q^2 = \frac{(\sin\omega_0 \sin\psi_0 + \sin\omega\sin\psi)(\cos\omega + \cos\omega_0)}{\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi},$$

$$1 - \cos Q = 2\sin\tfrac{1}{2}Q^2 = \frac{(\sin\omega_0\sin\psi_0 - \sin\omega\sin\psi)(\cos\omega - \cos\omega_0)}{\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi};$$

also nach bekannten Zerlegungen:

153)

$$\cos\tfrac{1}{2}Q^2 = \frac{(\sin\omega_0\sin\psi_0 + \sin\omega\sin\psi)\cos\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)}{\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}Q^2 = \frac{(\sin\omega_0\sin\psi_0 - \sin\omega\sin\psi)\sin\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\sin\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)}{\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi}.$$

Nach der zweiten der Gleichungen 150) ist:

154)

$$\sin\tfrac{1}{2}Q\cos\tfrac{1}{2}Q = -\frac{2\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)}{\sin\omega_0\cos\omega\sin\psi_0 + \sin\omega\cos\omega_0\sin\psi}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch Division:

155)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}Q^2 = \frac{\sin\omega_0\sin\psi_0 - \sin\omega\sin\psi}{\sin\omega_0\sin\psi_0 + \sin\omega\sin\psi}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega_1)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega_1)$$

und:

$$156) \ldots \begin{cases} \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}Q = -\dfrac{2\sin\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\sin\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)}{\sin\omega_0\sin\psi_0 + \sin\omega\sin\psi}, \\[2ex] \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}Q = -\dfrac{\sin\omega_0\sin\psi_0 - \sin\omega\sin\psi}{2\cos\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)}; \end{cases}$$

mittelst welcher zwei letzten Formeln das zwischen 0 und π liegende $\frac{1}{2}Q$, also auch Q, ohne alle Zweideutigkeit bestimmt wird. Auf ähnliche Art wie oben gestatten diese Formeln aber noch die folgende Umgestaltung. Es ist nämlich nach 136):

$$\sin\omega = \frac{\sin\omega_0\cos\psi_0}{\cos\psi},$$

also:

$$\sin\omega_0\sin\psi_0 + \sin\omega\sin\psi = \frac{\sin\omega_0\sin(\psi_0+\psi)}{\cos\psi},$$

$$\sin\omega_0\sin\psi_0 - \sin\omega\sin\psi = \frac{\sin\omega_0\sin(\psi_0-\psi)}{\cos\psi};$$

folglich:

157)

$$\tang\tfrac{1}{2}Q^2 = \frac{\sin(\psi_0-\psi)}{\sin(\psi_0+\psi)}\tang\tfrac{1}{2}(\omega_0+\omega_1)\tang\tfrac{1}{2}(\omega_0-\omega_1)$$

und:

$$158)\quad\begin{cases}\tang\frac{1}{2}Q = -\dfrac{2\cos\psi\sin\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)\sin\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)}{\sin\omega_0\sin(\psi_0+\psi)},\\[2ex] \tang\frac{1}{2}Q = -\dfrac{\sin\omega_0\sin(\psi_0-\psi)}{2\cos\psi\cos\frac{1}{2}(\omega_0+\omega)\cos\frac{1}{2}(\omega_0-\omega)}.\end{cases}$$

Wir haben jetzt also das folgende System von Formeln:

$$159)\quad\begin{cases}\sin\omega_0\cos\psi_0 = \sin\omega\cos\psi;\\ \sin\psi_0 = \sin\psi\cos P - \cos\omega\cos\psi\sin P,\\ \cos\omega_0 = \cos\omega\cos Q + \sin\omega\sin\psi\sin Q;\\ \sin\psi = \sin\psi_0\cos P + \cos\omega_0\cos\psi_0\sin P,\\ \cos\omega = \cos\omega_0\cos Q - \sin\omega_0\sin\psi_0\sin Q.\end{cases}$$

Wie P und Q zu bestimmen sind, erhellet aus dem Obigen; beide Grössen liegen nach den obigen Bestimmungen zwischen 0 und 2π.

Aus den vorstehenden Gleichungen lassen sich verschiedene Relationen ableiten, von denen wir jedoch, als für das Folgende von Bedeutung, nur auf einige aufmerksam machen wollen, die jetzt entwickelt werden sollen.

Aus der zweiten und dritten der Gleichungen 159) erhält man,

wenn man dieselben mit $\cos P$ und $\cos Q$ multiplicirt, sogleich die Gleichungen:

$$\sin\psi - \sin\psi_0 \cos P = \quad (\sin\psi \sin P + \cos\omega \cos\psi \cos P) \sin P,$$

$$\cos\omega - \cos\omega_0 \cos Q = -(\cos\omega \sin Q - \sin\omega \sin\psi \cos Q) \sin Q;$$

also nach der vierten und fünften der Gleichungen 159):

$$160) \quad \begin{cases} \cos\omega_0 \cos\psi_0 = \sin\psi \sin P + \cos\omega \cos\psi \cos P, \\ \sin\omega_0 \sin\psi_0 = \cos\omega \sin Q - \sin\omega \sin\psi \cos Q. \end{cases}$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man aus der vierten und fünften der Gleichungen 159), wenn man dieselben mit $\cos P$ und $\cos Q$ multiplicirt, die Gleichungen:

$$\sin\psi_0 - \sin\psi \cos P = -(\cos\omega_0 \cos\psi_0 \cos P - \sin\psi_0 \sin P) \sin P,$$

$$\cos\omega_0 - \cos\omega \cos Q = \quad (\sin\omega_0 \sin\psi_0 \cos Q + \cos\omega_0 \sin Q) \sin Q;$$

also nach der zweiten und dritten der Gleichungen 159):

$$161) \quad \begin{cases} \cos\omega \cos\psi = \cos\omega_0 \cos\psi_0 \cos P - \sin\psi_0 \sin P, \\ \sin\omega \sin\psi = \sin\omega_0 \sin\psi_0 \cos Q + \cos\omega_0 \sin Q. \end{cases}$$

§. 17.

Durch Differentiation der ersten, vierten, fünften der Gleichungen 159) erhalten wir:

$$\sin\omega \sin\psi \partial\psi = \cos\omega \cos\psi \partial\omega,$$

$$\cos\psi \partial\psi = (\cos\omega_0 \cos\psi_0 \cos P - \sin\psi_0 \sin P) \partial P,$$

$$\sin\omega \partial\omega = (\sin\omega_0 \sin\psi_0 \cos Q + \cos\omega_0 \sin Q) \partial Q;$$

also nach 161):

$$162) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \sin\omega \sin\psi \partial\psi = \cos\omega \cos\psi \partial\omega, \\ \partial\psi = \cos\omega \partial P, \\ \partial\omega = \sin\psi \partial Q. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich sogleich:

$$163) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \sin\omega \partial P = \cos\psi \partial Q;$$

ferner:

$$164) \quad \begin{cases} \partial\psi = \cot\omega \cot\psi \partial\omega = \cos\omega \partial P = \cot\omega \cos\psi \partial Q, \\ \partial\omega = \operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}\psi \partial\psi = \sin\psi \partial Q = \sin\omega \operatorname{tang}\psi \partial P. \end{cases}$$

Wendet man diese Gleichungen auf die Gleichungen 138) an, so erhält man die beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\sin\omega_0\cos\psi_0=\sin\omega\cos\psi,$$

$$\partial\varphi=\frac{\sin\omega}{\cos\psi}\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}.\partial P,$$

$$\partial s=a\frac{\sin\omega_0\cos\psi_0}{\sin\omega\cos\psi}\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}.\partial P$$

und:

$$\sin\omega_0\cos\psi_0=\sin\omega\cos\psi,$$

$$\partial\varphi=\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}.\partial Q,$$

$$\partial s=a\frac{\sin\omega_0\cos\psi_0}{\sin\omega^2}\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}.\partial Q;$$

folglich, wegen der ersten Gleichung in diesen beiden Systemen:

$$165)\ \ldots\ \begin{cases}\sin\omega_0\cos\psi_0=\sin\omega\cos\psi,\\[2mm] \partial\varphi=\dfrac{\sin\omega_0\cos\psi_0}{\cos\psi^2}\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}.\partial P,\\[2mm] \partial s=a\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}.\partial P;\end{cases}$$

und:

$$166)\ \ldots\ \begin{cases}\sin\omega_0\cos\psi_0=\sin\omega\cos\psi,\\[2mm] \partial\varphi=\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}.\partial Q,\\[2mm] \partial s=a\dfrac{\cos\psi^2}{\sin\omega_0\cos\psi_0}\sqrt{1-e^2\cos\psi^2}.\partial Q,\end{cases}$$

Man bestimme nun zwei Hülfswinkel u_0, v_0 so, dass den beiden Gleichungen:

$$167)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}\sin u_0\cos v_0=\sin\psi_0,\\ \cos u_0\cos v_0=\cos\omega_0\cos\psi_0\end{cases}$$

genügt wird, wozu sich aus diesen Gleichungen unmittelbar die Formeln:

$$168)\ \ldots\ldots\ \begin{cases}\tang u_0=\dfrac{\tang\psi_0}{\cos\omega_0},\\[2mm] \cos v_0=\dfrac{\sin\psi_0}{\sin u_0}=\dfrac{\cos\omega_0\cos\psi_0}{\cos u_0}\end{cases}$$

ergeben, und nur die Frage entsteht, ob die Bestimmung von v_0 jederzeit möglich ist, was nur dann der Fall sein wird, wenn

$$\left(\frac{\sin\psi_0}{\sin u_0}\right)^2 \overline{\overline{<}}\; 1$$

ist. Es ist aber:

$$\sin u_0^2 = \frac{\tang u_0^2}{1+\tang u_0^2} = \frac{\frac{\tang\psi_0^2}{\cos\omega_0^2}}{1+\frac{\tang\psi_0^2}{\cos\omega_0^2}} = \frac{\sin\psi_0^2}{\sin\psi_0^2+\cos\omega_0^2\cos\psi_0^2},$$

also

$$\frac{\sin\psi_0^2}{\sin u_0^2} = \sin\psi_0^2+\cos\omega_0^2\cos\psi_0^2 = 1-\sin\omega_0^2\cos\psi_0^2\,,$$

woraus sich ergiebt, dass $\left(\frac{\sin\psi_0}{\sin u_0}\right)^2$ nie grösser als die Einheit sein kann, wie es erforderlich ist, wenn die Bestimmung von v_0 jederzeit möglich sein soll.

Weil nun nach 159):

$$\sin\psi = \sin\psi_0\cos P + \cos\omega_0\cos\psi_0\sin P$$

ist, so ist nach 167):

$$\sin\psi = \cos v_0\sin(u_0+P),$$

also:

$$\cos\psi^2 = 1-\cos v_0^2\sin(u_0+P)^2$$

und

$$\begin{aligned}1-e^2\cos\psi^2 &= 1-e^2+e^2\cos v_0^2\sin(u_0+P)^2\\ &= (1-e^2)\left\{1+\frac{e^2}{1-e^2}\cos v_0^2\sin(u_0+P)^2\right\}\\ &= \frac{b^2}{a^2}\left\{1+\frac{a^2-b^2}{b^2}\cos v_0^2\sin(u_0+P)^2\right\}\end{aligned}$$

oder, wenn wir

$$169) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \varepsilon^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$$

setzen:

$$1-e^2\cos\psi^2 = \frac{b^2}{a^2}\{1+\varepsilon^2\cos v_0^2\sin(u_0+P)^2\}.$$

Also ist nach 165):

$$170)\quad \begin{cases}\sin\omega_0\cos\psi_0 = \sin\omega\cos\psi,\\ \partial\varphi = \frac{b}{a}\sin\omega_0\cos\psi_0\,\frac{\sqrt{1+\varepsilon^2\cos v_0^2\sin(u_0+P)^2}}{1-\cos v_0^2\sin(u_0+P)^2}\,\partial P,\\ \partial s = b\sqrt{1+\varepsilon^2\cos v_0^2\sin(u_0+P)^2}\,.\,\partial P;\end{cases}$$

woraus man zugleich übersieht, dass φ und s mit P, welches nach

dem Obigen immer zwischen 0 und 2π liegt, stets gleichzeitig zunehmen und abnehmen.

Für $\varphi = \varphi_0$, $\psi = \psi_0$ ist nach 140):

$$\cos P = +1, \quad \sin P = 0; \quad \text{also} \quad P = 0;$$

und rechnet man nun φ und s von dem Punkte $(\varphi_0 \psi_0)$ als Anfang an, so ergeben sich aus 170) unmittelbar die folgenden Formeln:

171)

$$\sin \omega_0 \cos \psi_0 = \sin \omega \cos \psi,$$

$$\varphi = \frac{b}{a} \sin \omega_0 \cos \psi_0 \int_0^P \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos v_0^2 \sin(u_0 + P)^2}}{1 - \cos v_0^2 \sin(u_0 + P)^2} \partial P,$$

$$s = b \int_0^P \sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos v_0^2 \sin(u_0 + P)^2} \cdot \partial P;$$

wo nun Alles auf blosse Quadraturen zurückgeführt ist*).

Schlussbemerkung.

Es ist keineswegs meine Absicht gewesen, in dieser Abhandlung die Theorie der kürzesten oder geodätischen Linien zu erschöpfen; vielmehr habe ich, wie auch die Ueberschrift ausdrücklich besagt, für jetzt nur die Gleichungen in mehrfach eigenthümlicher Weise und vollständiger als dies bis jetzt geschehen, entwickeln wollen, welche hauptsächlich der sphäroidischen Trigonometrie zu Grunde liegen, und bitte die Abhandlung namentlich aus diesem Gesichtspunkte zu betrachten und zu beurtheilen. Es sind aber in neuerer Zeit noch so viele höchst merkwürdige allgemeine und speciellere geometrische Eigenschaften der geodätischen Curven entdeckt worden, wobei namentlich auch deren Verhältniss zu den Krümmungslinien besonders zur Sprache kommen muss, dass ich es mir zur besonderen Aufgabe machen werde, diese Eigenschaften, nach gewissen Kategorien geordnet, in besonderen Abhandlungen, welche sich der vorliegenden und meinen früheren, die Flächen überhaupt und die Curven auf den Flächen, insbesondere die Krümmungslinien, betreffenden Abhandlungen anschliessen und in denselben ihre Grundlage finden werden, einer eingehenden Behandlung zu unterwerfen.

*) Diese schon früher (Thl. XXII. S. 100) von mir gegebenen Formeln habe ich hier in ihren Grundlagen weiter und vollständiger entwickelt, was wohl durch die grosse Wichtigkeit derselben gerechtfertigt erscheinen dürfte.

VII.

Zur Integration linearer Differentialgleichungen; die Riccati'sche Gleichung.

Von

Herrn Professor *Eugen Lommel*

in Schwyz.

---

§. 1. Construction derjenigen linearen Differentialgleichung, welcher

$$y = z^\lambda . \int_{v_1}^{v_2} e^{zv}(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv = z^\lambda . J \qquad (1.)$$

als partikuläres Integral genügt.

Durch Differentiation der vorstehenden Gleichung nach z erhalten wir zunächst:

(2.)

$$\frac{dy}{dz} = z^\lambda . \int_{v_1}^{v_2} e^{zv}.v.(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv$$

$$+\lambda z^{\lambda-1} \int_{v_1}^{v_2} e^{zv}.(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv = z^\lambda J_1 + \lambda z^{\lambda-1}.J;$$

sodann

(3.)

$$\frac{d^2y}{dz^2} = z^\lambda . \int_{v_1}^{v_2} e^{zv}.v^2.(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv + 2\lambda z^{\lambda-1}.J_1 + \lambda(\lambda-1)z^{\lambda-2}.J$$

$$= z^\lambda . J_2 + 2\lambda z^{\lambda-1} J_1 + \lambda(\lambda-1)z^{\lambda-2}.J.$$

Löst man diese drei Gleichungen nach J, J_1 und J_2 auf, so ergibt sich:

$$J = z^{-\lambda}.y, \qquad (4.)$$

$$J_1 = z^{-\lambda}.\frac{dy}{dz} - \lambda z^{-\lambda-1}.y, \qquad (5.)$$

$$J_2 = z^{-\lambda}.\frac{d^2y}{dz^2} - 2\lambda z^{-\lambda-1}.\frac{dy}{dz} + \lambda(\lambda+1).z^{-\lambda-2}.y. \qquad (6.)$$

Addirt man nun die Gleichungen (4.) und (5.), nachdem die erstere mit $-(\alpha\nu+\beta\mu)$, die letztere dagegen mit $\mu+\nu$ multiplicirt worden ist, so erhält man:

(7.)

$$\int_{v_1}^{v_2} e^{zv}[(\mu+\nu)v-(\alpha\nu+\beta\mu)](v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv$$

$$= (\mu+\nu)z^{-\lambda}.\frac{dy}{dz} - \lambda(\mu+\nu).z^{-\lambda-1}y - (\alpha\nu+\beta\mu)z^{-\lambda}.y.$$

Berücksichtigt man aber, dass

$$[(\mu+\nu)v-(\alpha\nu+\beta\mu)](v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv = d[(v-\alpha)^{\mu}.(v-\beta)^{\nu}]$$

ist, so hat man nach der Methode der theilweisen Integration:

(8.)

$$\int_{v_1}^{v_2} e^{zv}[(\mu+\nu)v-(\alpha\nu+\beta\mu)](v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv$$

$$= \Big[e^{zv}(v-\alpha)^{\mu}.(v-\beta)^{\nu}\Big]_{v_1}^{v_2} - z\int_{v_1}^{v_2} e^{zv}(v-\alpha)^{\mu}.(v-\beta)^{\nu}.dv.$$

Sind nun μ und ν positive Zahlen, so kann man $v_1=\alpha$ und $v_2=\beta$ setzen; alsdann verschwindet zur Rechten das vom Integral-Zeichen befreite Glied, und die Gleichung (7.) erscheint, wenn man den jetzt aus (8.) sich ergebenden Werth des Integrals dort einführt, in der folgenden Form:

(9.)

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{zv}.(v-\alpha)^{\mu}.(v-\beta)^{\nu}.dv$$

$$= -(\mu+\nu)z^{-\lambda-1}.\frac{dy}{dz} + \lambda(\mu+\nu)z^{-\lambda-2}.y + (\alpha\nu+\beta\mu)z^{-\lambda-1}.y.$$

Addirt man ferner zur unveränderten Gleichung (6.) die Gleichungen (4.) und (5.), erstere mit $\alpha\beta$, letztere mit $-(\alpha+\beta)$ multiplicirend, so erhält man:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{zv}(v-\alpha)^{\mu}.(v-\beta)^{\nu}.dv \tag{10.}$$

$$= z^{-\lambda}.\frac{d^2y}{dz^2} - 2\lambda z^{-\lambda-1}.\frac{dy}{dz} - (\alpha+\beta)z^{-\lambda}.\frac{dy}{dz} + \lambda(\lambda+1)z^{-\lambda-2}.y$$

$$+\lambda(\alpha+\beta)z^{-\lambda-1}.y + \alpha\beta z^{-\lambda}.y.$$

Die Werthe zur Rechten in den Gleichungen (9.) und (10.), einander gleich gesetzt, liefern endlich, nachdem man noch mit $z^{\lambda+2}$ multiplicirt und nach Differentialquotienten von y geordnet hat, die verlangte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$z^2.\frac{d^2y}{dz^2} + [(\mu+\nu-2\lambda)z - (\alpha+\beta)z^2].\frac{dy}{dz} \tag{11.}$$

$$+[\lambda(\lambda+1-\mu-\nu) + (\lambda(\alpha+\beta) - \alpha\nu - \beta\mu)z + \alpha\beta z^2]y = 0.$$

So lange μ und ν positiv sind, wird derselben durch das partikuläre Integral

$$y = z^{\lambda}\int_{\alpha}^{\beta} e^{zv}(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv \tag{12.}$$

genügt.

Denkt man sich in der Gleichung (11.) λ', μ', ν' an die Stelle von λ, μ, ν gesetzt, so wird die neue Gleichung durch das Integral

$$y = z^{\lambda'}\int_{\alpha}^{\beta} e^{zv}(v-\alpha)^{\mu'-1}.(v-\beta)^{\nu'-1}.dv \tag{13.}$$

erfüllt, wenn nur μ' und ν' positiv gedacht werden. Die neue Gleichung wird aber mit der (11.) identisch, wenn man die Grössen λ', μ', ν' aus den Gleichungen

$$\mu'+\nu'-2\lambda' = \mu+\nu-2\lambda,$$

$$\lambda'(\alpha+\beta) - \alpha\nu' - \beta\mu' = \lambda(\alpha+\beta) - \alpha\nu - \beta\mu,$$

$$\lambda'(\lambda'+1-\mu'-\nu') = \lambda(\lambda+1-\mu-\nu)$$

bestimmt. Man findet (ausser $\lambda'=\lambda$, $\mu'=\mu$, $\nu'=\nu$):

$$\lambda' = \lambda+1-\mu-\nu,$$

$$\mu' = 1-\nu,$$

$$\nu' = 1-\mu.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (13.), so hat man als zweites partikuläres Integral der Differentialgleichung (11.) das folgende:

$$y = z^{\lambda+1-\mu-\nu} . \int_\alpha^\beta e^{zv}(v-\alpha)^{-\nu} . (v-\beta)^{-\mu} . dv. \qquad (14.)$$

Dasselbe gilt für alle Werthe von μ und ν, welche zwischen $-\infty$ und $+1$ liegen, weil für diese μ' und ν' stets positiv sind.

Wenn daher μ und ν beide positiv und kleiner als 1 sind, so ist:

(15.)

$$y = C_1 . z^\lambda \int_\alpha^\beta e^{zv} . (v-\alpha)^{\mu-1} . (v-\beta)^{\nu-1} . dv$$

$$+ C_2 . z^{\lambda+1-\mu-\nu} . \int_\alpha^\beta e^{zv} . (v-\alpha)^{-\nu} . (v-\beta)^{-\mu} . dv$$

das vollständige Integral der Differentialgleichung (11.).

§. 2. Für $\mu+\nu=1$ wird das zweite partikuläre Integral (14.) mit dem ersten (12.) identisch, und die Gleichung (15.) kann jetzt nicht mehr das vollständige Integral der Differentialgleichung (11.) liefern. Alsdann wird ihr aber, ausser durch (12.), auch noch durch das partikuläre Integral

(16.)

$$y = z^\lambda \int_\alpha^\beta e^{zv}(v-\alpha)^{\mu-1} . (v-\beta)^{\nu-1} . \log[z(v-\alpha)(v-\beta)] . dv = z^\lambda . Y$$

genügt. Um dies nachzuweisen, construiren wir zu diesem Integral die entsprechende Differentialgleichung und vergleichen dieselbe mit der obigen (11.). Man findet aber aus (16.) durch Differentiiren nach z:

(17.)

$$\frac{dy}{dz} = z^\lambda . Y_1 + \lambda z^{\lambda-1} Y + z^{\lambda-1} . J,$$

und

(18.)

$$\frac{d^2y}{dz^2} = z^\lambda . Y_2 + 2\lambda z^{\lambda-1} . Y_1 + \lambda(\lambda-1) z^{\lambda-2} . Y + 2z^{\lambda-1} . J_1 + (2\lambda-1) z^{\lambda-2} . J,$$

wo zur Abkürzung

$$Y_1 \text{ statt } \int_\alpha^\beta e^{zv}.v.(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.\log[z(v-\alpha)(v-\beta)]dv$$

und

$$Y_2 \text{ statt } \int_\alpha^\beta e^{zv}.v^2.(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.\log[z(v-\alpha)(v-\beta)]dv$$

gesetzt worden, während J und J_1 die nämliche Bedeutung haben wie im vorigen Paragraphen. Löst man jetzt die Gleichungen (16.) bis (18.) nach Y, Y_1 und Y_2 auf, so erhält man:

$$Y = z^{-\lambda}.y, \tag{19.}$$

$$Y_1 = z^{-\lambda}.\frac{dy}{dz} - \lambda z^{-\lambda-1}.y - z^{-1}.J, \tag{20.}$$

(21.)

$$Y_2 = z^{-\lambda}.\frac{d^2y}{dz^2} - 2\lambda z^{-\lambda-1}.\frac{dy}{dz} + \lambda(\lambda+1)z^{-\lambda-2}.y - 2z^{-1}.J_1 + z^{-2}.J.$$

Nun werde die Gleichung (19.) mit $-(\alpha\nu+\beta\mu)$, die Gleichung (20.) dagegen mit $\mu+\nu$ multiplicirt, und zu ihrer Summe beiderseits noch $2J_1-(\alpha+\beta)J$ hinzugezählt, so kommt:

(22.)

$$\int_\alpha^\beta e^{zv}.[(\mu+\nu)v-(\alpha\nu+\beta\mu)](v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.\log[z(v-\alpha)(v-\beta)].dv$$

$$+\int_\alpha^\beta e^{zv}(2v-\alpha-\beta).(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv$$

$$=(\mu+\nu)z^{-\lambda}.\frac{dy}{dz} - \lambda(\mu+\nu)z^{-\lambda-1}.y$$

$$-(\alpha\nu+\beta\mu)z^{-\lambda}.y + 2J_1 - (\alpha+\beta)J - (\mu+\nu)z^{-1}J.$$

Nun ist aber

$$[(\mu+\nu)v-(\alpha\nu+\beta\mu)].(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.\log[z(v-\alpha)(v-\beta)]dv$$

$$+(2v-\alpha-\beta)(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv$$

$$=d((v-\alpha)^\mu.(v-\beta)^\nu.\log[z(v-\alpha)(v-\beta)]).$$

Wendet man daher in (22.) zur Linken die Methode der theilweisen Integration an, so erhält man nach Einführung der Grenzen:

(23.)

$$\int_\alpha^\beta e^{zv}(v-\alpha)^\mu.(v-\beta)^\nu.\log[z(v-\alpha)(v-\beta)]\,dv$$

$$=-(\mu+\nu)z^{-\lambda-1}.\frac{dy}{dz}+\lambda(\mu+\nu)z^{-\lambda-2}.y+(\alpha\nu+\beta\mu)z^{-\lambda-1}.y-2z^{-1}.J_1$$
$$+(\alpha+\beta)z^{-1}.J+(\mu+\nu)z^{-2}.J.$$

Das nämliche Integral geht aber auch hervor, wenn man die Gleichung (19.) mit $\alpha\beta$, die (20.) dagegen mit $-(\alpha+\beta)$ multiplicirt, und ihre Summe zur unveränderten (21.) hinzuzählt. Man hat demnach für eine und dieselbe Grösse zwei Ausdrücke gefunden, welche, einander gleichgesetzt, die folgende Differentialgleichung geben:

(24.)

$$z^2.\frac{d^2y}{dz^2}+[(\mu+\nu-2\lambda)z-(\alpha+\beta)z^2].\frac{dy}{dz}$$
$$+[\lambda(\lambda+1-\mu-\nu)+(\lambda(\alpha+\beta)-\alpha\nu-\beta\mu)z+\alpha\beta z^2]y=(\mu+\nu-1).z^\lambda.J.$$

Da diese Gleichung für $\mu+\nu=1$ mit der Gleichung (11.) identisch wird, so ist hiermit bewiesen, dass in diesem Falle die Gleichung (16.) als partikuläres Integral unserer Differentialgleichung (11.) genügt. Man kann daher, wenn $\mu+\nu=1$ ist, und μ und ν beide positiv sind, für die Gleichung (11.) das vollständige Integral

(25.)

$$y=C_1z^\lambda\int_\alpha^\beta e^{zv}(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv$$
$$+C_2.z^\lambda.\int_\alpha^\beta e^{zv}.(v-\alpha)^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.\log[z(v-\alpha)(v-\beta)]\,dv$$

angeben.

§. 3. Wenn μ positiv ganz und gleich $m+1$ und ebenso ν positiv ganz und gleich $n+1$ ist, so liefert jeder der beiden Grenzwerthe des Integrals

$$y=z^\lambda\int_\alpha^\beta e^{zv}.(v-\alpha)^m.(v-\beta)^n\,dv$$

ein partikuläres Integral der Gleichung (11.).

Bezeichnet nämlich $\varphi(v)$ eine beliebige Function von v, so ist bekanntlich:

$$\int e^{zv}.\varphi(v)dv = e^{zv}.S\left[(-1)^{\mathfrak{a}}.\frac{\varphi^{(\mathfrak{a})}(v)}{z^{\mathfrak{a}+1}}\right], \qquad (26.)$$

wenn unter $\varphi^{(\mathfrak{a})}(v)$ der $\mathfrak{a}$te Differentialquotient von φ nach v verstanden wird, und das Summenzeichen S vor dem eingeklammerten Ausdruck andeutet, dass in denselben statt des deutschen Buchstaben $\mathfrak{a}$ Null und jede positive ganze Zahl nach und nach einzusetzen und schliesslich die Summe aller so entstandenen Glieder zu nehmen sei. Nun ist im obigen Falle

$$\varphi(v) = (v-\alpha)^m.(v-\beta)^n.$$

Setzen wir in diesen Ausdruck $v+h$ an die Stelle von v und entwickeln nach Potenzen von h, so ist $\varphi^{(\mathfrak{a})}(v)$ nichts anderes als der noch mit $\mathfrak{a}!$ multiplicirte Coefficient von $h^{\mathfrak{a}}$ in dieser Entwikkelung. Man findet aber durch Anwendung des binomischen Lehrsatzes:

$$(v-\alpha+h)^m.(v-\beta+h)^n$$

$$= S\left[\frac{m^{\mathfrak{b}|-1}}{\mathfrak{b}!}.(v-\alpha)^{m-\mathfrak{b}}.h^{\mathfrak{b}}\right].S\left[\frac{n^{\mathfrak{c}|-1}}{\mathfrak{c}!}.(v-\beta)^{n-\mathfrak{c}}.h^{\mathfrak{c}}\right]$$

$$= S\left[\frac{m^{\mathfrak{b}|-1}.n^{\mathfrak{c}|-1}}{\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!}.(v-\alpha)^{m-\mathfrak{b}}.(v-\beta)^{n-\mathfrak{c}}.h^{\mathfrak{b}+\mathfrak{c}}\right].$$

Demnach ist:

$$\varphi^{(\mathfrak{a})}(v) = S\left[\frac{\mathfrak{a}!}{\mathfrak{b}!\,\mathfrak{c}!}m^{\mathfrak{b}|-1}.n^{\mathfrak{c}|-1}.(v-\alpha)^{m-\mathfrak{b}}.(v-\beta)^{n-\mathfrak{c}}\right]$$

$$\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = \alpha,$$

wo die untergesetzte Gleichung $\mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}$ ausdrückt, dass statt $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ nur solche positiv ganze (oder Null-) Werthe gesetzt werden dürfen, welche $\mathfrak{a}$ zur Summe geben.

Setzt man nun hierin α an die Stelle von v, so verschwinden alle Glieder der Summe mit Ausnahme desjenigen, für welches $\mathfrak{b}=m$ und folglich $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}-m$ ist, und man erhält:

$$\varphi^{(\mathfrak{a})}(\alpha) = \frac{\mathfrak{a}!\,n^{\mathfrak{a}-m|-1}}{(\mathfrak{a}-m)!}.(\alpha-\beta)^{m+n-\mathfrak{a}}.$$

Da $\mathfrak{c}$ nicht negativ werden kann, so darf $\mathfrak{a}$ in dieser Formel nur solche Werthe annehmen, welche gleich oder grösser als m sind. Wir können daher in derselben $m+\mathfrak{a}$ an die Stelle von $\mathfrak{a}$ setzen, und dem neuen $\mathfrak{a}$ wieder, wie früher, Null und jeden positiven ganzen Werth beigelegt denken. Die so umgestaltete Formel

$$\varphi^{(m+\mathfrak{a})}(v) = (-1)^{n-\mathfrak{a}} \cdot \frac{(m+\mathfrak{a})!\, n^{\mathfrak{a}\,|\,-1}}{\mathfrak{a}!} (\beta-\alpha)^{n-\mathfrak{a}} \tag{27.}$$

liefert uns, für $v=\alpha$, alle Differentialquotienten von φ, vom $m$ten an bis zum $(m+n)$ten; alle Differentialquotienten nämlich von einer niedrigeren als der $m$ten Ordnung verschwinden für $v=\alpha$, während diejenigen von einer höheren als der $(m+n)$ten Ordnung ohnedies Null sind.

Setzt man diesen Werth von $\varphi^{(m+\mathfrak{a})}(v)$ in den Ausdruck zur Rechten der Gleichung (26.) ein, nachdem man daselbst ebenfalls $\mathfrak{a}$ mit $m+\mathfrak{a}$ und v mit α vertauscht hat, so ergibt sich der untere Grenzwerth des Integrals (12.), wenn der constante Faktor $(-1)^{m+n}.(\beta-\alpha)^n$ als unwesentlich weggelassen wird, in folgender Gestalt:

$$y_1 = e^{\alpha z} . S\left[\frac{(m+\mathfrak{a})!\, n^{\mathfrak{a}\,|\,-1}}{\mathfrak{a}!(\beta-\alpha)^{\mathfrak{a}}} . z^{\lambda-m-\mathfrak{a}-1}\right]. \tag{28.}$$

Dieser Ausdruck soll nun, wenn man ihn in die Differentialgleichung (11.) an die Stelle von y substituirt, diese Gleichung identisch machen. Um dies nachzuweisen, bezeichnen wir die Summe in vorstehendem Ausdruck der Kürze halber mit Σ, und finden aus

$$y_1 = e^{\alpha z} . \Sigma$$

die Differentialquotienten

$$\frac{dy_1}{dz} = e^{\alpha z} . \Sigma' + \alpha e^{\alpha z} \Sigma$$

und

$$\frac{d^2y_1}{dz^2} = e^{\alpha z} . \Sigma'' + 2\alpha e^{\alpha z} . \Sigma' + \alpha^2 e^{\alpha z} . \Sigma,$$

wo Σ' und Σ'' die erste und zweite Ableitung der Summe Σ nach z vorstellen. Diese Ausdrücke, in die Differentialgleichung (11.) substituirt, bringen dieselbe auf die Form:

(29.)

$$z^2\Sigma'' - (\beta-\alpha)z^2\Sigma' + (m+n+2-2\lambda)z\Sigma' - (\beta-\alpha)(m-\lambda+1)z\Sigma$$
$$+ \lambda(\lambda-1-m-n)\Sigma = 0.$$

Führt man hier in den Ausdruck zur Linken statt Σ, Σ' und Σ'' die obige Summe aus (28.) und ihre Ableitungen ein, so nimmt derselbe, unter ein einziges Summenzeichen gebracht, zunächst die folgende Gestalt an:

$$S\left[\frac{(m+\alpha)!n^{\alpha|-1}}{\alpha!(\beta-\alpha)^{\alpha}}\cdot\left\{\begin{array}{l}(\lambda-\mu-\alpha-1)(\lambda-m-\alpha-2)z^{\lambda-m-\alpha-1}\\-(\beta-\alpha)(\lambda-m-\alpha-1)z^{\lambda-m-\alpha}\\+(m+n+2-2\lambda)(\lambda-m-\alpha-1)z^{\lambda-m-\alpha-1}\\-(\beta-\alpha)(m-\lambda+1)z^{\lambda-m-\alpha}\\+\lambda(\lambda-1-m-n)z^{\lambda-m-\alpha-1}\end{array}\right\}\right].$$

Diese Summe lässt sich leicht in die beiden folgenden zerlegen:

$$-S\left[\frac{(m+\alpha)!n^{\alpha|-1}}{\alpha!(\beta-\alpha)^{\alpha}}.(m+\alpha+1)(n-\alpha).z^{\lambda-m-\alpha-1}\right]$$

$$+S\left[\frac{(m+\alpha)!n^{\alpha|-1}}{\alpha!(\beta-\alpha)^{\alpha-1}}\cdot\alpha.z^{\lambda-m-\alpha}\right],$$

von denen die erstere offenbar auch so:

$$-S\left[\frac{(m+\alpha+1)!n^{\alpha+1|-1}}{\alpha!(\beta-\alpha)^{\alpha}}.z^{\lambda-m-\alpha-1}\right]$$

geschrieben werden kann. Sondert man jetzt von der zweiten Summe das erste Glied dadurch ab, dass man zuerst 0 und dann $\alpha+1$ an die Stelle von α setzt, so wird dieselbe, weil eben jenes erste Glied Null ist:

$$+S\left[\frac{(m+\alpha+1)!n^{\alpha+1|-1}}{\alpha!(\beta-\alpha)^{\alpha}}.z^{\lambda-m-\alpha-1}\right].$$

Sie ist demnach der ersten Summe gleich und entgegengesetzt, und der Ausdruck zur Linken in (29.) ist wirklich der Null gleich. Der Eingangs des gegenwärtigen Paragraphen ausgesprochene Satz ist somit für den untern Grenzwerth des Integrals (12.) erwiesen. Der Beweis für den obern Grenzwerth ist dadurch aber ebenfalls geliefert, indem derselbe aus dem Vorigen hervorgeht, wenn man nur durchweg α mit β und m mit n vertauscht.

Sind daher μ und ν beide positiv ganz und resp. gleich $m+1$ und gleich $n+1$, so genügt der Differentialgleichung (11.) folgendes allgemeine Integral:

(30.)

$$y=C_1e^{\alpha z}.S\left[\frac{(m+\alpha)^{m|-1}.n^{\alpha|-1}}{(\beta-\alpha)^{\alpha}}.z^{\lambda-m-\alpha-1}\right]$$
$$+C_2.e^{\beta z}.S\left[(-1)^{\alpha}.\frac{(n+\alpha)^{n|-1}.m^{\alpha|-1}}{(\beta-\alpha)^{\alpha}}.z^{\lambda-n-\alpha-1}\right].$$

Sind dagegen μ und ν beide negativ ganz und beziehlich gleich $-n$ und gleich $-m$ (wo m oder n oder beide zugleich auch Null sein können), so genügt jeder der Grenz-

werthe des Integrals (14.) für sich der Gleichung (11.), und ihr allgemeines Integral ist das folgende:

(31.)

$$y = C_1 . e^{\alpha z} . S\left[\frac{(m+\mathfrak{a})^{m|-1} . n^{\mathfrak{a}|-1}}{(\beta-\alpha)^{\mathfrak{a}}} . z^{\lambda+n-\mathfrak{a}}\right]$$

$$+ C_2 . e^{\beta z} . S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} . \frac{(n+\mathfrak{a})^{n|-1} . m^{\mathfrak{a}|-1}}{(\beta-\alpha)^{\mathfrak{a}}} . z^{\lambda+m-\mathfrak{a}}\right].$$

Der Beweis hierfür kann ganz in derselben Weise wie vorher geführt werden.

§. 4. Wenn man in der Gleichung (11.) $\lambda = 0$ annimmt, und nachher mit z wegdividirt, so geht dieselbe über in die folgende:

(32.)

$$z . \frac{d^2 y}{d z^2} + [\mu + \nu - (\alpha+\beta) z] . \frac{dy}{dz} + [-\alpha\nu - \beta\mu + \alpha\beta z] . y = 0.$$

Es ist dies die nämliche Gleichung, welche Herr Spitzer in seinen trefflichen „Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen" so meisterhaft behandelt hat. Ihre Integrale ergeben sich, unter den nämlichen Bedingungen für μ und ν, aus den oben für die Gleichung (11.) aufgestellten, wenn man daselbst $\lambda = 0$ setzt.

Sind daher μ und ν beide positiv und kleiner als 1, so genügt der Gleichung (32.) das allgemeine Integral:

(33.)

$$y = C_1 \int_\alpha^\beta e^{zv} (v-\alpha)^{\mu-1} . (v-\beta)^{\nu-1} . dv$$

$$+ C_2 . z^{1-\mu-\nu} . \int_\alpha^\beta e^{zx} . (v-\alpha)^{-\nu} . (v-\beta)^{-\mu} . dv.$$

Wäre zugleich $\mu + \nu = 1$, so müsste als allgemeines Integral

(34.)

$$y = C_1 . \int_\alpha^\beta e^{zv} (v-\alpha)^{\mu-1} . (v-\beta)^{\nu-1} . dv$$

$$+ C_2 . \int_\alpha^\beta e^{zv} . (v-\alpha)^{\mu-1} . (v-\beta)^{\nu-1} . \log[z(v-\alpha)(v-\beta)] . dv$$

genommen werden.

Sind ferner μ und ν beide positiv ganz und beziehlich gleich $m+1$ und gleich $n+1$, so hat man

(35.)

$$y = C_1 . e^{\alpha z} . S\left[\frac{(m+\mathfrak{a})^{m|-1} . n^{\mathfrak{a}|-1}}{(\beta-\alpha)^{\mathfrak{a}} . z^{m+\mathfrak{a}+1}}\right]$$

$$+ C_2 . e^{\beta z} . S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} . \frac{(n+\mathfrak{a})^{n|-1} . m^{\mathfrak{a}|-1}}{(\beta-\alpha)^{\mathfrak{a}} . z^{m+\mathfrak{a}+1}}\right]$$

als allgemeines Integral. Wenn dagegen μ und ν beide negativ ganz und resp. gleich $-n$ und gleich $-m$ (oder auch Null) sind, so genügt:

(36.)

$$y = C_1 . e^{\alpha z} . S\left[\frac{(m+\mathfrak{a})^{m|-1} . n^{\mathfrak{a}|-1}}{(\beta-\alpha)^{\mathfrak{a}}} . z^{n-\mathfrak{a}}\right]$$

$$+ C_2 . e^{\beta z} . S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} . \frac{(n+\mathfrak{a})^{n|-1} . m^{\mathfrak{a}|-1}}{(\beta-\alpha)^{\mathfrak{a}}} . z^{m-\mathfrak{a}}\right].$$

Zu derselben Gleichung (32.) und ihren Integralen (33.) bis (36.) gelangt man auch, wenn man in (11.) $\lambda = \mu+\nu-1$ annimmt, und nachträglich μ durch $1-\nu$ und ν durch $1-\mu$ ersetzt.

§. 5. Nun denke man sich in den Gleichungen (11.) und (32.) unter z eine beliebige Funktion von x, und setze demgemäss

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y'}{z'}$$

und

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{y''}{z'^2} - \frac{z''y'}{z'^3},$$

wo die Ableitungen von y und z nach x durch Accente angedeutet sind. Jene Gleichungen gehen alsdann in die folgenden über:

(11.a.)

$$z^2z'y'' + [(\mu+\nu-2\lambda)zz'^2 - (\alpha+\beta)z^2z'^2 - z^2z'']y'$$

$$+ [\lambda(\lambda+1-\mu-\nu)z'^3 + (\lambda(\alpha+\beta) - \alpha\nu - \beta\mu)zz'^3 + \alpha\beta z^2z'^3]y = 0,$$

(32.a.)

$$zz'y'' + [(\mu+\nu)z'^2 - (\alpha+\beta)zz'^2 - zz'']y' + [-(\alpha\nu+\beta\mu)z'^3 + \alpha\beta zz'^3]y = 0.$$

Es genügen denselben natürlich noch die nämlichen Integrale, welche in den vorhergehenden Paragraphen für die Gleichungen

(11.) und (32.) angegeben worden sind, wenn nur auch in den Integralen statt z die obenerwähnte Funktion von x gedacht wird*).

Man kann nun die Gleichungen (11.a.) und (32.a.) vortheilhaft benutzen, um aus ihnen unzählige lineare Differentialgleichungen nicht blos zweiter, sondern auch höherer Ordnungen sammt ihren Integralen abzuleiten. Bezeichnet man nämlich, sowohl in (11.a.) als in (32.a.), die Coefficienten von y'', y' und y der Reihe nach mit Z_2, Z_1 und Z_0, so dass jene Gleichungen jetzt in der Gestalt

$$Z_2 y'' + Z_1 y' + Z_0 y = 0 \qquad (37.)$$

erscheinen, und differentiirt diese Gleichung $n$mal nach x, so erhält man nach dem bekannten Theorem des Leibnitz:

(38.)

$$\left.\begin{array}{r} Z_2 \cdot \dfrac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} + \dbinom{n}{1} \cdot \dfrac{dZ_2}{dx} \cdot \dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \dbinom{n}{2} \cdot \dfrac{d^2 Z_2}{dx^2} \cdot \dfrac{d^n y}{dx^n} + \dots \\ + Z_1 \cdot \dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + \dbinom{n}{1} \cdot \dfrac{dZ_1}{dx} \cdot \dfrac{d^n y}{dx^n} + \dots \\ + Z_0 \cdot \dfrac{d^n y}{dx^n} + \dots \end{array}\right\} = 0.$$

Bricht nun diese Gleichung, für irgend eine bestimmte Funktion z von x, mit $\dfrac{d^m y}{dx^m}$ ab, so setze man

$$w = \frac{d^m y}{dx^m}; \qquad (39.)$$

man erhält alsdann eine lineare Differentialgleichung der $(n+2-m)$ten Ordnung in w sammt einem ihr genügenden Integral (39.), wenn nur in (39.) unter y das jedesmalige Integral der Gleichung (37.) verstanden wird.

---

*) Die Beziehungen zwischen den beiden Funktionen y und z, welche durch die Differentialgleichungen (11.a.) und (32.a.) und ihre Urgleichungen ausgedrückt sind, bestehen natürlich fort, welche der beiden Funktionen man auch als Unbekannte ansehen mag. Ordnet man daher z. B. die Gleichung (32.a.) nach Differentialquotienten von z, indem man z als unbekannte, y als beliebig gegebene Funktion von x betrachtet, so genügen der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y'zz'' + y[\alpha\nu + \beta\mu - \alpha\beta z]z'^3 + y'[-\mu - \nu + (\alpha+\beta)z]z'^2 - y''zz' = 0$$

noch immer die Integrale des §. 4., wenn in denselben unter y die nämliche gegebene Funktion von x verstanden wird.

Wie nützlich aber dieses Verfahren für die Integration linearer Differentialgleichungen sei, möge aus den folgenden Beispielen erkannt werden.

§. 6. Setzt man zuerst in Gleichung (11.) $z=x$, so dass

$$Z_2=x^2,$$

$$Z_1=(\mu+\nu-2\lambda)x-(\alpha+\beta)x^2,$$

$$Z_0=\lambda(\lambda+1-\mu-\nu)+(\lambda(\alpha+\beta)-\alpha\nu-\beta\mu)x+\alpha\beta x^2$$

wird, so ist die neue Gleichung von der ursprünglichen (11.) nicht verschieden. Substituirt man aber ihre Coefficienten Z_2, Z_1 und Z_0 in die Gleichung (38.), so bricht diese mit $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}$ ab, und man gelangt, $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=w$ setzend, zur folgenden linearen Differentialgleichung vierter Ordnung:

(40.)

$$\begin{aligned}
&x^2w''''+[(\mu+\nu-2\lambda+2n)x-(\alpha+\beta)x^2]w'''\\
&+\left[\begin{array}{l}\lambda(\lambda+1-\mu-\nu)+n(\mu+\nu-2\lambda+n-1)\\+((\lambda-2n)(\alpha+\beta)-\alpha\nu-\beta\mu)x+\alpha\beta x^2\end{array}\right]w''\\
&+n[(\lambda-n+1)(\alpha+\beta)-\alpha\nu-\beta\mu+2\alpha\beta x]w'+\alpha\beta n(n-1)w=0,
\end{aligned}$$

von welcher man jedesmal, unter den nämlichen Bedingungen für μ und ν, ein partikuläres Integral mit zwei willkührlichen Constanten findet, wenn man das betreffende allgemeine Integral der Gleichung (11.) $(n-2)$ mal nach x differentiirt.

Für $\alpha=0$ geht die Gleichung (40.) über in die folgende Gleichung dritter Ordnung:

(41.)

$$\begin{aligned}
&x^2w'''+[(\mu+\nu-2\lambda+2n)x-\beta x^2]w''\\
&+[\lambda(\lambda+1-\mu-\nu)+n(\mu+\nu-2\lambda+n-1)+\beta(\lambda-\mu-2n)x]w'\\
&+\beta n(\lambda-\mu-n+1)w=0,
\end{aligned}$$

welcher z. B. in dem Falle, dass μ und ν gleichzeitig positiv und kleiner als 1 sind, nach Gleichung (15.) das folgende partikuläre Integral genügt:

$$w=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\begin{array}{l}C_1.z^\lambda\int_0^\beta e^{xv}.v^{\mu-1}.(v-\beta)^{\nu-1}.dv\\+C_2.z^{\lambda+1-\mu-\nu}.\int_0^\beta e^{xv}.v^{-\nu}.(v-\beta)^{-\mu}.dv\end{array}\right].$$

Führt man in dasselbe vermittelst der Gleichung $v = \beta u$ die neue Veränderliche u ein, und nimmt die in beiden Gliedern sich ergebenden constanten Factoren mit in die willkürlichen Constanten hinein, so nimmt es die folgende etwas bequemere Gestalt an:

(42.)

$$w = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^1 e^{\beta ux} [C_1 x^\lambda . u^{\mu-1} . (1-u)^{\nu-1} + C_2 x^{\lambda+1-\mu-\nu} . u^{-\nu} . (1-u)^{-\mu}] du.$$

Natürlich kann auch in den übrigen Fällen, in welchen oben das Integral der Differentialgleichung (11.) angegeben wurde, ein partikuläres Integral der Gleichung (41.) in derselben Weise gefunden werden.

Setzt man in (41.) auch noch

$$\lambda = n + \mu - 1,$$

so zieht sie sich auf die folgende Gleichung zweiter Ordnung zurück:

(43.)

$$x^2 w'' + [(\nu - \mu + 2)x - \beta x^2] w' + [\nu(1-\mu) - \beta(n+1)x] w = 0,$$

welche ebenfalls unter den nämlichen Bedingungen, wie die Gleichung (11.), sich integriren lässt. Setzt man aber in (11.) Null statt α, x statt z, w statt y, λ_1 statt λ, μ_1 statt μ und ν_1 statt ν, so dass sie jetzt die Gestalt

(11'.)

$$x^2 w'' + [(\mu_1 + \nu_1 - 2\lambda_1)x - \beta x^2] w' + [\lambda_1(\lambda_1 + 1 - \mu_1 - \nu_1) - \beta(\mu_1 - \lambda_1)x] w = 0$$

annimmt, so coincidirt diese Gleichung mit der (43.), wenn man

$$\lambda_1 = \mu - 1, \quad \mu_1 = n + \mu, \quad \nu_1 = -n + \nu$$

setzt. Der Gleichung (11'.), welche aus der Gleichung (11.) für $\alpha = 0$ hervorgeht, entspricht daher das allgemeine Integral:

(44.)

$$w = \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 e^{\beta ux} [C_1 x^{n+\mu-1} . u^{\mu-1} . (1-u)^{\nu-1} + C_2 x^{n-\nu} . u^{-\nu} . (1-u)^{-\mu}] du,$$

wenn nur λ_1 negativ echt gebrochen und $= \mu - 1$, ferner μ_1 positiv (unecht) gebrochen und $= n + \mu$ und ν_1 negativ gebrochen und gleich $-n + \nu$ gedacht wird. — Wenn dabei gleichzeitig $\mu + \nu = 1$ stattfindet, so gilt (nach (25.)) das folgende allgemeine Integral:

(45.)

$$w = C_1 \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 e^{\beta u x} . x^{n+\mu-1} . u^{\mu-1} . (1-u)^{\nu-1} . \log[C_2 x u (1-u)] . du.$$

Wäre ferner in der Gleichung (11'.) $\lambda_1 = -1$, μ_1 positiv ganz und gleich $+n$ und ν_1 absolut genommen eben so gross aber negativ, nämlich gleich $-n$ (also $\mu = \nu = 0$), so hätte man zu der jetzigen Gleichung:

$$xw'' + (2-\beta x)w' - \beta(n+1)w = 0 \tag{46.}$$

aus (31.) das folgende scheinbar allgemeine Integral:

$$w = \frac{d^n}{dx^n}[x^{n-1}(C_1 + C_2 e^{\beta x})],$$

welches sich jedoch ersichtlich auf das blos partikuläre

$$w = C_2 . \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1} . e^{\beta x}) \tag{47.}$$

zurückzieht. Das andere partikuläre Integral wäre dann noch mittelst der bekannten Methode der Variation der willkürlichen Constanten hinzuzufinden.

Man setze endlich in den obigen Werthen von Z_2, Z_1, Z_0 Null statt λ, so dass aus ihnen die Coefficienten der Gleichung (32.), nämlich:

$$Z_2 = x,$$
$$Z_1 = \mu + \nu - (\alpha + \beta) x,$$
$$Z_0 = -\alpha\nu - \beta\mu + \alpha\beta x$$

hervorgehen, und wende auf diese jetzt die Gleichung (38.) an. Man kommt dadurch auf die folgende Gleichung dritter Ordnung:

(48.)

$$xw''' + [\mu + \nu + n - (\alpha + \beta)x]w''$$
$$+ [-\alpha\nu - \beta\mu - n(\alpha + \beta) + \alpha\beta x]w' + \alpha\beta n w = 0,$$

deren Integrale aus denjenigen der Gleichung (32.) erhalten werden, wenn man dieselben $(n-1)$mal nach x differentiirt, übrigens aber die Bedingungen beibehält, welche in §. 4. für diese Integrale angegeben sind.

Nimmt man auch noch $\alpha = 0$, so geht die vorige Gleichung in die folgende zweiter Ordnung über:

$$xw'' + (\mu + \nu + n - \beta x)w' - \beta(\mu + n)w = 0. \tag{49.}$$

Diese ist ein spezieller Fall der Gleichung (32.) für Null statt α und $n+\mu$ statt μ. Ihr Integral wäre z. B. in dem Falle, dass μ und ν beide positiv und kleiner als eins sind, das folgende:

(50.)

$$w = \frac{d^n}{dx^n}\int_0^1 e^{\beta ux}[C_1 . u^{\mu-1}.(1-u)^{\nu-1} + C_2 x^{1-\mu-\nu}.u^{-\nu}.(1-u)^{-\mu}].du.$$

§. 7. Man nehme ferner $z = x^2$, so ist nach (11.a.):

$$Z_2 = 2x^5,$$
$$Z_1 = 2[2(\mu+\nu-2\lambda)-1]x^4 - 4(\alpha+\beta)x^6,$$
$$Z_0 = 8\lambda(\lambda+1-\mu-\nu)x^3 + 8[\lambda(\alpha+\beta)-\alpha\nu-\beta\mu]x^5 + 8\alpha\beta x^7.$$

Nun werde $\alpha = 0$ gesetzt und mit $2x^3$ wegdividirt, so dass man

$$x^2 \quad \text{statt} \quad Z_2,$$
$$[2(\mu+\nu-2\lambda)-1]x - 2\beta x^3 \quad \text{statt} \quad Z_1$$

und

$$4\lambda(\lambda+1-\mu-\nu) + 4\beta(\lambda-\mu)x^2 \quad \text{statt} \quad Z_0$$

erhält; durch Anwendung der Gleichung (38.) auf diese letzteren Coefficienten ergibt sich folgende lineare Differentialgleichung vierter Ordnung:

(51.)

$$\begin{aligned} x^2 w'''' &+ [(2(\mu+\nu+n-2\lambda)-1)x - 2\beta x^3]w''' \\ &+ [n(2(\mu+\nu-2\lambda)+n-2) + 4\lambda(\lambda+1-\mu-\nu) + 2\beta(2(\lambda-\mu)-3n)x^2]w'' \\ &+ 2\beta n[4(\lambda-\mu)-3(n-1)]xw' + 2\beta n(n-1)[2(\lambda-\mu)-n+2]w = 0, \end{aligned}$$

welcher in dem Falle z. B., dass μ und ν beide positiv und kleiner als 1 sind, das partikuläre Integral mit zwei willkürlichen Constanten

(52.)

$$w = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\int_0^1 e^{\beta ux^2}[C_1 x^{2\lambda}u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1} + C_2 x^{2(\lambda+1-\mu-\nu)}u^{-\nu}(1-u)^{-\mu}]du$$

entspricht.

Setzt man in (51.) $2(\lambda-\mu)-n+2=0$, und bestimmt λ aus dieser Gleichung, so erhält man eine Gleichung dritter Ordnung sammt partikulärem Integral.

Wird in den obigen Coefficienten auch noch $\lambda = 0$ gesetzt, und nochmals mit x wegdividirt, so dass jetzt

$$x \quad \text{statt} \quad Z_2,$$

$$2(\mu+\nu)-1-2\beta x^2 \quad \text{statt} \quad Z_1$$

und

$$-4\beta\mu x \quad \text{statt} \quad Z_0$$

hervorgeht, so erhält man durch Anwendung der Gleichung (38.) die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung:

(53.)

$$xw''' + [2(\mu+\nu)+n-1-2\beta x^2]w'' - 4\beta(\mu+n)xw' - 2\beta n(2\mu+n-1)w = 0$$

sammt einem partikulären Integral:

(54.)

$$w = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^1 e^{\beta u x^2}[C_1 u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1} + C_2 x^{2-2(\mu+\nu)} u^{-\nu}(1-u)^{-\mu}]du.$$

Nimmt man in obigen Coefficienten auch noch $\mu+\nu = \frac{1}{2}$, so können dieselben nochmals mit x wegdividirt werden, und man erhält:

$$1 \quad \text{statt} \quad Z_2,$$

$$-2\beta x \quad \text{statt} \quad Z_1,$$

$$-4\beta\mu \quad \text{statt} \quad Z_0;$$

welche Werthe, in Gleichung (38.) eingesetzt, zur folgenden Differentialgleichung zweiter Ordnung führen:

$$w'' = 2\beta x w' + 2\beta(2\mu+n)w. \tag{55.}$$

So lange μ positiv und kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, genügt ihr das allgemeine Integral:

(56.)

$$w = \frac{d^n}{dx^n} \int_0^1 e^{\beta u x^2}[C_1 u^{\mu-1}.(1-u)^{-\mu-\frac{1}{2}} + C_2 x . u^{\mu-\frac{1}{2}}.(1-u)^{-\mu}]du.$$

§. 8. Von der Gleichung (32.a.) ausgehend, setzen wir $z = x^3$ und $\alpha = 0$, und erhalten, nachdem noch mit $3x^4$ wegdividirt worden ist, die Coefficienten:

$$Z_2 = x,$$

$$Z_1 = 3(\mu+\nu)-2-3\beta x^3,$$

$$Z_0 = -9\beta\mu x^2;$$

welche, nach Gleichung (38.) behandelt, die folgende Differentialgleichung vierter Ordnung:

$$xw'''' + [3(\mu+\nu)+n-2-3\beta x^3]w''' - 9\beta(\mu+n)x^2w'' - 9\beta n(2\mu+n-1)xw' \\ -3\beta n(n-1)(3\mu+n-2)w = 0 \tag{57.}$$

sammt einem partikulären Integral (für $\mu \substack{<1\\>0}$ und $\nu \substack{<1\\>0}$)

$$w = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_0^1 e^{\beta u x^3} [C_1 u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1} + C_2 x^{3-3(\mu+\nu)} u^{-\nu}(1-u)^{-\mu}] du \tag{58.}$$

liefern.

Nimmt man in den obigen Coefficienten auch noch $\mu+\nu=\frac{2}{3}$, so kann man dieselben nochmals mit x wegdividiren, und bekommt

$$\begin{array}{lll} 1 & \text{statt} & Z_2, \\ -3\beta x^2 & \text{statt} & Z_1, \\ -9\beta\mu x & \text{statt} & Z_0. \end{array}$$

Diese Werthe, in Gleichung (38.) substituirt, führen auf die Gleichung dritter Ordnung:

$$w''' = 3\beta x^2 w'' + 3\beta(3\mu+2n)xw' + 3\beta n(3\mu+n-1)w, \tag{59.}$$

welcher der, zwei willkürliche Constanten enthaltende Ausdruck

$$w = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^1 e^{\beta u x^3} [C_1 u^{u-1}.(1-u)^{-\mu-\frac{1}{3}} + C_2 x^{u-\frac{2}{3}}.(1-u)^{-\mu}] du \tag{60.}$$

unter der Voraussetzung Genüge leistet, dass μ positiv und kleiner als $\frac{2}{3}$ ist. — Die Gleichung (59.) ist aber dieselbe, welche Herr Spitzer im Archiv Thl. XXXVIII. S. 134. construirt hat.

§. 9. Es werde, ebenfalls in Gleichung (32.a.), $z = x^4$, $\alpha = 0$ und $\mu+\nu=\frac{3}{4}$ gesetzt, so werden ihre Coefficienten:

$$Z_2 = 1, \\ Z_1 = -4\beta x^3, \\ Z_0 = -16\beta\mu x^2.$$

Durch Substitution dieser Werthe in Gleichung (38.) resultirt die folgende Differentialgleichung vierter Ordnung:

(61.)

$$w'''' = 4\beta x^3 w''' + 4\beta(4\mu + 3n)x^2 w'' + 4\beta n(8\mu + 3n - 3)xw'$$
$$+ 4\beta n(n-1)(4\mu + n - 2)w,$$

zu welcher

(62.)

$$w = \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} \int_0^1 e^{\beta u x^4} [C_1 u^{\mu-1}(1-u)^{-\mu-\frac{1}{4}} + C_2 x . u^{\mu-\frac{3}{4}} . (1-u)^{-\mu}] du$$

als partikuläres Integral gehört, wenn nur μ positiv und kleiner als $\frac{3}{4}$ gedacht wird.

§. 10. Gehen wir wiederum von der Gleichung (11.a.) aus, und setzen in derselben $z = x^{-1}$, so werden ihre Coefficienten zunächst:

$$Z_2 = -x^{-4},$$
$$Z_1 = \quad (\mu + \nu - 2\lambda - 2)x^{-5} - (\alpha + \beta)x^{-6},$$
$$Z_0 = -\lambda(\lambda + 1 - \mu - \nu)x^{-6} - (\lambda(\alpha + \beta) - \alpha\nu - \beta\mu)x^{-7} - \alpha\beta x^{-8}.$$

Nimmt man jetzt $\alpha = 0$ und multiplicirt alle drei Ausdrücke mit $-x^7$, so erscheint:

$$x^3 \quad \text{statt} \quad Z_2,$$
$$\beta x - (\mu + \nu - 2\lambda - 2)x^2 \quad \text{statt} \quad Z_1$$

und

$$\beta(\lambda - \mu) + \lambda(\lambda + 1 - \mu - \nu)x \quad \text{statt} \quad Z_0.$$

Wendet man auf diese Werthe die Gleichung (38.) an, so erhält man die Differentialgleichung dritter Ordnung:

$$(63.) \qquad x^3 w''' + [\beta x + (2\lambda + 2 + 3n - \mu - \nu)x^2]w''$$
$$+ [\beta(n + \lambda - \mu) + (n(4\lambda + 3n + 1 - 2\mu - 2\nu) + \lambda(\lambda + 1 - \mu - \nu))x]w'$$
$$+ n[(n-1)(2\lambda + n - \mu - \nu) + \lambda(\lambda + 1 - \mu - \nu)]w = 0,$$

und ein partikuläres Integral derselben:

(64.)

$$w = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \int_0^1 e^{\frac{\beta u}{x}} [C_1 x^{-\lambda} u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1} + C_2 x^{\mu+\nu-1-\lambda} u^{-\nu}(1-u)^{-\mu}] du.$$

Setzt man in den obigen Coefficienten Z_2, Z_1, Z_0 auch noch $\lambda = \mu$, so lassen sich dieselben mit x wegdividiren, und es geht

$$Z_2 \quad \text{in} \quad x^2,$$
$$Z_1 \quad \text{in} \quad \beta + (2 + \mu - \nu)x$$
$$\text{und} \quad Z_0 \quad \text{in} \quad \mu(1 - \nu)$$

über. Aus diesen Werthen lässt sich durch unsere Methode die Differentialgleichung zweiter Ordnung:

(65.)

$$x^2 w'' + [\beta + (2n+2+\mu-\nu)x]w' + [n(n+1+\mu-\nu) + \mu(1-\nu)]w = 0$$

ableiten, deren allgemeines Integral

(66.)

$$w = \frac{d^n}{dx^n}\int_0^1 e^{\frac{\beta u}{x}}[C_1 x^{-\mu}.u^{\mu-1}(1-u)^{\nu-1} + C_2 x^{\nu-1}.u^{-\nu}(1-u)^{-\mu}]du$$

ist, wenn μ und ν beide positiv und kleiner als 1 gedacht werden.

§. 11. Es werde ferner in (11.a.) $z = x^{\frac{1}{2}}$ gesetzt, so erhält man:

$$Z_2 = \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}},$$
$$Z_1 = \tfrac{1}{4}(\mu+\nu-2\lambda+1)x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}(\alpha+\beta),$$
$$Z_0 = \tfrac{1}{8}\lambda(\lambda+1-\mu-\nu)x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{8}(\lambda(\alpha+\beta)-\alpha\mu-\beta\nu)x^{-1} + \tfrac{1}{8}\alpha\beta x^{-\frac{1}{2}}.$$

Nimmt man jetzt $\alpha = -\beta$ und $\nu = \mu$ und multiplicirt alle drei Coefficienten mit $8x^{\frac{3}{2}}$, so kommt:

$$4x^2 \quad \text{statt} \quad Z_2,$$
$$2[2\mu-2\lambda+1]x \quad \text{statt} \quad Z_1$$

und

$$\lambda(\lambda+1-2\mu) - \beta^2 x \quad \text{statt} \quad Z_0.$$

Substituirt man nun diese Werthe statt Z_2, Z_1 und Z_0 in die Gleichung (38.), so ergibt sich folgende Gleichung dritter Ordnung:

(67.)

$$4x^2 w''' + 2[2\mu-2\lambda+4n+1]xw''$$
$$+ [2n(2\mu-2\lambda+2n-1) + \lambda(\lambda+1-2\mu) - \beta^2 x]w' - n\beta^2 w = 0.$$

Es genügt derselben, so lange μ positiv echt gebrochen ist, das partikuläre Integral:

(68.)

$$w = \frac{d^{n-1}}{dx^{n+1}}\int_{-1}^{+1} e^{\beta u\sqrt{x}}[C_1 x^{-\frac{\lambda}{2}}.(1-u^2)^{\mu-1} + C_2.x^{\frac{1}{2}(\lambda+1-2\mu)}.(1-u^2)^{-\mu}]du.$$

Wird in den obigen Coefficienten auch noch $\lambda = 0$ gesetzt, so kann man dieselben mit x wegdividiren; bedient man sich alsdann der so umgewandelten Coefficienten, so führt unsere Methode zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$4xw'' + 2(2\mu + 2n + 1)w' - \beta^2 w = 0, \qquad (69.)$$

welcher unter der Bedingung, dass μ positiv und echt gebrochen ist,

(70.)

$$w = \frac{d^n}{dx^n}\int_{-1}^{+1} e^{\beta u\sqrt{x}}[C_1(1-u^2)^{\mu-1} + C_2 x^{\frac{1}{2}-\mu}.(1-u^2)^{-\mu}]du$$

als allgemeines Integral genügt. Für $\mu = \frac{1}{2}$ würde dasselbe jedoch auf ein partikuläres Integral zusammenschrumpfen; das allgemeine Integral erhält man in diesem Fall, von der Formel (25.) ausgehend, in folgender Gestalt:

$$w = C_1 \frac{d^n}{dx^n}\int_{-1}^{+1} \frac{e^{\beta u\sqrt{x}}}{\sqrt{1-u^2}}\log[C_2(1-u^2)\sqrt{x}]du. \qquad (71.)$$

§. 12. Gehen wir unmittelbar von der Gleichung (32.a.) aus, indem wir daselbst $z = x^{-\frac{1}{2}}$, $\alpha = -\beta$ und $\nu = \mu$ setzen, und schliesslich mit $-8x^5$ wegmultipliciren, so findet sich:

$$Z_2 = 4x^3,$$
$$Z_1 = -2(2\mu - 3)x^2,$$
$$Z_0 = -\beta^2;$$

und daraus, mit Hilfe der Gleichung (38.), die folgende Differentialgleichung dritter Ordnung:

(72.)

$$4x^3w''' = 2[2\mu - 6n - 3]x^2w'' + [4n(2\mu - 3n)x + \beta^2]w' + 2n(n-1)[2\mu - 2n + 1]w$$

Derselben genügt, unter der Bedingung eines positiv echt gebrochenen μ, der Ausdruck

(73.)

$$w = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\int_{-1}^{+1} e^{\frac{\beta u}{\sqrt{x}}}[C_1(1-u^2)^{\mu-1} + C_2 x^{\mu-\frac{1}{2}}(1-u^2)^{-\mu}]du$$

als partikuläres Integral.

§. 13. Setzen wir endlich in Gleichung (32.a.) $z = \log x$, so kommt:

$$Z_2 = \frac{\log x}{x},$$

$$Z_1 = \frac{\mu + \nu}{x^2} - (\alpha + \beta - 1).\frac{\log x}{x^2},$$

$$Z_0 = -\frac{\alpha\nu + \beta\mu}{x^3} + \frac{\alpha\beta\log x}{x^3}.$$

Wählt man nun $\mu=\nu=0$, und dividirt sodann mit $\frac{\log x}{x^3}$ weg, so erhält man die Differentialgleichung:

$$x^2y''-(\alpha+\beta-1)xy'+\alpha\beta y=0, \tag{74.}$$

welcher nach Formel (36.) das allgemeine Integral

$$y=C_1x^\alpha+C_2x^\beta \tag{75.}$$

genügt. Setzt man, noch weiter spezialisirend, $\alpha+\beta=1$, also $\beta=1-\alpha$, so hat man für die neue Gleichung:

$$x^2y''+(1-\alpha)\alpha y=0 \tag{76.}$$

das folgende allgemeine Integral:

$$y=C_1x^\alpha+C_2x^{1-\alpha}. \tag{77.}$$

Wollte man auf die Gleichung (74.) das Verfahren der Formel (38.) anwenden, so würde man zu keiner neuen Gleichung gelangen, indem die (74.) ihre Form beibehält, wie oft man sie auch differentiiren mag.

§. 14. Die Riccati'sche Gleichung. Setzt man in (32.a.) $z=x^m$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
Z_2 &= mx^{2m-1},\\
Z_1 &= m[m(\mu+\nu-1)+1]x^{2m-2}-m^2(\alpha+\beta)x^{3m-2},\\
Z_0 &= -m^3(\alpha\nu+\beta\mu)x^{3m-3}+\mu^3\alpha\beta x^{4m-3}.
\end{aligned}$$

Man wähle jetzt $\alpha=-\beta$, $\nu=\mu$ und $m=\frac{1}{1-2\mu}$, so bleibt, wenn man auch noch durch mx^{2m-1} wegdividirt, nur noch

$$\begin{array}{rll}
1 & \text{statt} & Z_2,\\
0 & \text{statt} & Z_1,\\
-\frac{\beta^2}{(1-2\mu)^2}\cdot x^{\frac{4\mu}{1-2\mu}} & \text{statt} & Z_0
\end{array}$$

übrig. Substituirt man diese Coefficienten in die Gleichung (32.a.), nachdem man noch

$$\frac{4\mu}{1-2\mu}=k \quad \text{oder} \quad \mu=\frac{k}{2k+4}, \tag{78.}$$

und

$$\beta=1-2\mu \quad \text{oder} \quad \beta=\frac{2}{k+2} \tag{79.}$$

gesetzt hat, so erhält man die bekannte Riccati'sche Gleichung:

$$y'' = x^k . y, \tag{80.}$$

deren vollständiges Integral sich demnach aus Gleichung (33.) nach wenigen Umformungen wie folgt ergibt:

(81.)

$$y = \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2u\sqrt{\xi}}{k+2}} [C_1(1-u^2)^{-\frac{k+4}{2k+4}} + C_2 x(1-u^2)^{-\frac{k}{2k+4}}] du.$$

Dieses Integral, in welchem ξ statt x^{k+2} steht, gilt, so lange μ oder $\frac{k}{2k+4}$ positiv und kleiner als 1 ist; dieses trifft aber zu: 1) für jeden positiven Werth von k und 2) für jeden negativen Werth von k zwischen -4 und $-\infty$.

Macht man in die Riccati'sche Gleichung (80.) die Substitution

$$\xi = x^{k+2}, \tag{82.}$$

so geht sie über in die folgende:

$$\xi . \frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{k+1}{k+2} . \frac{dy}{d\xi} - \frac{1}{(k+2)^2} . y = 0, \tag{83.}$$

welche mit der Gleichung (69.) in §. 11. übereinstimmt, so lange $\frac{k+1}{k+2}$ positiv und grösser als $\frac{1}{2}$ ist. Diess findet Statt zwischen $k = -2$ und $k = -4$, und man hat in diesem Falle das vollständige Integral der Riccati'schen Gleichung nach Formel (70.) in folgender Gestalt:

(84.)

$$y = \frac{d^n}{d\xi^n} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2u\sqrt{\xi}}{k+2}} [C_1(1-u^2)^{\mu-1} + C_2 . \xi^{\frac{1}{2}-\mu}(1-u^2)^{-\mu}] du.$$

Dabei muss n als positiv ganze und μ als positiv echt gebrochene Zahl aus der Gleichung

$$n + \mu + \tfrac{1}{2} = \frac{k+1}{k+2} \tag{85.}$$

bestimmt, und nach vollendeter Differentiation vermittelst der Gleichung (82.) x an die Stelle von ξ zurückgeführt werden.

Die Formel (84.) verliert jedoch ihre Geltung für $\mu = \frac{1}{2}$, d. h. wenn

$$\frac{k+1}{k+2} = n + 1, \tag{86.}$$

also gleich einer positiven ganzen Zahl wird; alsdann kann man aber das Integral der Formel (71.) entnehmen, und erhält:

$$y = C_1 \cdot \frac{d^n}{d\xi^n} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{2\mu u\sqrt{\xi}}{k+2}}}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \log [C_2(1-u^2)\sqrt{\xi}]\, du, \qquad (87.)$$

wenn nur n als positive ganze Zahl der Gleichung (36.) gemäss gewählt wird.

Die Formel (84.) wird ferner unbrauchbar, wenn μ in (85.) gleich Null ist, wenn also

$$\frac{k+1}{k+2} = n + \tfrac{1}{2} \qquad (88.)$$

gefunden wird, unter n wie bisher immer eine positive ganze Zahl verstanden. Findet man aber aus (88.)

$$k = -\frac{2n}{n-\frac{1}{2}},$$

und setzt diesen Werth statt k in den Ausdruck $\frac{k}{2k+4}$, welcher in (78.) mit μ bezeichnet war, so ergibt sich, wenn man nachträglich statt n lieber $n+1$ schreibt,

$$\frac{k}{2k+4} = n + 1. \qquad (89.)$$

Das dortige μ ist also in diesem Falle positiv ganz, und das Integral der Riccati'schen Gleichung ergibt sich in geschlossener Gestalt aus Formel (35.), wenn man daselbst $\alpha = -\beta = 2n+1$, $m = n$, und $z = x^{-\frac{1}{2n+1}}$ setzt, wie folgt:

(90.)

$$y = C_1\, e^{(2n+1)x^{-\frac{1}{2n+1}}} . S\left[(-1)^{\alpha} . \frac{(n+\alpha)^{n|-1} . n^{\alpha|-1} x^{\frac{n+\alpha+1}{2n+1}}}{2^{\alpha}.(2n+1)^{\alpha}}\right]$$

$$+ C_2 . e^{-(2n+1)x^{-\frac{1}{2n+1}}} . S\left[\frac{(n+\alpha)^{n|-1} . n^{\alpha|-1} . x^{\frac{n+\alpha+1}{2n+1}}}{2^{\alpha}.(2n+1)^{\alpha}}\right].$$

Dieses Integral gilt nicht nur, wenn n aus (89.) als positive ganze Zahl gefunden wird, sondern auch noch für $n = 0$, d. h. für $k = -4$.

Nun setze man noch in Gleichung (83.) $y = \xi^{\frac{1}{k+2}} . y_1$; so geh sie über in die folgende:

$$\xi \cdot \frac{d^2 y_1}{d\xi^2} + \frac{k+3}{k+2} \cdot \frac{dy_1}{d\xi} - \frac{1}{(k+2)^2} \cdot y_1 = 0, \qquad (91.)$$

welche mit der Gleichung (69.) übereinstimmt, so lange $\frac{k+3}{k+2}$ positiv und grösser als $\frac{1}{2}$ ist, d. h. wenn k zwischen 0 und -2 liegt. Man findet demnach zunächst y_1 aus Formel (70.) und daraus, nachdem man vor dem Differentiationszeichen $\xi^{\frac{1}{k+2}}$ nach Gleichung (82.) durch x ersetzt hat:

$$(92.)$$

$$y = x \cdot \frac{d^n}{d\xi^n} \int_{-1}^{+1} e^{\frac{2u\sqrt{\xi}}{k+2}} [C_1(1-u^2)^{\mu-1} + C_2 \xi^{\frac{1}{2}-\mu}(1-u^2)^{-\mu}] du.$$

Diese Formel gibt also das vollständige Integral der Riccati'schen Gleichung, wenn k zwischen 0 und -2 liegt. Dabei muss aber n als positiv ganze und μ als positiv gebrochene Zahl aus der Gleichung

$$n + \mu + \tfrac{1}{2} = \frac{k+3}{k+2} \qquad (93.)$$

bestimmt, und nach vollendeter Differentiation vermittelst der Gleichung:

$$\xi = x^{k+2} \qquad (82.)$$

x an die Stelle von ξ zurückgeführt werden. Die Formel (92.) verliert jedoch ihre Brauchbarkeit, sobald aus (93.) $\mu = \frac{1}{2}$ gefunden wird, wenn also

$$\frac{k+3}{k+2} = n+1 \qquad (94.)$$

eine positive ganze Zahl ist. Alsdann benutze man zur Auffindung von y_1 die Formel (71.); man erhält:

$$y = C_1 x \cdot \frac{d^n}{dx^n} \int_{-1}^{+1} \frac{e^{\frac{2u\sqrt{\xi}}{k+2}}}{\sqrt{1-u^2}} \log [C_2(1-u^2)\sqrt{\xi}] du. \qquad (95.)$$

Die Formel (92.) verliert ihre Geltung auch noch in den Fällen, wo

$$\frac{k+3}{k+2} = n + \tfrac{1}{2},$$

also $\mu = 0$ sich ergibt. Dann ist aber

$$k = -\frac{2n-2}{n-\frac{1}{2}}.$$

Wird dieser Werth in den Ausdruck $\frac{k}{2k+4}$ gesetzt, welcher in (78.) mit μ bezeichnet wurde, so findet man, wenn auch hier n durch $n+1$ ersetzt wird:

$$\frac{k}{2k+4} = -n. \tag{96.}$$

Das μ der Gleichung (78.) ist daher jetzt negativ ganz, und man erhält, indem man $\alpha = -\beta = -(2n+1)$, $m = n$ und $z = x^{\frac{1}{2n+1}}$ in die Gleichung (36.) substituirt, das allgemeine Integral der Riccati'schen Gleichung in geschlossener Form:

(97.)

$$y = C_1 \cdot e^{(2n+1)x^{\frac{1}{2n+1}}} \cdot S\left[(-1)^{\mathfrak{a}} \cdot \frac{(n+\mathfrak{a})^{n|-1} \cdot n^{\mathfrak{a}|-1} \cdot x^{\frac{n-\mathfrak{a}}{2n+1}}}{2^{\mathfrak{a}} \cdot (2n+1)^{\mathfrak{a}}}\right]$$

$$+ C_2 \cdot e^{-(2n+1)x^{\frac{1}{2n+1}}} \cdot S\left[\frac{(n+\mathfrak{a})^{n|-1} \cdot n^{\mathfrak{a}|-1} \cdot x^{\frac{n-\mathfrak{a}}{2n+1}}}{2^{\mathfrak{a}} \cdot (2n+1)^{\mathfrak{a}}}\right].$$

Dieses Integral gilt nicht nur, wenn n als positive ganze Zahl aus (96.) sich bestimmt, sondern auch, wenn $n=0$, d. h. $k=0$ ist.

Es wäre somit die Riccati'sche Gleichung für jeden reellen Werth von k vollständig integrirt, mit Ausnahme des speziellen Falles, wo $k = -2$. Für diesen Werth wird aber die Riccati'sche Gleichung identisch mit der früher behandelten (76.), und geht aus dieser hervor, wenn man

$$(1-\alpha)\alpha = 1$$

setzt und daraus

$$\alpha = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

bestimmt. Dieser Werth, in Formel (77.) eingeführt, liefert

$$y = C_1 \cdot x^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})} + C_2 \cdot x^{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})} \tag{98.}$$

als vollständiges Integral der Gleichung

$$x^2 y'' = y. \tag{99.}$$

VIII.

Miscellen.

Ueber die zwischen den Seiten des in einen Kreis beschriebenen regulären Fünfecks, Sechsecks und Zehnecks Statt findende Relation.

Von dem Herausgeber.

Der Beweis des bekannten Satzes, dass die Differenz der Quadrate der Seiten des in einen Kreis beschriebenen regulären Fünfecks und Zehnecks dem Quadrate des Halbmessers des Kreises gleich ist, macht in der Elementar-Geometrie immer einige Schwierigkeit. Dadurch ist neuerlich Herr Rector Dr. Grebe in Cassel, indem er zugleich ganz zweckmässig den von ihm zu den schönsten Sätzen der Elementar-Geometrie gezählten Satz so ausdrückt: „Wenn in einen Kreis regelmässige Polygone von fünf, sechs und zehn Seiten beschrieben sind, so ist das Quadrat der Fünfecksseite so gross als die Quadrate der Sechsecksseite und der Zehnecksseite zusammengenommen" in einer zu dem funfzigjährigen Doctorjubiläum des hochverdienten Gerling in Marburg verfassten Gratulationsschrift *) veranlasst worden, den Satz in die Stereometrie, nämlich in die Lehre von den regulären Körpern zu verweisen, wo er sich allerdings auch ganz leicht und gewissermaassen von selbst ergiebt. So gerne ich auch das Verdienst der zugleich noch manche andere lehrreiche

---

*) Bemerkung über einen Lehrsatz der Geometrie, dem Herrn Geheime Hofrath Dr. Chr. Ludw. Gerling u. s. w. am 21. Mai 1862, dem frohen Gedächtnisstage an die vor funfzig Jahren erfolgte Doctor-Promotion. als Zeichen der Liebe und Verehrung gewidmet von Dr. E. W. Grebe. Rector der Realschule in Cassel. Cassel, 1862. 4°.

Bemerkungen enthaltenden kleinen Schrift anzuerkennen bereit bin, so kann ich doch der vorstehenden Ansicht nicht ganz beistimmen, indem ich vielmehr der Meinung bin, dass man den ganzen Gegenstand überhaupt aus einem allgemeineren Gesichtspunkte auffassen sollte. Nach meiner Ansicht sollte man sich nämlich, ganz abgesehen von den regulären Vielecken, die allgemeinere Frage vorlegen: welchen Bedingungen zwei Sehnen eines Kreises, von denen die eine den einfachen, die andere den doppelten Bogen umspannt, unterworfen sind, wenn die Differenz ihrer Quadrate dem Quadrate des Halbmessers des Kreises gleich sein soll. Diese Frage wollen wir jetzt zu beantworten versuchen.

Wir denken uns also eine Sehne in einem mit dem Halbmesser r beschriebenen Kreise, und bezeichnen dieselbe durch s. Dieser Sehne entsprechen zwei Bogen des Kreises, die einander zur ganzen Peripherie ergänzen. Bezeichnen wir nun die Sehne des halben entsprechenden Bogens im Allgemeinen durch s_1, so haben wir, wie aus Taf. I. Fig. 4. auf der Stelle erhellet, die folgende Gleichung:

$$1) \quad \ldots\ldots \quad s_1^2 = \tfrac{1}{4}s^2 + (r \mp \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2})^2,$$

wo das obere Zeichen dem von der Sehne s umspannten Bogen, welcher kleiner als der Halbkreis ist, das untere dem von der Sehne s umspannten Bogen, welcher grösser als der Halbkreis ist, entspricht. Diese Gleichung bringt man durch Entwickelung des zweiten Quadrats auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens leicht auf die Form:

$$2) \quad \ldots\ldots \quad s_1^2 = 2r(r \mp \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2})$$

oder:

$$3) \quad \ldots\ldots \quad \pm 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}s^2} = 2r^2 - s_1^2,$$

woraus sich ferner, wenn man diese Gleichung quadrirt, sogleich die Gleichung:

$$4) \quad \ldots\ldots \quad s_1^4 - 4r^2s_1^2 + r^2s^2 = 0$$

ergiebt.

Soll nun $s^2 - s_1^2 = r^2$, also $s^2 = s_1^2 + r^2$ sein, so muss nach vorstehender Gleichung sein:

$$s_1^4 - 4r^2s_1^2 + r^2s_1^2 + r^4 = 0,$$
$$s_1^4 - 3r^2s_1^2 + r^4 = 0,$$

$$(s_1{}^4 - 2r^2s_1{}^2 + r^4) - r^2s_1{}^2 = 0,$$

$$(s_1{}^2 - r^2)^2 - r^2s_1{}^2 = 0;$$

also:

$$5) \quad \ldots \quad (s_1{}^2 + rs_1 - r^2)(s_1{}^2 - rs_1 - r^2) = 0$$

Folglich ist:

$$6) \quad \ldots \quad \begin{cases} \text{entweder} \quad s_1{}^2 + rs_1 - r^2 = 0, \\ \text{oder} \quad s_1{}^2 - rs_1 - r^2 = 0; \end{cases}$$

oder:

$$7) \quad \ldots \quad \begin{cases} \text{entweder} \quad s_1{}^2 = r(r - s_1), \\ \text{oder} \quad s_1{}^2 = r(r + s_1); \end{cases}$$

oder:

$$8) \quad \ldots \quad \begin{cases} \text{entweder} \quad r : s_1 = s_1 : r - s_1, \\ \text{oder} \quad r : s_1 = s_1 : r + s_1. \end{cases}$$

Durch Auflösung der Gleichung

$$s_1{}^2 + rs_1 - r^2 = 0 \quad \text{oder} \quad s_1{}^2 + rs_1 = r^2$$

in Bezug auf s_1 als unbekannte Grösse erhält man:

$$s_1 = \pm \tfrac{1}{2}r(\sqrt{5} \mp 1),$$

folglich, weil s_1 nicht negativ sein kann:

$$s_1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} r.$$

Nach dem Obigen ist $s^2 = r^2 + s_1{}^2$, also, wie man leicht findet:

$$s^2 = \frac{5 - \sqrt{5}}{2} r^2.$$

Aus der Gleichung

$$s_1{}^2 - rs_1 - r^2 = 0 \quad \text{oder} \quad s_1{}^2 - rs_1 = r^2$$

erhält man, wenn man dieselbe wieder in Bezug auf s_1 als unbekannte Grösse auflöst:

$$s_1 = \pm \tfrac{1}{2}r(\sqrt{5} \pm 1),$$

folglich, weil s_1 nicht negativ sein kann:

$$s_1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} r,$$

und, weil $s^2 = r^2 + s_1^2$ ist, wie man leicht findet:

$$s^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} r^2.$$

Nehmen wir beide Fälle zusammen, so ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$9) \quad \ldots \quad s^2 = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2} r^2, \quad s_1 = \frac{\sqrt{5} \mp 1}{2} r.$$

Man überzeugt sich leicht, dass weder s, noch s_1 den Durchmesser $2r$ übersteigt, und dass also die beiden Sehnen s und s_1 in den Kreis immer wirklich eingetragen werden können.

Natürlich entsprechen die oberen und unteren Zeichen in den vorstehenden Formeln respective den Fällen:

$$s_1^2 + rs_1 - r^2 = 0 \quad \text{und} \quad s_1^2 - rs_1 - r^2 = 0,$$

oder:

$$s_1^2 = r(r - s_1) \quad \text{und} \quad s_1^2 = r(r + s_1),$$

oder:

$$r : s_1 = s_1 : r - s_1 \quad \text{und} \quad r : s_1 = s_1 : r + s_1.$$

Setzen wir:

$$s^2 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} r^2, \quad s_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r;$$

so ist, wie man sogleich übersieht:

$$s > r, \quad s_1 < r;$$

also nach dem Obigen:

$$r < s < 2r, \quad s_1 < r.$$

Setzen wir:

$$s^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} r^2, \quad s_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} r;$$

so ist, wie man eben so leicht übersieht:

$$s > r, \quad s_1 > r;$$

also nach dem Obigen:

$$r < s < 2r, \quad r < s_1 < 2r.$$

Im ersten Falle ist:

$$s_1^2 = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 . r^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} r^2,$$

also:

$$2r^2 - s_1{}^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} r^2,$$

und diese Grösse folglich positiv; im zweiten Falle dagegen ist:

$$s_1{}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 . r^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} r^2,$$

also:

$$2r^2 - s_1{}^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} r^2,$$

und diese Grösse folglich negativ. Wegen der Gleichung 3) gehört also die Sehne s_1 im ersten Falle der Hälfte des kleineren, im zweiten Falle der Hälfte des grösseren der beiden von der Sehne s umspannten Bogen an.

Wir wollen nun in beiden Fällen die Sehne s_1 durch Construction bestimmen, indem wir dieser Construction die beiden aus dem Obigen bekannten Proportionen:

$$r : s_1 = s_1 : r - s_1,$$
$$r : s_1 = s_1 : r + s_1$$

zu Grunde legen. Zu dem Ende machen wir in Taf. I. Fig. 5. die Linie AC dem Halbmesser r gleich, errichten in A auf AC ein Perpendikel $AO = \frac{1}{2}r$, und beschreiben aus O als Mittelpunkt mit AO als Halbmesser einen Kreis, welcher von der durch C und O gelegten Geraden in den Punkten B und B' geschnitten wird; so ist $s_1 = BC$ in Bezug auf die Proportion

$$r : s_1 = s_1 : r - s_1,$$

und $s_1 = B'C$ in Bezug auf die Proportion

$$r : s_1 = s_1 : r + s_1.$$

Man kann auch noch aus C als Mittelpunkt mit den Halbmessern BC und $B'C$ Kreise beschreiben, von denen die gehörig über C hinaus verlängerte AC in D und D' geschnitten wird, wo dann auch $s_1 = CD$ in Bezug auf die Proportion

$$r : s_1 = s_1 : r - s_1,$$

und $s_1 = CD'$ in Bezug auf die Proportion

$$r : s_1 = s_1 : r + s_1$$

ist. Dies kann mittelst bekannter Sätze von dem Kreise und den Proportionen sehr leicht auf folgende Art bewiesen werden.

Es ist nach einer bekannten Eigenschaft des Kreises:

$$BC : AC = AC : B'C;$$

also:

$$BC : AC - BC = AC : \underbrace{B'C - AC},$$

$$BC : AC - BC = AC : \quad BC,$$

$$AC : \begin{cases} BC \\ CD \end{cases} = \begin{cases} BC \\ CD \end{cases} : \begin{cases} AC - BC \\ AC - CD \end{cases}$$

oder

$$AC : CD = CD : AD;$$

ferner:

$$\underbrace{AC + BC} : AC = AC + B'C : B'C,$$

$$B'C \quad : AC = AC + B'C : B'C,$$

$$AC : \begin{cases} B'C \\ CD' \end{cases} = \begin{cases} B'C \\ CD' \end{cases} : \begin{cases} AC + B'C \\ AC + CD' \end{cases}$$

oder

$$AC : CD' = CD' : AD';$$

womit offenbar die obigen Behauptungen vollständig bewiesen sind.

Wir wollen jetzt annehmen, dass in Taf. I. Fig. 6. der Punkt D in dem Halbmesser AC des beschriebenen Kreises nach dem Vorhergehenden so bestimmt sei, dass

$$AC : CD = CD : AD$$

ist, und wollen dann $s_1 = CD = AB$ als Sehne in den Kreis eintragen, worauf wir BC und BD ziehen. Weil nun

$$AC : CD = CD : AD,$$

also

$$AC : AB = AB : AD$$

ist, so sind die Dreiecke ABC und ABD ähnlich, und es ist folglich das zweite eben so wie das erste gleichschenklig, also $AB = BD = CD$, woraus, wenn wir den Winkel ACB am Mittelpunkte des Kreises durch x bezeichnen, auf der Stelle folgt, dass

$$\angle BAC = \angle ABC = \angle ADB = 2x,$$

und dass folglich $5x = 180^0$, also $x = 36^0$, nämlich der zehnte Theil von 360^0 ist. Also ist AB, und daher auch s_1, die Seite des in den Kreis beschriebenen regulären Zehnecks, also s die Seite des in den Kreis beschriebenen regulären Fünfecks, die

man erhält, wenn man den Bogen $A'B$ gleich dem Bogen AB macht und AA' zieht. Es ist $2x = 72^0$.

Ferner wollen wir annehmen, dass in Taf. I. Fig. 7. der Punkt D in der Verlängerung des Halbmessers AC des beschriebenen Kreises über den Punkt C hinaus nach dem Vorhergehenden so bestimmt sei, dass

$$AC : CD = CD : AD$$

ist, und wollen dann $s_1 = CD = AB$ als Sehne in den Kreis eintragen, worauf wir BC und BD ziehen. Weil nun

$$AC : CD = CD : AD,$$

also

$$AC : AB = AB : AD$$

ist, so sind die Dreiecke ABC und ABD ähnlich, und es ist folglich das zweite eben so wie das erste gleichschenklig, also $AB = BD = CD$, woraus sich, wenn wir wieder den Winkel ACB am Mittelpunkte des Kreises durch x bezeichnen, auf der Stelle ergiebt, dass

$$\angle BAC = \angle ABC = \angle ADB = x - (180^0 - x) = 2x - 180^0,$$

folglich

$$x + (2x - 180^0) + (2x - 180^0) = 5x - 360^0 = 180^0,$$

also $5x = 540^0$, $x = 108^0$ ist. s erhält man, wenn man den Bogen $A'B = AB$ macht und AA' zieht, wobei man zu bemerken hat, dass $2x = 216^0$ ist.

In beiden Fällen findet also mit Bezug auf Taf. I. Fig. 6. und Taf. I. Fig. 7. die Relation:

$$\overline{AA'}^2 - \overline{AB}^2 = r^2$$

Statt.

Die leicht durch sich selbst verständliche Fig. 8. auf Taf. I. hat gedient, die Richtigkeit des Vorhergehenden praktisch zu prüfen, wobei ich nur bemerken will, dass immer $72^0 + 108^0 = 180^0$ ist. Dass die beiden rechtwinkligen Dreiecke, deren Seiten s, s_1, r sind, einander ähnlich sind, erhellet leicht, weil

$$r : \frac{\sqrt{5}-1}{2} r = \frac{\sqrt{5}+1}{2} r : r \text{ oder } 1 : \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} : 1$$

ist, wie sogleich daraus hervorgeht, dass offenbar

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{2}=1$$

ist. Ueberhaupt sind die gleichen Verhältnisse der drei Seiten der beiden ähnlichen Dreiecke:

$$r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}:r:\frac{\sqrt{5}-1}{2}r=r\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}:\frac{\sqrt{5}+1}{2}r:r$$

oder:

$$\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}:1:\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}:\frac{\sqrt{5}+1}{2}:1.$$

Ich komme vielleicht späterhin auf die Beantwortung ähnlicher allgemeinerer Fragen wie die obige zurück, und empfehle für jetzt nur das Vorstehende der weiteren Beachtung der Leser.

Ueber den Beweis der drei Brüder für den Ausdruck des Flächeninhalts des Dreiecks durch die drei Seiten.

Von dem Herausgeber.

Herr Dr. Paul Escher in Wien hat mir schon vor geraumer Zeit, und weit früher als der in Thl. XXXIX. Nr. XI. S. 186. abgedruckte Aufsatz von Herrn Kinkelin in Basel mir zuging, für das Archiv eine ziemlich ausführliche Anzeige des folgenden, mir übrigens ganz unbekannten Werkchens eingesandt:

> Ebene Geometrie. Ein Leitfaden beim Unterricht. Von Rektor F. von Kieser, Vorstand der königlichen Realschule in Stuttgart. Vierte Auflage. Nach des Verfassers Tode umgearbeitet und vermehrt von W. G. F. Bohnenberger, Professor am theologischen Seminar in Blaubeuren. Stuttgart, Verlag von Adolph Oetinger. 1859.

Aus verschiedenen Gründen, die weiter kein Interesse für die Leser des Archivs haben können, habe ich aber diese Anzeige nicht abdrucken lassen. Jedoch will ich jetzt, da ich gern jederzeit allen meinen Correspondenten und Mitarbeitern so viel als irgend möglich gerecht zu werden suche, bemerken, dass der Herr Einsender in derselben den verstorbenen Kieser als einen der trefflichsten Lehrer bezeichnet, eben so wie den jetzigen Rector der mathematischen Abtheilung der polytechnischen Schule

in **Stuttgart**, Herrn Dr. **Bernhard Gugler**, dessen persönliche Bekanntschaft gemacht zu haben, zu meinen eigenen angenehmsten Erinnerungen aus dem Jahre 1856 gehört. Weiter sagt dann der Herr Einsender über das **Kieser**'sche Buch sehr viel Rühmliches, bemerkt, dass er sich enthalte, einzelne interessante Partieen aus demselben auszuheben, so viel Veranlassung dazu das ausgezeichnete Buch auch biete, und fährt dann wörtlich folgendermaassen fort:

„Doch kann ich mich nicht enthalten, den Leser wenigstens mit einer darin vorkommenden Neuerung bekannt zu machen, die wohl an und für sich schon verdient, in weiteren Kreisen bekannt zu werden, und die zugleich hinlänglich erkennen lässt, zu welchen Erwartungen das besagte Buch in constructiver Beziehung berechtigt.“

„Bekanntlich lässt sich die Formel für den in den drei Seiten eines Dreiecks ausgedrückten Flächeninhalt desselben sowohl algebraisch, als trigonometrisch herleiten. Eine rein-geometrische Herleitung derselben besassen wir aber früher nicht, und so kam es, dass Lehrbücher der Geometrie, welche bei ihren Entwickelungen weder algebraische, noch trigonometrische Kenntnisse voraussetzten, die besagte Formel für den Dreiecksinhalt entweder gar nicht enthalten oder den Leser erst in einem eigens hiezu aufgestellten Anhang damit bekannt machten. In dem Nachlasse **Kieser**'s fand sich nun eine rein-geometrische Entwickelung dieser Formel vor, welche von Prof. **Bohnenberger** in die vierte Auflage des **Kieser**'schen Buches aufgenommen wurde und welche ich hiermit im Auszuge folgen lasse.“

„Beschreibt man zwei Kreise, von denen der eine in Taf. I. Fig. 9. die drei Seiten AB, AC und BC eines Dreiecks ABC beziehungsweise in den Punkten D, E und F, der andere die eine BC dieser Seiten und die Verlängerungen der zwei andern AB und AC in den Punkten G, H und J berührt, und verbindet man den Mittelpunkt O des ersten Kreises mit den Punkten A, B, C, D, E und F, den Mittelpunkt Q des zweiten Kreises mit den Punkten A, B, C, G, H und J durch gerade Linien; so ist klar, dass die AQ mit der AO zusammenfallen, QB senkrecht auf OB und QC senkrecht auf OC stehen muss.“

„Bezeichnet man ferner der Kürze halber die Längen der drei Seiten AB, AC und BC des Dreiecks ABC mit c, b und a, die Länge seines Umfangs mit s, seinen Flächeninhalt mit Δ, und die Längen der Radien OD und QH mit r_1 und r_2, so findet man zunächst, weil

Fläche ABC = Fläche AOB + Fläche AOC + Fläche BOC

ist, dass

$$\Delta = \frac{c.r_1}{2} + \frac{b.r_1}{2} + \frac{a.r_1}{2} = \frac{a+b+c}{2}.r_1.$$

d. h. dass

$$\text{I)} \quad \Delta = \tfrac{1}{2}.s.r_1$$

sein muss.

Berücksichtigt man ferner, dass

$$BG = BH, \quad CG = CJ$$

ist, so findet man, dass

$$\begin{aligned} AB + AC + BC &= AB + AC + BG + CG \\ &= AB + AC + BH + CJ \\ &= AH + AJ \\ &= 2.AH, \end{aligned}$$

also

$$\text{II)} \quad \text{die Länge von } AH = \frac{a+b+c}{2} = \tfrac{1}{2}s$$

und

$$\text{III)} \quad \text{die Länge von } BH = \tfrac{1}{2}s - c$$

ist. Ebenso ergibt sich aber, weil

$$AE = AD, \quad BF = BD \text{ und } CF = CE$$

ist, dass

$$\begin{aligned} AB + BC - AC &= AB + BC - (AE + CE) \\ &= AB + BC - (AD + CF) \\ &= BD + BF \\ &= 2.BD \end{aligned}$$

und dass

$$\begin{aligned} AB + AC - BC &= AB + AC - (BF + CF) \\ &= AB + AC - (BD + CE) \\ &= AD + AE \\ &= 2.AD, \end{aligned}$$

dass also

$$\text{IV)} \quad \text{die Länge von } BD = \frac{a+c-b}{2} = \tfrac{1}{2}s - b$$

und

$$\text{V) die Länge von } AD = \frac{b+c-a}{2} = \tfrac{1}{2}s - a$$

ist. Bedenken wir endlich, dass wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke AQH und AOD

$$QH : AH = OD : AD, \text{ d. h. } r_2 : \tfrac{1}{2}s = r_1 : (\tfrac{1}{2}s - a),$$

und wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke BQH und BOD

$$BH : QH = OD : BD, \text{ d. h. } (\tfrac{1}{2}s - c) : r_2 = r_1 : (\tfrac{1}{2}s - b)$$

sich verhält, so finden wir sogleich die weitere Proportion:

$$(\tfrac{1}{2}s - c) : \tfrac{1}{2}s = r_1^2 : [(\tfrac{1}{2}s - a)(\tfrac{1}{2}s - b)],$$

aus welcher folgt:

$$\tfrac{1}{2}s . r_1^2 = (\tfrac{1}{2}s - a)(\tfrac{1}{2}s - b)(\tfrac{1}{2}s - c).$$

Wir erhalten sonach (vergl. Nr. I)):

$$\varDelta^2 = (\tfrac{1}{2}s)^2 . r_1^2 = \tfrac{1}{2}s . (\tfrac{1}{2}s - a)(\tfrac{1}{2}s - b)(\tfrac{1}{2}s - c),$$

also

$$\varDelta = \sqrt{\tfrac{1}{2}s . (\tfrac{1}{2}s - a)(\tfrac{1}{2}s - b)(\tfrac{1}{2}s - c)},$$

w. z. b. w."

So weit Herr P. Escher. Oben habe ich schon bemerkt, dass die von demselben mir eingesandte Anzeige des Kieserschen Buchs sich schon geraume Zeit vorher, als ich den in Thl. XXXIX. Nr. XI. S. 186. abgedruckten Aufsatz des Herrn Kinkelin in Basel erhielt, in meinen Händen befand. Diesen letzteren Aufsatz theilte ich namentlich deshalb mit, weil er eine Uebersetzung aus einem seltenen, auf der Baseler Bibliothek befindlichen Manuscript ist. Denn sonst ist der Beweis der drei Brüder für den Ausdruck des Inhalts des Dreiecks durch die drei Seiten, mit dem, wie man leicht sehen wird, der in des verstorbenen Kieser Nachlass aufgefundene und durch Herrn Professor Bohnenberger mitgetheilte Beweis dem Wesentlichen und der Hauptsache nach ganz übereinstimmt, längst bekannt. M. s. z. B. des berühmten Jesuiten Christoph Clavius „Geometria practica. Lugduni 1607. 4°. p. 158—161."; wahrscheinlich wird der Beweis sich auch finden in D. Schwenters „Geometriae practicae novae et auctae Tractatus II. Norimb. 1623. 4°. p. 111—118." Ferner findet sich derselbe auch auf p. 40. und p. 41. der „Geometria practica" des Leonardo Pisano, durch deren Herausgabe der Fürst Baldassarre Boncompagni in Rom sich, so wie durch seine Publicationen über Leonardo

Pisano überhaupt, und andere wichtige Werke, so sehr verdient gemacht hat und immer noch fortwährend macht, was von den Mathematikern nicht dankbar genug erkannt werden kann. Dass ich in meiner Anzeige des genannten schönen Werks im Literarischen Berichte Nr. CLIV. S. 2. nicht besonders darauf hinwies, dass der Beweis darin enthalten sei, hatte seinen Grund einfach darin, weil ich den Beweis für hinreichend bekannt hielt; denn er findet sich, ausser in den oben genannten älteren Werken, im Wesentlichen namentlich auch in einem sehr bekannten, besonders wegen seiner ungemein vielen, höchst schätzenswerthen, von der grössten Gelehrsamkeit zeugenden ausführlichen historischen und literarischen Excurse ausgezeichneten neueren Buche eines trefflichen würtembergischen Mathematikers, der, wie viele seiner Landsleute, wobei ich nur an die Namen von J. G. F. v. Bohnenberger, Camerer, Hauber, J. F. Pfaff *) u. A. zu erinnern brauche, einer der grössten Kenner der synthetischen Geometrie war, nämlich in: „Ebene Trigonometrie mit Anwendungen und Beiträgen zur Geschichte derselben. Von Pfleiderer. Tübingen 1802. S. 109." — Weil der Beweis aber doch nicht so bekannt zu sein scheint, wie ich glaubte voraussetzen zu dürfen, und weil er allerdings verdient, bei'm Unterrichte benutzt zu werden, so habe ich weiterer Bekanntwerdung desselben wegen die Kieser'sche, ziemlich einfache Darstellung, wie sie mir von Herrn Dr. Escher zugesandt worden ist, im Obigen gern mitgetheilt.

---

*) Professor in Helmstädt und Halle, aber Würtemberger von Geburt und Schüler der Karlsschule, mein eigener mir unvergesslicher Lehrer.

Berichtigung.

In Hrn. Prof. Oettinger's Aufsatz: „Ueber bestimmte Integrale" Thl. XXXIX. steht S. 252. Z. 7. v. o. in der Formel Nr. 9): $\int_0^1 \frac{x^{p+1}(\lg x)^r}{1+x^q}\partial x$. Es muss heissen: $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg x)^r}{1+x^q}\partial x$.

IX.

Sur la formation et la décomposition des équations exprimant les côtés et les diagonales des polygones réguliers.

Par

Monsieur ***Buys Ballot***,

Professeur à Utrecht.

---

§. 1.

Décomposition des équations numériques en facteurs.

1. Dans une note publiée par l'Académie Royale des sciences d'Amsterdam j'ai montré qu'on peut trouver les facteurs d'une équation algébrique, s'ils ont des coefficients entiers, en discutant les diviseurs des derniers termes de l'équation et des équations qu'on en dérive en augmentant et en diminuant les racines successivement d'une et de plusieurs unités.

2. Soit $f(x)$ une équation, il faut en tout cas pour l'approximation des racines former les équations $f(x+1)$, $f(x+2)$, etc. En général je forme $f(x-3)$ et $f(x+3)$. Cela fait on a par une simple addition des coefficients les valeurs des derniers termes de $f(x-2)$, $f(x+1)$, $f(x+4)$, c. a. d. $f(-2)$, $f(+1)$, $f(+4)$. Par une soustraction des coefficients d'ordre pair de ceux d'ordre impair (comme en cherchant la divisibilité par le nombre onze) on peut former $f(-4)$, $f(-1)$, $f(+2)$. En ajoutant $f(-3)$, $f(0)$, $f(+3)$, on a une suite:

$$f(-4),\quad f(-3),\quad f(-2),\quad f(-1),\quad f(0),\quad f(1),\quad f(2),\quad f(3),\quad f(4).$$

Or si l'équation $f(x)$ a des facteurs, supposons deux: $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, on aura:

$$f(-4)=\varphi(-4)\times\psi(-4),\quad f(-3)=\varphi(-3)\times\psi(-3),\ \text{etc.}$$

Ces nombres $\varphi(-4)$, $\varphi(-3)$, $\varphi(-2)$, etc. seront des nombres entiers, si l'équation $\varphi(x)$ a des coefficients entiers. Le réciproque ne sera pas vrai en général, mais on pourra voir s'il a lieu dans un cas particulier. Il faut voir si $\varphi(-4)$, $\varphi(-3)$, $\varphi(-2)$, etc. forment une série arithmétique du premier, du deuxième, du troisième, du quatrième ordre. J'ai donné des règles faciles pour cela. Donc si cinq valeurs consécutives: $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, $\varphi(3)$, $\varphi(4)$ forment une telle série du quatrième ordre, il y a un facteur $\varphi(x)$ du quatrième degré, et on peut simplifier l'équation $f(x)$ en divisant. Ainsi une équation du huitième degré peut être résolue même quand les conditions connues entre les racines ne sont pas satisfaites.

Ces règles sont beaucoup plus commodes que celles qu'on trouve dans les Disquisitiones arithmeticae de M. Gauss.

3. Pour donner un exemple, ce qui ne sera probablement pas superflu, soit donnée l'équation qui se trouve aussi dans cette note (page 145.):

$$x^6-12x^5+54x^4-113x^3+111x^2-45x+5=0=f(x),$$

on trouve:

$$\begin{array}{cccccc} f(-1), & f(0), & f(1), & f(2), & f(3), & f(4) \\ = & = & = & = & = & = \\ 341 & 5 & 1 & -1 & 5 & 1 \end{array}$$

341 a pour diviseurs 11 et 31, les diviseurs des autres nombres sont ± 1 et ± 5. Par la relation

$$f(p)=f(q)+\frac{p-q}{1}\Delta_1+\frac{(p-q)(p-q-1)}{1.2}\Delta_2+\text{ etc.}$$

on a: $f(p)\equiv f(q) \bmod. (p-q)$.

Si donc il y a un facteur $\psi(x)$, il faut que

$$\psi(-1)\equiv\psi(1)\equiv\psi(3) \bmod. 2,\quad \psi(-1)\equiv\psi(3) \bmod. 4,$$
$$\psi(-1)\equiv\psi(2) \bmod. 3,\qquad \psi(-1)\equiv\psi(4) \bmod. 5,$$
$$\psi(4)\equiv\psi(1) \bmod. 3.$$

Soit $\psi(-1)=11$, il faut avoir:

$$\psi(2)=-1,\quad \psi(4)=+1,\quad \psi(1)=+1,$$

pour $\psi(3)$ on peut opter entre -1 et -5,

„ $\psi(0)$ „ „ „ „ $+5$ „ $+1$.

En effet les valeurs correspondantes congruentes sont $+5$ avec -1 et $+1$ avec -5, donc on n'a à essayer qu'une seule fois:

$$\begin{array}{cccccccccccc} \psi(-1), & & \psi(0), & & \psi(1), & & \psi(2), & & \psi(3), & & \psi(4) \\ 11 & & 5 & & 1 & & -1 & & -1 & & +1 \\ & 6 & & 4 & & 2 & & 0 & & -2 & \\ & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

Il y a donc un facteur

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0 \equiv \psi(x),$$

$$\psi(0) = \beta = 5, \quad \psi(1) = 1 + \alpha + \beta = 1;$$

d'où il résulte:

$$\alpha = -5, \quad \beta = +5.$$

Ainsi:

$$\psi(x) = x^2 - 5x + 5 = 0.$$

Ensuite on obtient par la division:

$$f(x) = (x^2 - 5x + 5)(x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 8x + 1) = 0.$$

§. 2.

Formation des équations relatives aux côtés des polygones de 3 et 5, de 7 et 9, de 15 et 17 côtés et application de la paragraphe précédente.

1. Dans la dite note j'ai décomposé une équation du neuvième et une autre du dixième degré en montrant les difficultés; mais après cela j'ai appliqué la méthode à la solution de plusieurs équations exprimant les relations entre les côtés et les diagonales des polygones réguliers. C'est cette appliquation par laquelle on trouve ces côtés d'une nouvelle manière que j'ai l'honneur d'offrir avec plus de détail.

2. La formation de ces équations est très simple. Le côté du polygone de n côtés est la corde de $\frac{360^0}{n}$; les diagonales sont les cordes de $2 \times \frac{360^0}{n}$, $3 \times \frac{360^0}{n}$, ..., $(n-1) \times \frac{360^0}{n}$.

Par un procédé élémentaire on déduit la corde de $2 \times \frac{360^0}{n}$ (x) de la corde de la moitié des degrés, c. a. d. de la corde de $\frac{360^0}{n}$ (v) par la formule:

$$x^2 = v^2(4 - v^2). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Si y est la corde de $4\times\frac{360^0}{n}$, z celle de $8\times\frac{360^0}{n}$, u celle de $16\times\frac{360^0}{n}$, on a de même:

$$y^2 = x^2(4-x^2), \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$
$$z^2 = y^2(4-y^2), \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$
$$u^2 = z^2(4-u^2), \quad \ldots\ldots\ldots (4)$$

etc.

3. Le nombre n des côtés du polygone étant ici toujours supposé impair, en formant la série $\frac{360^0}{n}$, $2\times\frac{360^0}{n}$, $4\times\frac{360^0}{n}$,..., $2^m\times\frac{360^0}{n}$, l'exposant (m) deviendra tôt ou tard tel que $2^m\pm 1$ est multiple de n. Alors la corde de $2^m\times\frac{360^0}{n}$ est la même que celle de $\frac{360^0}{n}$, c. a. d.: Cette diagonale est redevenue côté du polygone. Car on a:

$$\frac{2^m+1}{n}\times 360^0 - \frac{2^m}{n}\times 360^0 = \frac{360^0}{n}$$

et

$$\frac{2^m}{n}\times 360^0 - \frac{2^m-1}{n}\times 360^0 = \frac{360^0}{n}.$$

Dans le triangle équilatéral: corde de $2\times\frac{360^0}{3}$ = corde de $\frac{360^0}{3}$,
„ le pentagone régulier: „ „ $4\times\frac{360^0}{5}$ = „ „ $\frac{360^0}{5}$,
„ le septagone „ „ „ $8\times\frac{360^0}{7}$ = „ „ $\frac{360^0}{7}$,
„ l'ennéagone „ „ „ $8\times\frac{360^0}{9}$ = „ „ $\frac{360^0}{9}$,
„ le polygone de quinze côtés: „ „ $16\times\frac{360^0}{15}$ = „ „ $\frac{360^0}{15}$,
„ le polygone de dix-sept côtés: „ „ $16\times\frac{360^0}{17}$ = „ „ $\frac{360^0}{17}$,
etc. etc.

Donc si $n=3$, on pose $v=x$ et l'on obtient l'équation qui caractérise le triangle équilatéral.

Si $n=5$, on a $v=y$; donc par l'élimination de x entre (2) et (1), on obtient l'équation qui caractérise le pentagone régulier.

Si $n=7$ ou $=9$, on a $v=z$, donc en éliminant x et y entre (3), (2) et (1), on obtient l'équation caractérisant le septagone et l'ennéagone réguliers. Si $n=15$ ou $=17$, on a $v=u$, ainsi par l'élimination de x, y et z entre (4), (3), (2) et (1) on obtient l'équation qui caractérise les polygones réguliers de quinze et de dix-sept côtés.

4. Le résultat de ces éliminations est:

Pour le triangle: $x^2=v^2(4-v^2)$, $v=x$ donne: $x^2-3=0$.

Pour le pentagone: $y^2=v^2(4-v^2)\{4-v^2(4-v^2)\}$, $v=y$ donne:

$$y^6-8y^4+20y^2-15=(y^2-3)(y^4-5y^2+5)=0.$$

Le facteur y^2-3 se répète ici et partout puisque le côté du triangle se retrouve toutes les fois qu'on prend la corde de deux fois, quatre fois, 2^m fois son arc.

$y^4-5y^2+5=0$ donne le côté et la diagonale du pentagone régulier.

5. Pour les polygones réguliers de 7 et 9 côtés on a:

$$z^2=v^2(16-20v^2+8v^4-v^6).(4-16v^2+20v^4-8v^6+v^8),$$

$v=z$ donne:

$$z^{14}-16z^{12}+104z^{10}-352z^8+660z^6-672z^4+336z^2-63=0$$
$$=(z^2-3)(z^{12}-13z^{10}+65z^8-157z^6+189z^4-105z^2+21).$$

Le premier facteur est encore le facteur pour le triangle. Le second facteur doit renfermer les équations du septagone et de l'ennéagone. Tâchons de les séparer. Pour faciliter le calcul écrivons Z pour z^2 de sorte que nous avons:

$$Z^6-13Z^5+65Z^4-157Z^3+189Z^2-105Z+21=0.$$

Cette équation soit designée par $f(Z)=0$, on a:

$$f(-1)=+551,\quad f(0)=+21,\quad f(+1)=+1,\quad f(+2)=-1,$$
$$f(+3)=+3,\quad f(+4)=+1,$$

or:

$$\begin{aligned}
f(-1)&=+551=-19\times-29,\\
f(0)&=+\ 21=-\ 3\times-\ 7,\\
f(1)&=+\ \ 1=+\ 1\times+\ 1,\\
f(2)&=-\ \ 1=-\ 1\times+\ 1,\\
f(3)&=+\ \ 3=-\ 3\times-\ 1,\\
f(4)&=+\ \ 1=+\ 1\times+\ 1.
\end{aligned}$$

Chacune de ces deux séries verticales de diviseurs forme une série arithmétique du troisième ordre. On pose donc:

$$\psi(Z) = Z^3 + aZ^2 + bZ + c = 0,$$

dans laquelle:

$$\psi(0) = -7 = c, \quad \psi(1) = 1 = 1 + a + b + c, \quad \psi(2) = 1 = 8 + 4a + 2b + c.$$

Il en résulte des valeurs entières pour a, b et c:

$$a = -7, \quad b = 14, \quad c = -7.$$

Donc $Z^3 - 7Z^2 + 14Z - 7 = 0$ ou $z^6 - 7z^4 + 14z^2 - 7 = 0$ est un des facteurs de l'équation $f(Z)$.

L'autre facteur s'obtient en divisant ou bien en analysant l'autre suite de diviseurs:

$$-19, \quad -3, \quad +1, \quad -1, \quad -3, \quad +1.$$

Ce facteur est:

$$z^6 - 6z^4 + 9z^2 - 3 = 0.$$

Celui-ci est l'équation de l'ennéagone, car les valeurs $+1$ de $\psi(1)$ et -1 de $\psi(2)$ indiquent qu'elle a une racine entre (1) et (2), ce qui doit être pour l'ennéagone et non pour le septagone, dont l'équation est donc le premier facteur:

$$z^6 - 7z^4 + 14z^2 - 7 = 0.$$

6. En dernier lieu on trouve par l'élimination de x, y et z entre (4), (3), (2) et (1):

$$u^2 = v^2(64 - 33v^2 + 672v^4 - 660v^6 + 352v^8 - 104v^{10} + 16v^{12} - v^{14})$$

$$\times (4 - 64v^2 + 33v^4 - 672v^6 + 660v^8 - 352v^{10} + 104v^{12} - 16v^{14} + v^{16}),$$

$u = v$ donne:

$$u^{30} - 32u^{28} + 464u^{26} - 4032u^{24} + 23400u^{22} - 95680u^{20} + 283360u^{18}$$

$$-615296u^{16} + 980628u^{14} - 1136960u^{12} + 940576u^{10} - 537472u^8$$

$$+201552u^6 - 45696u^4 + 5440u^2 - 255 = 0.$$

Il faut y avoir pour facteurs $u^2 - 3$ et $u^4 - 5u^2 + 5$, par ce que le triangle et le pentagone doivent être compris dans l'équation. Si l'on profite de cette remarque, on peut écrire les trois facteurs explicitement:

$$(u^2-3)(u^4-5u^2+5)(u^{24}-24u^{22}+252u^{20}-1521u^{18}+5832u^{16}-14824u^{14}$$

$$+25313u^{12}-28832u^{10}+21352u^8-9809u^6+2584u^4-340u^2+17)=0.$$

Le dernier facteur soit désigné par $\chi(U)$, après avoir posé $u^2 = U$. Puisqu'on ne cherche pas des facteurs d'un degré plus elevé que du quatrième, il suffit d'avoir ces cinq valeurs:

$$\begin{aligned}
\chi(-1) &= 110701 = 3571 \times 31, \\
\chi(0) &= 17 = 17 \times 1, \\
\chi(1) &= 1 = 1 \times 1, \\
\chi(2) &= 1 = 1 \times 1, \\
\chi(3) &= 5 = -1 \times -5, \\
\chi(4) &= 1 = 1 \times 1.
\end{aligned}$$

La première colonne de diviseurs ne se laisse plus décomposer; mais la seconde forme une série arithmétique du quatrième ordre qui conduit au facteur:

$$u^8 - 7u^6 + 14u^4 - 8u^2 + 1 = 0.$$

L'autre facteur s'obtient par la division. Ainsi on a:

$$\begin{gathered}
(u^2-3)(u^4-5u^2+5)(u^8-7u^6+14u^4-8u^2+1) \\
\times (u^{16}-17u^{14}+119u^{12}-442u^{10}+935u^8-1122u^6+714u^4-204u^2+17) \\
= 0.
\end{gathered}$$

Le facteur avant dernier donne les cordes de $\frac{360^0}{15}$, $2 \times \frac{360^0}{15}$, $4 \times \frac{360^0}{15}$, $8 \times \frac{360^0}{15}$ ou bien de $14 \times \frac{360^0}{15}$, $13 \times \frac{360^0}{15}$, $11 \times \frac{360^0}{15}$, $7 \times \frac{360^0}{15}$. Les autres diagonales du polygone de quinze côtés sont données par le triangle et le pentagone; par le triangle nous avons les cordes de $5 \times \frac{360^0}{15}$, $10 \times \frac{360^0}{15}$, par le pentagone celles de $3 \times \frac{360^0}{15}$, $6 \times \frac{360^0}{15}$, ou bien de $12 \times \frac{360^0}{15}$, $9 \times \frac{360^0}{15}$.

7. J'avais espéré, j'en conviens, que le dernier facteur se serait laissé decomposer de même en deux facteurs du huitième degré avec des coefficients entiers, puisque les cordes de $\frac{360^0}{17}$, $2 \times \frac{360^0}{17}$, $4 \times \frac{360^0}{17}$, $8 \times \frac{360^0}{17}$, $16 \times \frac{360^0}{17} \equiv \frac{360^0}{17}$ forment un systeme et que les cordes de $3 \times \frac{360^0}{17}$, $6 \times \frac{360^0}{17}$, $12 \times \frac{360^0}{17}$, $24 \times \frac{360^0}{17}$, $48 \times \frac{360^0}{17} \equiv 3 \times \frac{360^0}{17}$ en forment un autre; mais il n'est pas ainsi.

Il paraît donc que seulement quand l'équation appartient à deux ou à plusieurs polygones, elle se compose d'un facteur pour chacun, mais qu'un facteur appartenant à un même polygone ne se laisse plus décomposer, bienque les diagonales forment des systèmes distincts qui pour cela semblent indépendants les uns des autres, mais ne le sont pas. C'est heureux que M. Gauss ait montré comment construire un polygone de dix-sept côtés.

Pour les autres polygones on peut de la même manière former les équations exprimant leur caractére, mais on ne peut plus les résoudre autrement que par le théorème de M. Abel. Pour le polygone de onze côtés on trouverait son équation facteur d'une équation du 62me degré qui renfermerait les équations des polygones de 31 et de 33 côtés et celle du triangle comme toujours.

Pour tous ces polygones donc cette méthode est beaucoup plus simple que celle de M. Gauss et la seule praticable.

§. 3.

Considérations géométriques.

1. Pour obtenir ces mêmes équations on aurait pu se servir d'une autre méthode qui pourtant au fond ne diffère que peu de la précédente. On considère un triangle rectangle ayant pour hypotenuse le diamètre passant par un des sommets du polygone; le nombre des côtés étant toujours impair, ce diamètre aboutit au milieu de l'arc opposé au dit sommet, l'un des cathètes soit la corde qui sous-tend un demi-arc du polygone, le second cathète s'en suit. Le théorème de Pythagore nous fournit l'équation desirée.

Pour donner un seul exemple de cette méthode, cherchons l'équation du pentagone. Soit son côté désigné par a, alors la corde du demi-arc est $\sqrt{2-\sqrt{4-a^2}}$ et le diamètre est $=2$ comme toujours; le second cathète du pentagone sous-tendant deux arcs est egal à: $a\sqrt{4-a^2}$; de sorte que nous avons:

$$4=2-\sqrt{4-a^2}+a^2(4-a^2),$$

ou, après avoir développé et décomposé:

$$a^6-8a^4+20a^2-15=(a^4-5a^2+5)(a^2-3)=0,$$

comme précédemment.

Pour le septagone et l'ennéagone le second cathète sous-ten-

drait quatre arcs; pour les polygones de quinze et de dix-sept côtés il en sous-tendrait huit; pour ceux de onze, de trente-un et de trente-trois côtés seize arcs, etc. Ce triangle fournirait le moyen de trouver l'équation des polygones de quatorze, de dix-huit côtés, etc. A la fin de cette note nous continuerons cette recherche après avoir introduit une autre nomenclature.

Il faut avouer pourtant que cette considération pèche contre l'harmonie et l'unité de méthode sans qu'elle présente aucun avantage compensant, car toujours on a trouvé reunies dans une équation celles de deux ou de plusieurs polygones.

2. Par d'autres considérations on peut parvenir à former séparément les équations de plusieurs polygones, de sorte qu'on évite l'inconvénient de la décomposition en facteurs.

On sait que le côté du pentagone est égal à la plus grande partie de la diagonale divisée en raison moyenne et extrême.

Soit le côté $=a$, alors la diagonale $=a\sqrt{4-a^2}$. On a donc:

$$a=\tfrac{1}{2}a\sqrt{4-a^2}(-1+\sqrt{5}).$$

Après avoir développé on trouve:

$$a^4-5a^2+5=0.$$

3. M. F. Martens, bachelier ès sciences exactes, a appelé mon attention sur la propriété suivante du septagone inscrit régulier.

On s'imagine le septagone $AB\ldots.G$; les diagonales AC, AE, AD et CE. Le point d'intersection de ces deux dernières soit H. Il est facile de voir que les triangles ADE et DEH sont semblables et isocèles; donc on a:

$$AE:DE=DE:DH$$

ou:

$$\begin{aligned} DE^2 = AE\times {} & DH \\ & = \\ & AD - AH, \\ & = \quad\;\; = \\ DE^2 = AE\times {} & (AE-AC). \end{aligned}$$

DE est le côté (a), AC sous-tend deux arcs, AE en sous-tend quatre.

Par conséquent:

$$a^2=a(2-a^2)\sqrt{4-a^2}\left(a(2-a^2)\sqrt{4-a^2}-a\sqrt{4-a^2}\right)$$

ou:

$$1 = (4-a^2)(2-a^2)(1-a^2),$$

ou bien:

$$a^6 - 7a^4 + 14a^2 - 7 = 0.$$

4. Toutefois quelque élégante que soit cette dernière solution je préfère d'appliquer à tous les polygones le même théorème concernant le trapèze: La somme des carrés des côtés non parallèles est égale à la somme des carrés des diagonales moins le double produit des côtés parallèles.

Dans le pentagone ($ABCDE$) on a le trapèze $ABCD$, dans lequel:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 - 2BC \times AD.$$

$$AB = CD = BC = a \text{ (côté du pentagone),}$$

$$AD = AC = BD \text{ (sous-tendant deux arcs) } = a\sqrt{4-a^2}.$$

On a donc:

$$2a^2 = 2a^2(4-a^2) - 2a^2\sqrt{4-a^2},$$

ou après avoir simplifié:

$$a^4 - 5a^2 + 5 = 0.$$

Pour le septagone ($ABC \ldots. G$) on prenne encore le trapèze $ABCD$:

$$AB = BC = CD = a,$$

$$AC = BD \text{ (sous-tendant deux arcs) } = a\sqrt{4-a^2},$$

$$AD \text{ (qui sous-tend quatre arcs) } = a(2-a^2)\sqrt{4-a^2}.$$

Par conséquent:

$$2a^2 = 2a^2(4-a^2) - 2a^2(2-a^2)\sqrt{4-a^2},$$

ou toute réduction faite:

$$a^6 - 7a^4 + 14a^2 - 7 = 0.$$

Pour l'ennéagone ($AB \ldots. J$) nous prenons également le trapèze $ABCD$; dans lequel AD (comme côté du triangle équilatéral) $= \sqrt{3}$.

Nous avons donc:

$$2a^2 = 2a^2(4-a^2) - 2a\sqrt{3},$$

après avoir développé:

$$a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 3 = 0.$$

On arrive au même résultat en choisissant le trapèze $ACDJ$, dans lequel AJ et CD sont des côtés de l'ennéagone, AD et CJ des côtés du triangle, AC la corde de deux arcs et DJ celle de quatre arcs de l'ennéagone. Ce trapèze donne donc:

$$2a^2 = 6 - 2a^2(2-a^2)(4-a^2).$$

5. On peut choisir encore d'autres trapèzes (excepté pour le pentagone), mais àlors en général on trouve des équations d'un degré plus élevé, parcequ'il s'introduit un ou plusieurs facteurs étrangers aux polygones en question. Nous ne nous occuperons pas de ces facteurs étrangers parce qu'il faudrait une étude spéciale pour les motiver dans tous les cas. Il va sans dire qu'on peut toujours les rendre explicites par la méthode développée dans la §. 1. Par ex. prenant pour le septagone le trapèze $ACEF$ on a:

$$2a^2(4-a^2) = 2a^2(4-a^2)(2-a^2)^2 - 2a^2\sqrt{4-a^2}$$

ou:

$$(a^{10} - 12a^8 + 54a^6 - 112a^4 + 105a^2 - 35) = 0$$
$$= (a^6 - 7a^4 + 14a^2 - 7)(a^4 - 5a^2 + 5).$$

Prenant pour l'ennéagone le trapèze $ACDF$ on a:

$$2a^2(4-a^2) = 6 - 2a^2(2-a^2)\sqrt{4-a^2},$$

ou:

$$a^{10} - 7a^8 + 12a^6 + 6a^4 - 24a^2 + 9 = 0$$
$$= (a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 3)(a^4 - a^2 - 3).$$

Plus compliquée encore est l'équation obtenue par la considération du trapèze $ABEF$, qui donne:

$$2a^2 - 2a^2(4-a^2)(2-a^2)^2 - 2a(2-a^2)\sqrt{4-a^2}\sqrt{3},$$

ou:

$$a^{14} - 16a^{12} + 104a^{10} - 350a^8 + 643a^6 - 624a^4 + 285a^2 - 48 = 0$$
$$= (a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 3)(a^8 - 10a^6 + 35a^4 - 47a^2 + 16).$$

Pour le polygone de onze côtés ($ABC \ldots. L$) on prenne le trapèze $ABCD$, dans lequel la corde AD sous-tend huit arcs. On a donc:

$$2a^2 = 2a^2(4-a^2) - 2a^2(2-a^2)\sqrt{4-a^2}\sqrt{4-a^2(4-a^2)(2-a^2)^2},$$

ou:

$$a^{14}-16a^{12}+104a^{10}-352a^8+660a^6-671a^4+330a^2-55=0$$
$$=(a^{10}-11a^8+44a^6-77a^4+55a^2-11)(a^4-5a^2+5).$$

Pour le polygone de treize côtés ($AB \ldots . N$) nous prenons le trapèze $ABFK$, dans lequel la corde AB sous-tend un arc, les cordes AK, KF et BF quatre arcs, AF et BK huit arcs. On trouvera:

$$(a^{10}-11a^8+44a^6-77a^4+55a^2-11)$$
$$\times(a^{12}-13a^{10}+65a^8-156a^6+182a^4-91a^2+13)=0.$$

Pour le polygone de quinze côtés ($AB \ldots . P$) nous prenons le trapèze $ABCD$, dans lequel AD (sous-tendant trois arcs) est le côté du pentagone $=\frac{1}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Nous obtenons:

$$2a^2=2a^2(4-a^2)-a\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

ou:

$$a^{12}-12a^{10}+54a^8-113a^6+111a^4-45a^2+5=0.$$

Le côté et la diagonale du pentagone doivent être compris dans cette équation que nous avons analysée page 140. Nous l'avons en effet trouvée divisible par

$$a^4-5a^2+5=0,$$

de sorte que nous avons:

$$(a^8-7a^6+14a^4-8a^2+1)(a^4-5a^2+5)=0.$$

Pour le polygone de dix-neuf côtés ($AB \ldots . T$) nous prenons également le trapèze $ABCD$, dans lequel AB, BC et CD sous-tendent un arc, AD seize arcs, AC et BD deux arcs.

Nous trouvons:

$$(a^{12}-13a^{10}+65a^8-156a^6+182a^4-91a^2+13)$$
$$\times\left\{\begin{matrix} a^{18}-19a^{16}+152a^{14}-665a^{12}+1729a^{10} \\ -2717a^8+2508a^6-1254a^4+285a^2-19\end{matrix}\right\}=0.$$

6. Récapitulons les équations trouvées:

(3) Triangle régulier . . . . $a^2-3=0.$

(5) Pentagone „ . . . . $a^4-5a^2+5=0.$

(7) Septagone „ . . . . $a^6-7a^4+14a^2-7=0.$

(9) Ennéagone „ . . . . $a^6-6a^4+9a^2-3=0.$

(11) **Polygone de onze côtés** $a^{10}-11a^8+44a^6-77a^4+55a^2-11=0.$

(13) „ „ treize „ $a^{12}-13a^{10}+65a^8-156a^6+182a^4-91a^2+13=0.$

(15) „ „ quinze „ $a^8-7a^6+14a^4-8a^2+1=0.$

(17) „ „ dix-sept „ $a^{16}-17a^{14}+119a^{12}-442a^{10}+935a^8-1122a^6+714a^4-204a^2+17=0.$

(19) „ „ dix-neuf „ $a^{18}-19a^{16}+152a^{14}-665a^{12}+1729a^{10}-2717a^8+2508a^6-1254a^4+285a^2-19=0.$

Pour les polygones dont le nombre de côtés est un nombre premier, ces équations comprennent outre les côtés toutes les diagonales; mais pour ceux dont le nombre de côtés est composé ces équations excluent ces diagonales qui sont elles-mêmes des côtés de polygones. Donc pour compléter les équations des polygones de neuf et de quinze cotés il faudrait multiplier celle-là par $a^2-3=0$ et celle-ci par $(a^2-3)(a^4-5a^2+5)=0$.

§. 4.

Propriétés des polygones d'un nombre 2n et 4n de côtés relativement aux propriétés des polygones d'un nombre impair n de côtés.

1. Je veux appeler le décagone dipentagone, le polygone de quatorze côtés diseptagone; conformément tout polygone qui a deux fois autant de côtés qu'un autre polygone sera un dipolygone à l'égard de celui-ci et un hémipolygone à l'égard d'un troisième qui en aura quatre fois autant. De plus on peut supprimer dans ce cas les syllabes poly.

Comme il n'y a pas ou plutôt on ne parle pas de digone au sens usuel, le mot digone n'offre aucune équivoque. Ces nouveaux noms introduits, plusieurs theorèmes de géométrie élémentaire seront énoncés beaucoup plus facilement. Ainsi on a:

I. Le côté du digone est la moyenne proportionnelle entre le diamètre et la flèche du gone.

II. Si a est le côté du hémigone, b celui du gone, c celui du digone on a:

$$c^2=2-\sqrt{4-b^2},\quad a^2=b^2(4-b^2)$$

III. L'aire du digone inscrit est la moyenne proportionnelle entre les aires des gones inscrits et circonscrits etc.

De plus on pourrait nommer exclusivement polygones ces figures dont les côtés ne se coupent pas au dedans d'elles mêmes, en les séparant ainsi des polygones étoilés également réguliers et formés si l'on veut par les diagonales du polygone prises successivement dans un même sens comme cordes d'arcs égaux.

Alors on a une famille de polygones proprement dits comprenant une seule espèce, puis une famille de polygones étoilés contenant autant d'espèces qu'il y a de diagonales différentes au sens usuel du mot, outre celles qui formeraient les hémigones dans le cas où le polygone général aurait un nombre pair de côtés. Dans ce cas donc il y aurait une troisième famille de polygones qui n'aurait que la moitié, le quart, etc. du nombre de côtés.

Ces trois familles seraient comprises dans le genre gone, qu'on pourrait dire penta-, septa-, poly-gone général s'il est question d'un genre déterminé, l'avantage de l'introduction de ce mot gone ne se faisant sentir que si l'on énonce des résultats communs aux polygones de n'importe quel nombre de côtés. Encore pourrait-on distinguer les unigones, dans lesquels ce nombre serait impair et les didigones où il serait de la forme $4n$, de sorte que tous les didigones sont des digones. Parmi les unigones nous appellerons primunigones ceux dont les nombres de côtés sont des nombres premiers.

2. Cette nomenclature admise on a quelques théorèmes dans une forme nouvelle.

En reprenant la consideration de page 146 on voit que les côtés x des digones se dérivent des côtés y des gones par la formule: $x^2 = 4 - y^2$, et comme réciproquement $y^2 = 4 - x^2$, on trouvera l'équation des côtés des digones par cette substitution dans l'équation des unigones et réciproquement, tandis que cette substitution dans l'équation des didigones reproduira la même équation; donc les équations des didigones sont des fonctions symétriques de x^2 et de $4 - x^2$.

Du reste on peut les obtenir en substituant $y^2(4-y^2)$ à x^2. Nous trouvons pour les digones:

(4) Tétragone . . . . $a^2-2=0$.

(6) Hexagone . . . . $a^2-1=0$.

(8) Octogone . . . . $a^4-4a^2+2=0$.

(10) Décagone . . . . $a^4 - 3a^2 + 1 = 0.$
(12) Dodécagone . . . . $a^4 - 4a^2 + 1 = 0.$
(14) Diseptagone . . . . $a^6 - 5a^4 + 6a^2 - 1 = 0.$
(16) Dioctogone . . . . $a^8 - 8a^6 + 20a^4 - 16a^2 + 2 = 0.$
(18) Diennéagone . . . . $a^6 - 6a^4 + 9a^2 - 1 = 0.$
(20) Didécagone . . . . $a^8 - 8a^6 + 19a^4 - 12a^2 + 1 = 0.$
(22) Polygone de vingt-deux côtés $a^{10} - 9a^8 + 28a^6 - 35a^4 + 15a^2 - 1 = 0.$
(30) „ „ trente „ $a^8 - 9a^6 + 26a^4 - 24a^2 + 1 = 0.$
(32) „ „ trente-deux „ $a^{16} - 16a^{14} + 104a^{12} - 352a^{10} + 660a^8 - 672a^6 + 336a^4 - 64a^2 + 2 = 0.$

etc.

Nous faisons observer que ces équations des digones sont toutes incomplètes c. a. d. qu'elles ne renferment pas les équations des gones dont les côtés sont des diagonales de ces digones.

P. e. L'équation (30) ne contient pas (15), (10), (6), (5), (3).

Si l'on distingue les didigones, on a pour eux en forme symétrique en a^2 et $4 - a^2$:

(4) Tétragone . . . . $a^2 - (4 - a^2) = 0.$
(8) Octogone . . . . . $(a^2)^2 + (4 - a^2)^2 - 12 = 0.$
(12) Dodécagone . . . . $(a^2)^2 + (4 - a^2)^2 - 14 = 0.$
(16) Dioctogone: $\{(a^2)^2 + 2\}\{(4 - a^2)^2 + 2\} - 34 = 0.$

etc.

J'ai choisi ces formes pour éviter la répétition des formules telles qu'elles sont immédiatement après la substitution.

3. Les doubles apothèmes des unigones équivalent aux côtés des digones et reciproquement. Ou ce qui revient au même:

Dans les digones on a toujours un triangle central du même aire qu'un des triangles centraux de l'unigone.

Dans les digones on peut distinguer des rectangles formés par les côtés du digone et de l'unigone correspondant, dont les valeurs sont les racines des deux équations représentant ce digone et cet unigone.

Si donc on multiplie ensemble les aires des divers rectangles (donc chacun contient les quatre triangles centraux mentionnés deux à deux égaux) du digone, ce produit sera égal au produit des derniers termes des équations du digone et de l'unigone.

Ainsi le produit des deux rectangles différents qu'on peut former dans le décagone est égal à $\sqrt{5}$, puisque les deux derniers termes des équations relatives au pentagone et au décagone est 5.

Le produit des aires des trois divers rectangles du septagone est égal à $\sqrt{7}$; pour l'ennéagone ce produit est $\sqrt{3}$.

L'octogone, l'hexagone qui ont deux espèces et le tétragone le didigone qui n'a qu'une seule espèce, ont leurs rectangles respectivement égaux à deux fois, une fois, deux fois le carré du rayon.

Il est facile de multiplier ces exemples, seulement il faut un peu d'attention surtout quand ce n'est pas le double d'un nombre premier qui exprime le nombre de côtés des digones.

§. 5.

Équations des cordes d'un multiple quelconque d'arcs en fonction des cordes d'un tel arc.

1. Dans tout ce qui précède nous ne nous sommes servis que de la duplication de l'arc (réitéré s'il le fallait). Il est clair que nous aurions pu appliquer la triplication, la quintuplication etc. Comme par ce moyen nous pouvons utiliser des trapèzes qui n'étaient jusqu'ici d'aucune utilité, nous pouvons espérer, que nous pourrons trouver des formules pour tous ces gones, où la duplication ne nous conduisit pas au but, comme pour le polygone de dix-sept côtés, où il est impossible de trouver un trapèze, ou même si l'on préfère de se servir du théorème de Ptolémée, un quadrilatère inscrit, pour lequel le nombre d'arcs sous-tendus par les côtés et les diagonales se trouve dans la série géométrique 1, 2, 4, 8 etc.

Du reste les relations entre les cordes (y) des arcs $3a$, $5a$, $7a$ et la corde de l'arc a sont assez simples et curienses pour les réproduire ici et pour montrer comment on peut les utiliser.

En choisissant un trapèze inscrit dont les côtés sous-tendent a, a, a et $3a$, et en appliquant le même théorème dont nous nous sommes servis dans ce qui précède, on obtient la formule pour la corde du triple de l'arc. Celle-ci connue on choisit le trapèze dont les côtés sous-tendent $2a$, a, $2a$ et $5a$ de sorte qu'on trouve la corde du quintuple de l'arc et ainsi du reste.

La corde de l'arc simple soyant toujours x on trouve:

La corde de trois arcs $= 3x - x^3 = -x(x^2-3)$,

" " " cinq " $= 5x + 5x^3 + x^5 = +x(x^4 - 5x^2 + 5)$,

" " " sept " $= 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$

$$= -x(x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7),$$

" " " neuf " $= \quad +x(x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 3)(x^2-3)$,

" " " onze " $= -x(x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4$

$$+ 55x^2 - 11),$$

" " " treize " $= +x(x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 156x^6$

$$+ 182x^4 - 91x^2 + 13),$$

" " " quinze " $= -x(x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 8x^2 + 1)$

$$\times (x^4 - 5x^2 + 5)(x^2-3),$$

" " " dix-sept " $= +x(x^{16} - 17x^{14} + 119x^{12} - 442x^{10}$

$$+ 935x^8 - 1122x^6 + 714x^4 - 204x^2 + 17),$$

" " " dix-neuf " $= -x(x^{18} - 19x^{16} + 152x^{14} - 665x^{12}$

$$+ 1729x^{10} - 2717x^8 + 2508x^6$$

$$- 1254x^4 + 285x^2 - 19),$$

etc. etc.

Donc on a à droite les formules exprimant les côtés et les diagonales des polygones multipliées par $+x$ ou $-x$ selon que le polynome est d'un degré $4n$ ou $4n-2$. On en trouvera la raison dans la formation même de ces équations. La corde de neuf arcs a en outre pour facteur x^2-3, parce que le côté du triangle est diagonale de l'ennéagone. Pour la même raison la corde de quinze arcs a encore les facteurs (x^2-3) et (x^4-5x^2+5).

2. Ces cordes données, pour trouver l'équation du polygone de dix-sept côtés $(AB....R)$, on peut se servir du quadrilatère $AJKO$, dans lequel JK sous-tend un arc, AO et KO quatre arcs, JO cinq arcs, AJ et AK huit arcs. Il faut alors utiliser le théorème de Ptolémée.

On n'aura aucune difficulté à dériver par cette application les équations des polygones de 9, 12, 15, 18 côtés de celles des polygones de 3, 4, 5, 6 côtés.

L'équation du polygone de 15 côtés se trouve indifféremment, en substituant à a dans la formule du pentagone $3x-x^3$, ou bien dans la formule du triangle $5x-5x^3+x^5$.

Celle du polygone de 21 côtés indifféremment, en posant dans la formule du septagone $a=3x-x^3$ ou bien dans la formule du triangle $a=7x-14x^3+7x^5-x^7$. En faisant ces substitutions on trouvera dans le premier cas:

$$x^{18}-18x^{16}+135x^{14}-547x^{12}+1299x^{10}-1836x^8+1499x^6-651x^4$$
$$+126x^2-7=0=(x^6-7x^4+14x^2-7)$$
$$\times(x^{12}-11x^{10}+44x^8-78x^6+60x^4-16x^2+1);$$

dans le second cas:

$$x^{14}-14x^{12}+77x^{10}-210x^8+294x^6-196x^4+49x^2-3=0$$
$$=(x^2-3)(x^{12}-11x^{10}+44x^8-78x^6+60x^4-16x^2+1).$$

Si on désirait l'équation de ce polygone avec toutes ses diagonales il faudrait multiplier la première formule par $x^2-3=0$, ou la seconde par $x^6-7x^4+14x^2-7=0$.

3. Ce qu'il y a d'extrêmement simple c'est qu'en combinant les résultats de la duplication, de la triplication etc. des arcs, on parvient plus facilement que par aucune des méthodes précédentes aux équations des polygones.

Ainsi en exprimant que les cordes du double et du triple de l'arc du pentagone sont égales, ainsi que les corde du triple et du quadruple de l'arc du septagone, les cordes du quadruple et du quintuple de l'arc de l'ennéagone etc. etc., on tombe immédiatement sur les formules cherchées.

Pour le polygone de onze côtés, on a la corde de cinq arcs égale à celle de six arcs. Donc:

$$(3x-x^3)\sqrt{4-(3x-x^3)^2}=x(5-5x^2+x^4),$$
$$(9-6x^2+x^4)(4-9x^2+6x^4-x^6)=(5-5x^2+x^4)^2,$$
$$x^{10}-11x^8+44x^6-77x^4+55x^2-11=0,$$

comme auparavant. Et pour second exemple posant la corde de quinze arcs égale à celle de seize arcs, ce qui donnera le polygone de trente et un côtés, on trouve:

$$x^{30}-31x^{28}+434x^{26}-3627x^{24}+20150x^{22}-78430x^{20}+219604x^{18}$$
$$-447051x^{16}+660858x^{14}-700910x^{12}+520676x^{10}-260338x^8$$
$$+82212x^6-14756x^4+1240x^3-31=0.$$

Les équations qu'on obtient par cette méthode contiennent toutes les diagonales du polygone; si donc le polygone n'est pas primunigone, l'équation se laissera décomposer en deux ou plusieurs polygones. P. e. L'équation du polygone de 21 côtés renfermera celles du triangle et du septagone.

Pour obtenir les équations des polygones on peut naturellement souvent varier l'égalisation de deux cordes, mais alors on trouvera fréquemment plus d'un polygone à la fois. P. e. En posant: corde de quinze arcs = corde de six arcs, on obtiendra les équations des polygones de 21 côtés et de 9 côtés. Pour avoir l'équation du polygone de 21 côtés seul, on devra poser: corde de dix arcs = corde de onze arcs. En général pour obtenir l'équation du polygone de $2n+1$ côtés on posera: corde de n arcs = corde de $n+1$ arcs, et dans ce cas on aura l'équation en même temps complète et sans facteur étranger à la question. Car l'équation a l'un de ses membres du $(n+1)^{me}$ degré; l'un de ses membres contient le radical $\sqrt{4-a^2}$, puisque n ou $n+1$ est l'un des deux pair; tous deux ces membres ont le facteur a par lequel on peut diviser, reste donc apres l'élévation au carré une équation de degré $2n$. De plus il n'y a qu'un seul polygone pour lequel cette condition a lieu.

§. 6.

Comparaison des équations relatives aux divers polygones.

Après avoir donné tant de formules pour divers polygones il est temps de procéder à une autre recherche. Il ne faut pas se perdre dans la pluralité, il faut chercher l'unité. C'est ce dont l'homme ne peut pas et ne doit pas se passer. Voila qui nous est impérieusement imposé surtout dans les mathématiques, la langue de la raison par excellence. Une chose doit être étudiée sous plusieurs formes, de tous les côtés pour la bien connaitre, puis la raison d'être de cette chose peut et doit être cherchée. Quoique la matière soit loin d'être épuisée, j'ai réussi à trouver ce que je cherchais: des règles pratiques pour dériver l'équation d'un polygone de celles des polygones déjà connus. Après tout je crois avoir offert aux savants l'occasion d'y fixer leur attention.

En premier lieu il nous a frappé que dans les formules pour le septagone et polygone de onze côtés, les coefficients à l'exception du premier, qui est naturellement toujours l'unité, sont divisibles par 7 et 11. De plus si l'on ôte le premier terme, l'équation sera divisible par a^2-1.

On trouve pour le septagone:

$$a^6-7(a^2-1)^2=0.$$

Pour le polygone de onze côtés:

$$a^{10}-11(a^2-1)(a^6-3a^4+4a^2-1)=0.$$

Ces deux propriétés se retrouvent chez les autres primunigones, souvent même comme chez le septagone l'équation, après qu'on a ôté le premier terme, se trouve divisible par $(a^2-1)^2$. Seulement je ne sais pas trouver à cette singularité une signification essentielle.

Une autre observation exprime mieux le caractère de ces équations. Je l'exposerai dans l'ordre dans lequel je l'ai faite, d'abord moins juste, puis plus exacte, pour faire voir dans cette exposition comme dans toute la note, la manière dont j'ai moi-même trouvé les vérités contenues. La rédaction pourrait être plus concise si je la refuisais, mais il importe de savoir comment on a procédé. Voilà pourquoi j'ai donné des calculs maintenant moins nécessaires, mais que j'ai fait réellement à peu près dans l'ordre dans lequel j'ai écrit cette note.

Or d'abord il m'avait frappé que je pouvais écrire les huit premières équations dans cette forme:

(3) triangle . . . . $(4-a^2)=1$,
(4) carré . . . . $(3-a^2)=1$,
(5) pentagone . . . . $(2-a^2)(3-a^2)=1$,
(6) hexagone . . . . $(2-a^2)=1$,
(7) septagone . . $(1-a^2)(2-a^2)(4-a^2)=1$,
(8) octogone . . . . . $(1-a^2)(3-a^2)=1$,
(9) ennéagone $(1-a^2)(1-a^2)(4-a^2)=1$,
(10) décagone . . . . . $(1-a^2)(2-a^2)=1$.

C'était curieux que dans ce cas toujours le premier membre avait de ces facteurs simples $(1-a^2)$, $(2-a^2)$, etc.

L'équation (9) offre cette irrégularité qu'il y a deux facteurs égaux, mais ce n'est pas un primunigone. Je m'imaginais une interprétation. Pourtant après avoir trouvé les équations de plusieurs polygones d'un plus grand nombre de côtés et surtout après avoir écrit la paragraphe 5, je vis que je m'étais trompé sur la signification de ces frappantes analogies, que j'avais effleuré et non pas touché la vérité.

En effet en égalisant le premier membre de la formule d'un n-gone non plus à 0 telle qu'elle était, mais à l'unité après l'avoir augmentée de cette même valeur, j'avais inconsciemment et non pas tout-à-fait en règle admis la condition que la corde de 3, 5, 7 arcs équivalait à la corde de l'arc simple. Ainsi j'avais plutôt exprimé au premier membre de l'équation (car il faut que le second soit 0) l'ensemble des équations des polygones qui satisfont à

cette équation que l'équation de ce n-gone. Cependant il restait une difficulté. Quelle était la raison que non pas tous les gones qu'on avait le droit d'attendre s'y trouvaient réellement et pourquoi était-ce que j'en trouvais d'autres en égalisant à l'unité positive, les autres en égalisant à l'unité négative? On pourrait supposer que les polygones pour lesquels la corde de n fois l'arc donnait une ou plusieurs circonvolutions plus un arc, fourniraient un facteur égal à $+1$, et que ceux pour lesquels la corde de n fois l'arc donnait une ou plusieurs circonvolutions moins un arc fourniraient un facteur égal à -1, mais cela n'est pas tout-à-fait vrai. Ce qui est certain c'est qu'en égalisant à $+1$, on trouve quelques-uns des polygones qui satisfont à la condition indiquée et parmi eux aussi le diamètre: $a^2-4=0$ (le digone par excellence) et ensuite en égalisant à -1 les autres. C'est ce que prouve la liste suivante.

Donc, quoique je ne sache pas encore m'expliquer le pourquoi de ces anomalies apparentes quant au signe, je donnerai tout à l'heure des règles pratiques.

Pour eviter les formules on peut introduire la notation $E(2)$ pour (a^2-4), $E(3)$ pour (a^2-3), $E(8)$ pour a^4-4a^2+2, $E(n)$ signifiera l'équation du polygone de n côtés on peut voir les équations aux pages 150, 151 et 152, 153 indiquées par le même numéro (n).

Mais les équations des unigones qu'on pose égales à ± 1, devant être complètes (voyer page 151), nous prendrons pour les équations complètes la notation $C(n)$, quoique pour les primunigones $C(n)=E(n)$.

On a donc:

$C(3) = +1 \equiv E(2)=0,$

$C(3) = -1 \equiv E(4)=0,$

$C(5) = +1 \equiv E(2).E(6)=0,$

$C(5) = -1 \equiv E(3).E(4)=0,$

$C(7) = +1 \equiv E(2).E(4).E(6) =0,$

$C(7) = -1 \equiv E(3).E(8)=0,$

$C(9) = +1 \equiv E(2).E(4).E(10)=0,$

$C(9) = -1 \equiv E(5).E(8)=0,$

$C(11) = +1 \equiv E(2).E(3).E(6).E(10)=0,$

$C(11) = -1 \equiv E(4).E(5).E(12)=0,$

$C(13) = +1 \equiv E(2).E(3).E(6).E(14)=0,$

$C(13) = -1 \equiv E(4).E(7).E(12)=0,$

ou si l'on veut:

$(C(3))^2 = +1 \equiv E(2).E(4)=0,$

$(C(5))^2 = +1 \equiv E(2).E(4).E(3).E(6)=0,$

$(C(7))^2 = +1 \equiv E(2).E(3).E(4).E(6).E(8) =0,$

etc.

$C(15) = +1 \equiv E(2).E(4).E(8).E(14) = 0,$
$C(15) = -1 \equiv E(7).E(16) = 0,$
$C(17) = +1 \equiv E(2).E(4).E(6).E(8).E(18) = 0,$
$C(17) = -1 \equiv E(3).E(9).E(16) = 0,$
$C(19) = +1 \equiv E(2).E(5).E(6).E(10).E(18) = 0,$
$C(19) = -1 \equiv E(3).E(4).E(9).E(20) = 0,$
$C(21) = +1 \equiv E(2).E(5).E(10).E(22) = 0,$
$C(21) = -1 \equiv E(4).E(11).E(20) = 0,$
$C(31) = +1 \equiv E(2).E(4).E(6).E(8).E(10).E(16).E(30) = 0,$
$C(31) = -1 \equiv E(3).E(5).E(15).E(32) = 0.$

On voit qu'en effet tous les gones, pour lesquels n fois l'arc est égale à une ou plusieurs révolutions entières plus ou moins un seul arc, sont représentés. Il va sans dire que pour parvenir à ces décompositions il n'est nécessaire de suivre la methode indiquée dans la paragraphe 1. que partiellement, car on sait quelles sont les équations qu'on peut attendre comme facteurs. Elle est pourtant très utile, car en formant l'équation à décomposer $F(0)$, $F(-1)$, $F(+1)$, on peut rejeter à priori toutes les équations pour lesquelles $f(0)$, $f(-1)$, $f(+1)$ ne sont pas facteurs respectivement de $F(0)$, $F(-1)$, $F(+1)$.

Je disais qu'on peut attendre tels facteurs, je serais tenté de dire qu'on peut les déterminer d'avance. Au moins y a-t-il comme j'ai déjà dit des règles pratiques bien que encore empiriques. En premier lieu $E(2)$ (diamètre) se trouve toujours avec $+1$.

Si $C(n)$ est du degré $4m$, alors $E(n+1)$ se trouve avec $+1$, $E(n-1)$ avec -1. Au contraire $E\left(\frac{n+1}{2}\right)$, $E\left(\frac{n+1}{4}\right)$, $E\left(\frac{n+1}{8}\right)$, etc. se trouvent avec -1 c'est à dire de l'autre côté que $E(n+1)$; $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$, $E\left(\frac{n-1}{4}\right)$, $E\left(\frac{n-1}{8}\right)$ etc. se trouvent avec $+1$ de l'auteur côté que $E(n-1)$. Pour les autres harmonies que j'ai trouvées je les développerai tout à l'heure par un nouvel exemple. Si $C(n)$ est du degré $4m+2$, alors l'inverse a lieu. C'est à dire $E(n+1)$ se trouve avec -1 etc.

En considérant bien la liste des cordes des multiples d'un arc de page 155. on s'expliquera facilement pourquoi $E(n+1)$ se trouve antôt du côté de $+1$, tantôt du côté de -1. Car il est évident que l'équation: corde n arcs = corde arc doit nécessairement donner entre autre le polygone de $n+1$ côté, or la corde de n arcs à pour signe $+$ ou $-$ selon que n est de la forme $4p+1$ ou

$4p-1$. Mais pour les autres E j'avoue que je n'ai pas trouvé la nécessité de la disposition.

D'aprés ces données tâchons de former $C(23)$, étant du degré 22, $E(24)$ se trouve avec -1, $E(12)$, $E(6)$, $E(3)$ se trouvent donc du côté de $+1$, 8 étant le tiers de 24. $E(8)$ se trouve de l'autre côté (-1), $E(4)$, $E(2)$ du côté de $+1$. $E(24)$ étant du côté de -1, $E(22)$ se trouve avec $+1$, donc $E(11)$ avec -1.

$C(23)=+1$	$C(23)=-1$
$\equiv$	$\equiv$
$E(12)$	$E(24)$
$E(6)$	$E(8)$
$E(3)$	$E(11)$
$E(4)$	
$E(2)$	
$E(22)$	

Nous avons donc:

$$C(23)=+1\equiv E(22).E(12).E(6).E(4).E(3).E(2)=0,$$
$$C(23)=-1\equiv E(24).E(11).E(8)=0.$$

Pour vérifier le résultat on n'a qu'à effectuer les multiplications p. ex. d' $E(24).E(11).E(8)$, ce qui donnait pour les quatre premiers termes:

$$a^{22}-23a^{20}+230a^{18}-1311a^{6}+\ldots.$$

Ces trois nombres étant divisibles par 23, et l'équation du degré 22 j'y trouvais une garantie suffisante de la justesse du résultat.

Si l'on trouvait ces règles trop difficiles à saisir on pourrait simplement poser:

$$(C(23))^2$$
$$=+1\equiv E(24).E(12).E(6).E(3).E(8).E(4).E(2).E(22).E(11)=0.$$

A droite se trouvent donc les nombres 24 et 22 avec tous leurs diviseurs; toutefois 2 commun diviseur des deux ne se présente qu'une fois.

En résumé:

1. On peut former les équations de tous les primunigones.

2. De ces équations se dérivent tres facilement celles qui valent pour les digones, les didigones et pour les polygones dont le nombre des côtés est divisible.

3. On peut y parvenir par une méthode purement analytique ou bien en se servant de la propriété du quadrilatère ou du trapèze inscrits, mieux encore en égalisant les cordes de deux arcs.

Dans le premier cas on obtient toujours une équation qui contient deux ou plusieurs facteurs dont chacun vaut pour un

polygone qu'on peut déterminer d'avance. Dans le second cas on trouve très souvent l'équation desirée au degré essentiel; souvent aussi elle contient outre le facteur desiré un autre qui n'a pas toujours une signification connue, bienque très souvent cet autre facteur exprime la relation des côtés et des diagonales d'un polygone plus simple.

4. Quoi qu'il en soit, on peut toujours séparer les facteurs de cette équation par un procédé méthodique et sûr (§. 1.) qui d'après ce que nos recherches dans la paragraphe 6. ont montré, n'est plus indispensable, mais qui mérite l'attention par sa nouveauté et parce que c'est lui qui a frayé et aplani la route.

5. Le carré du premier membre de l'équation des côtés d'un unigone $(2n+1)$ égalisé à l'unité positive donne l'ensemble complet des équations relatives aux polygones qui ont la corde de $2n+1$ fois l'arc égale à la corde de l'arc simple, y compris l'équation du diamètre.

6. Le carré du premier membre de l'équation des côtés d'un digone (de $2n$ côtés) égalisé à l'unité positive donne le produit des deux équations complétes des polygones de $2n+1$ et de $2n-1$ côtés.

Cette dernière conclusion est l'expression plus générale de l'énoncé pour les polygones de $2^m \pm 1$ côtés, car de cette manière on ne trouve les côtés des autres que comme diagonales de ces derniers. L'avant-dernière expression du caractère en est une relation analogue, comme on en pourrait trouver bien d'autres encore.

La propriété que dans les équations des primunigones tous les coefficients des termes suivant le premier sont divisibles par le nombre des côtés, est d'importance dans la théorie des nombres.

Il s'en suit que le produit de $C(m)$ et de $C(n)$ et le produit $C(p) \times C(q)$, si $m+n=p+q$, ont en commun le second coefficient; mais on voit, ce qui est très remarquable, qu'ils ont en commun plusieurs coefficients. Comparez p. ex. $C(11) \times C(5)$ avec $C(7) \times C(9)$ p. 143. et p. 150., $C(13) \times C(19)$ avec $C(15) \times C(17)$, etc.

X.

Démonstration du théorème énoncé au tom. 39. p. 120. de ce journal.

Par

Monsieur *R. Lobatto*,

Professeur de mathématiques à l'Académie à Delft.

En posant

$$\begin{aligned} A &= aa' - bb' - cc', & D &= bc' + cb', \\ B &= bb' - cc' - aa', & E &= ca' + ac', \\ C &= cc' - aa' - bb'; & F &= ab' + a'b; \end{aligned}$$

on aura:

$$1^0. \quad ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF$$
$$= (a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)(aa'+bb'+cc'), \quad (\alpha)$$

$$2^0. \quad (A+B)(B+C)(A+C) - 2DEF$$
$$= (A+B)F^2 + (B+C)D^2 + (A+C)E^2. \quad (\beta)$$

Nous allons prouver en premier lieu la seconde partie du théorème, ce qui facilitera la démonstration de la première partie.

On a d'abord

$$A+B = -2cc', \quad A+C = -2bb', \quad B+C = -2aa'$$

d'où

$$A+B+C = -(aa'+bb'+cc').$$

Les valeurs de D, E, F conduisent aux relations suivantes:

$$\left.\begin{aligned} D^2 - (A+B)(A+C) &= (bc'-b'c)^2, \\ E^2 - (A+B)(B+C) &= (ac'-a'c)^2, \\ F^2 - (B+C)(A+C) &= (ab'-a'b)^2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

On a d'ailleurs:

$$DE = cc'(ab' + a'b) + c^2a'b' + c'^2ab,$$

donc

$$DEF = cc'(ab' + a'b)^2 + (c^2a'b' + c'^2ab)(ab' + a'b)$$
$$= cc'(ab' + a'b)^2 + aa'(b^2c'^2 + b'^2c^2) + bb'(a^2c'^2 + a'^2c^2),$$

expression qui peut s'écrire encore sous la forme suivante:

$$DEF = cc'(ab' - a'b)^2 + aa'(bc' - b'c)^2 + bb'(ac' - a'c)^2$$
$$+ 8aa'bb'cc',$$

ou bien

$$2DEF = -(A + B)(ab' - a'b)^2 - (B + C)(bc' - b'c)^2$$
$$- (A + C)(ac' - a'c)^2 - 2(A + B)(B + C)(A + C)$$
$$= -(A + B)F^2 - (B + C)D^2 - (A + C)E^2$$
$$+ (A + B)(B + C)(A + C),$$

en vertu des relations (I), d'où l'on déduit

$$(A+B)(B+C)(A+C) - 2DEF = (A+B)F^2 + (B+C)D^2 + (A+C)E^2$$

ce qu'il fallait prouver.

D'après la valeur obtenue ci dessus pour $2DEF$, la quantité

$$ABC - AD^2 - BE^2 - CF^2 + 2DEF$$

se changera en

$$ABC - (A + B + C)(D^2 + E^2 + F^2) + (A + B)(B + C)(A + C).$$

Posant pour abréger

$$A + B + C = -(aa' + bb' + cc') = s,$$

on aura

$$A = s + 2aa', \quad B = s + 2bb', \quad C = s + 2cc'.$$

Donc

(II)

$$ABC = s^3 + 2(aa' + bb' + cc')s^2 + 4(aa'bb' + aa'cc' + bb'cc')s$$
$$+ 8aa'bb'cc'$$
$$= -s^3 + 4(aa'bb' + aa'cc' + bb'cc')s - (A+B)(A+C)(B+C).$$

Or, il résulte des relations (I)

$$D^2+E^2+F^2=(bc'-b'c)^2+(ac'-a'c)^2+(ab'-a'b)^2 +4(aa'bb'+aa'cc'+bb'cc')$$

$$=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-s^2 + 4(aa'bb'+aa'cc'+bb'cc'),$$

d'où l'on déduit l'équation

$$(A+B+C)(D^2+E^2+F^2)=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)s-s^3 + 4(aa'bb'+aa'cc'+bb'cc')s.$$

Soustrayant celle ci de l'équation (II), on obtiendra:

$$ABC-(A+B+C)(D^2+E^2+F^2)$$
$$=-(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)s-(A+B)(B+C)(A+C),$$

ou bien

$$ABC-(A+B+C)(D^2+E^2+F^2)+(A+B)(B+C)(A+C)$$
$$=ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)(aa'+bb'+cc').$$

Aux deux relations (α), (β), qui nous venons de prouver conformément au théorème proposé, on peut joindre encore une troisième qui découle immédiatement des équations (I).

En effet celles ci donnent:

$$D^2-BC=(bc'-b'c)^2+A^2+A(B+C),$$
$$E^2-AC=(ac'-a'c)^2+B^2+B(A+C),$$
$$F^2-AB=(ab'-a'b)^2+C^2+C(A+B).$$

Donc:

$$\left.\begin{aligned} &D^2+E^2+F^2-(AB+BC+AC) \\ &=(bc'-b'c)^2+(ac'-a'c)^2+(ab'-a'b)^2+(A+B+C)^2 \\ &=(bc'-b'c)^2+(ac'-a'c)^2+(ab'-a'b)^2+(aa'+bb'+cc')^2 \\ &=(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2), \end{aligned}\right\} (\gamma)$$

d'ou l'on tire, en ayant égard à l'équation (α), celle ci:

$$(A+B+C)\{D^2+E^2+F^2-AB-BC-AC\}$$
$$+ABC-AD^2-BE^2-CF^2+2DEF=0,$$

qui, étant développée, se réduira à l'équation (β).

Il est aisé de conclure de ce qui précède, que les six quantités a, b, c, a', b', c' ne pourront être exprimées en fonction de

$A, B, C, D, E, F,$ qu'à moins que ces dernières quantités ne soient liées entre elles par l'équation de condition (β). Mais, dans ce cas même on ne pourra obtenir que les rapports entre les quantités a, b, c, a', b', c', une d'entre elles restant entièrement indéterminée, aussi qu'on va le voir par l'analyse suivante.

En profitant des relations

$$A+B=-2cc', \quad A+C=-2bb', \quad B+C=-2aa',$$

les valeurs de D, E, F fourniront les équations:

$$D+\frac{b}{2c}(A+B)+\frac{c}{2b}(A+C)=0,$$

$$E+\frac{c}{2a}(B+C)+\frac{a}{2c}(A+B)=0,$$

$$F+\frac{a}{2b}(A+C)+\frac{b}{2a}(B+C)=0.$$

Posons pour simplifier

$$\frac{a}{c}=m, \quad \frac{b}{c}=n, \text{ d'où } \frac{a}{b}=\frac{m}{n}:$$

les équations précedentes se changeront en:

$$D+\frac{n}{2}(A+B)+\frac{1}{2n}(A+C)=0,$$

$$E+\frac{1}{2m}(B+C)+\frac{m}{2}(A+B)=0,$$

$$F+\frac{m}{2n}(A+C)+\frac{n}{2m}(B+C)=0;$$

ou bien:

$$\left.\begin{aligned} & n^2+\frac{2nD}{A+B}+\frac{A+C}{A+B}=0, \\ & m^2+\frac{2mE}{A+B}+\frac{B+C}{A+B}=0, \\ & \frac{m^2}{n^2}+\frac{2m}{n}\cdot\frac{F}{A+C}+\frac{B+C}{A+C}=0; \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

dont les deux premières suffisent pour déterminer les rapports m et n. On en tire respectivement:

$$n=\frac{-D\pm\sqrt{\{D^2-(A+B)(A+C)\}}}{A+B},$$

$$m=\frac{-E\pm\sqrt{\{E^2-(A+B)(B+C)\}}}{A+B};$$

or, puisque les deux valeurs de n ont pour produit $\frac{A+C}{A+B}=\frac{b}{c}\times\frac{b'}{c'}$, il est évident que ces valeurs fourniront alternativement les rapports $\frac{b}{c}$ et $\frac{b'}{c'}$. De même les deux valeurs de m donneront les rapports $\frac{a}{c}$ et $\frac{a'}{c'}$. On pourra ainsi disposer arbitrairement de la quantité c; quant à la valeur de c', elle se trouvera alors déterminée par la fraction $-\frac{A+B}{2c}$. La valeur de $\frac{m}{n}$, déduite des valeurs obtenues ci dessus pour m et n, devra s'identifier avec celle fournie par la dernière des équations (III), savoir

$$\frac{m}{n}=\frac{-F\pm\sqrt{\{F^2-(A+C)(B+C)\}}}{A+C},$$

d'où résulte l'équation de condition

$$\frac{-E\pm\sqrt{\{E^2-(A+B)(B+C)\}}}{-D\pm\sqrt{\{D^2-(A+B)(A+C)\}}}=\frac{-F\pm\sqrt{\{F^2-(A+C)(B+C)\}}}{A+C}$$

laquelle ne pourra différer de la rélation (β). Il parait difficile au premier abord de prouver l'identité de ces deux équations, à cause des radicaux qui entrent dans l'équation que nous venons d'obtenir. On pourra y parvenir cependant sans trop de peine, en procédant de la manière suivante.

Si l'on substitue à cette équation ces deux ci:

$$\frac{E-\sqrt{\{E^2-(A+B)(B+C)\}}}{D-\sqrt{\{D^2-(A+B)(A+C)\}}}=\frac{-F-\sqrt{\{F^2-(A+C)(B+C)\}}}{A+C},$$

$$\frac{E+\sqrt{\{E^2-(A+B)(B+C)\}}}{D+\sqrt{\{D^2-(A+B)(A+C)\}}}=\frac{-F+\sqrt{\{F^2-(A+C)(B+C)\}}}{A+C};$$

qui s'accordent entre elles, et qu'on en prenne la somme, on obtiendra

$$\frac{DE-\sqrt{\{D^2-(A+B)(A+C)\}\{E^2-(A+B)(B+C)\}}}{(A+B)(A+C)}=\frac{-F}{A+C},$$

ou bien

$$\{D^2-(A+B)(A+C)\}\{E^2-(A+B)(B+C)\}=\{F(A+B)+DE\}^2.$$

Développant chaque membre de cette équation, il viendra après réduction:

$$(A+B)^2(A+C)(B+C)-D^2(A+B)(B+C)-E^2(A+B)(A+C)$$
$$=F^2(A+B)^2+2DEF(A+B).$$

Divisant par le facteur $A+B$, on retombe finalement sur l'équation de condition (β):

$$(A+B)(A+C)(B+C)-2DEF$$
$$=D^2(B+C)+E^2(A+C)+F^2(A+B).$$

Cette dernière déduction pourra en même tems être considerée comme une nouvelle démonstration de l'équation dont il s'agit.

XI.

Ermittlung des Integrales

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p (x-\beta)^q} \tag{1}$$

für den Fall, dass

$$p+q=n$$

ist, unter n eine ganze positive Zahl, welche grösser als 1 ist, und unter α und β zwei von einander verschiedene Zahlen verstanden.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Wir setzen das Integral (1) in folgender Form voraus:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p (x-\beta)^q} = \frac{C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_{n-2}x^{n-2}}{(x-\alpha)^{p-1}(x-\beta)^{q-1}}, \tag{2}$$

und suchen sodann $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}$ so zu bestimmen, dass die Gleichung (2) identisch wird.

Durch Differenziren der Gleichung (2) erhält man:

$$\frac{1}{(x-\alpha)^p (x-\beta)^q} = \frac{C_1 + 2C_2 x + \ldots + (n-2) C_{n-2} x^{n-3}}{(x-\alpha)^{p-1} (x-\beta)^{q-1}}$$
$$+ \frac{(1-p)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-2} x^{n-2})}{(x-\alpha)^p (x-\beta)^{q-1}}$$
$$+ \frac{(1-q)(C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-2} x^{n-2})}{(x-\alpha)^{p-1} (x-\beta)^q},$$

und befreiet man diese Gleichung von den Brüchen, so erhält man, gleich ordnend:

$$\begin{aligned}
1 = {} & \alpha\beta C_1 - [\beta(1-p) + \alpha(1-q)] C_0 \\
& + x\{2\alpha\beta C_2 - [\beta(2-p) + \alpha(2-q)] C_1 + (2-p-q) C_0\} \\
& + x^2\{3\alpha\beta C_3 - [\beta(3-p) + \alpha(3-q)] C_2 + (3-p-q) C_1\} \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + x^{n-3}\left\{(n-2)\alpha\beta C_{n-2} - [\beta(n-2-p) + \alpha(n-2-q)] C_{n-3} \right. \\
& \qquad \left. + (n-2-p-q) C_{n-4}\right\} \\
& + x^{n-2}\{-[\beta(n-1-p) + \alpha(n-1-q)] C_{n-2} + (n-1-p-q) C_{n-3}\},
\end{aligned}$$

und diese Gleichung zerfällt in folgendes System von Gleichungen:

$$\begin{aligned}
1 &= \alpha\beta C_1 - [\beta(1-p) + \alpha(1-q)] C_0, \\
0 &= 2\alpha\beta C_2 - [\beta(2-p) + \alpha(2-q)] C_1 + (2-p-q) C_0, \\
0 &= 3\alpha\beta C_3 - [\beta(3-p) + \alpha(3-q)] C_2 + (3-p-q) C_1, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= (n-2)\alpha\beta C_{n-2} - [\beta(n-2-p) + \alpha(n-2-q)] C_{n-3} + (n-2-p-q) C_{n-4}, \\
0 &= -[\beta(n-1-p) + \alpha(n-1-q)] C_{n-2} + (n-1-p-q) C_{n-3};
\end{aligned}$$

aus welchem im Allgemeinen

$$C_0, \quad C_1, \quad C_2, \ldots, C_{n-2}$$

bestimmt werden können. Sollten sich in speciellen Fällen aus dem so eben aufgestellten Gleichungssysteme keine Auflösungen für $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}$ ergeben, so weist diess darauf hin, dass das Integral (1) nicht die in (2) vorausgesetzte Form hat.

So ist z. B. für $p+q=2$:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p (x-\beta)^q} = \frac{C_0}{(x-\alpha)^{p-1} (x-\beta)^{q-1}},$$

woselbst C_0 sich aus folgender Gleichung ergibt:

$$1 = -[\beta(1-p) + \alpha(1-q)] C_0,$$

und diess liefert einen endlichen Werth für C_0, mit Ausnahme des einzigen Falles, wo

$$p=1, \quad q=1$$

ist. Sei ferner $p+q=3$, dann hat man:

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p (x-\beta)^q} = \frac{C_0 + C_1 x}{(x-\alpha)^{p-1} (x-\beta)^{q-1}}, \tag{3}$$

woselbst C_0 und C_1 sich aus folgenden Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} 1 &= \alpha\beta C_1 - [\beta(1-p) + \alpha(1-q)] C_0, \\ 0 &= [\beta(2-p) + \alpha(2-q)] C_1 + C_0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Löst man selbe auf, so findet man für C_0 und C_1 Brüche, deren gemeinschaftlicher Nenner die Form hat:

$$\alpha\beta + [\beta(1-p) + \alpha(1-q)].[\beta(2-p) + \alpha(2-q)],$$

und ist dieser etwa gleich Null, so ist

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^p (x-\beta)^q}$$

nicht gleich einem Ausdrucke der Form:

$$\frac{C_0 + C_1 x}{(x-\alpha)^{p-1} (x-\beta)^{q-1}}.$$

XII.

Essai d'une exposition rationnelle des principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire.

Par

Monsieur *J. Hoüel*,

Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Introduction.

Depuis longtemps les recherches scientifiques des mathématiciens sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire se sont concentrées presque exclusivement sur la théorie des parallèles; et si, jusqu'ici, les efforts de tant d'esprits éminents n'ont abouti à aucun résultat satisfaisant, il est peut-être permis d'en conclure qu'en poursuivant ces recherches, on a fait fausse route, et qu'on s'est attaqué à un problème insoluble, dont on s'est exagéré l'importance, par suite d'idées inexactes sur la nature et l'origine des vérités primordiales de la science de l'étendue.

La source de cette erreur est, croyons-nous, dans le faux point de vue méthaphysique où l'on s'est placé, en considérant la géométrie comme une science de raisonnement pur, et ne voulant admettre parmi ses axiômes que des vérités nécessaires et du domaine de la pure raison. On a été conduit ainsi à attribuer aux axiômes une nature toute différente de celle des autres vérités géométriques que l'expérience nous révèle en dehors de toute étude scientifique, et que le géomètre rattache à ces axiômes comme conséquences.

Cependant la Géométrie, comme la Mécanique et la Physique, a pour objet l'étude d'une grandeur concrète, l'étendue, affectant nos sens d'une certaine manière; et c'est seulement par les révélations des sens que nous avons pu connaitre les propriétés

fondamentales de cette espèce particulière de grandeur. Ces propriétés, indéfinissables et indémontrables, sont les termes de comparaison obligés auxquels nous ne pouvons que rapporter les autres propriétés, à l'aide du raisonnement abstrait.

Ainsi les sens seuls peuvent nous mettre en relation avec l'étendue, et ils nous en font connaître déjà un grand nombre de propriétés, sans emprunter le secours de la logique déductive. Parmi ces propriétés, les unes sont tellement simples, tellement faciles à constater, que la force de l'habitude, jointe à la tradition constante de l'École, a bien pu faire oublier leur véritable origine, et le rôle essentiel qu'ont joué les sens dans leur découverte. On a confondu, sous le nom d'axiômes, ces vérités avec les vérités abstraites, qui se rapportent à la science des grandeurs en général ou à l'arithmétique universelle *).

D'autres propriétés, enseignées également par l'expérience, et jouissant de la même certitude immédiate que les précédentes, se déduisent néanmoins de celles-ci comme conséquences, et on les a classés, sous le nom de théorèmes, à côté des vérités plus cachées, que le raisonnement seul pouvait faire apercevoir.

Le partage de ces vérités fondamentales en axiômes et théorèmes est, jusqu'à un certain point, arbitraire. Ainsi, lorsque deux de ces vérités sont des conséquences réciproques l'une de l'autre, on peut prendre celle des deux que l'on voudra pour axiôme, l'autre devenant alors un théorème.

Le nombre des axiômes peut varier, suivant l'ordre que l'on adopte dans la subordination des propositions. Il y a cependant un minimum, au-dessous duquel ce nombre ne saurait être réduit, comme le prouvent les tentatives infructueuses auxquelles nous faisions tout à l'heure allusion.

Nous nous proposons, dans ce travail, de présenter quelques considérations sur le nombre et la nature des axiômes nécessaires de la Géométrie rationnelle. Nous avons dû examiner, à cette occasion, les idées qui ont servi de base aux Éléments de Legendre, et qui dominent encore dans la plupart des traités modernes, auxquels celui de Legendre a servi de type. Pour y reconnaître de nombreuses inexactitudes, il nous a suffi d'en faire la comparaison avec les principes d'Euclide et les discus-

---

*) Ainsi, parmi les douze propositions qu'Euclide désigne du nom de *κοιναὶ ἔννοιαι*, les trois dernières seules appartiènnent spécialement à la géométrie. Les sept premières s'appliquent à toute espéce de grandeur.

sions des géomètres qui ont su se pénétrer de l'esprit de l'immortel auteur des anciens Éléments.

L'ouvrage d'Euclide lui-même, quelque supériorité que l'on doive lui reconnaître sur ses successeurs, ne nous a pas paru à l'abri de toute critique, et nous avons cru pouvoir y signaler de légères imperfections, qu'il serait d'ailleurs aisé de faire disparaître, sans altérer au fond l'admirable enchaînement des vérités que renferme ce chef-d'oeuvre de logique.

L'immense succès qu'ont eu les Éléments de Legendre, à leur apparition, n'est pas dû seulement à la renommée scientifique de cet illustre analyste. Il tient aussi aux éminentes qualités de précision et de clarté qui distinguent la rédaction de ce livre, où l'auteur a si bien su reproduire la forme et le style des géomètres de l'antiquité. Malheureusement, Legendre, entraîné par l'exemple de ses contemporains, n'a pas su conserver dans toute leur pureté les méthodes vraiment géométriques des Anciens, et il les a profondément altérées, en y mêlant les procédés arithmétiques de l'Analyse moderne.

Chez Euclide, la Géométrie forme une science complète, qui se suffit à elle-même, et n'invoque nulle part, dans ses démonstrations, le secours de la science des nombres. C'est plutôt celle-ci qui empruntera à la géométrie ses dénominations, et qui, rendue sensible aux yeux par le moyen des figures, pourra fonder ses premiers principes sur une évidence tout intuitive.

Legendre, au contraire, introduit à chaque instant dans ses raisonnements des considérations qui supposent les grandeurs géométriques remplacées par des nombres. C'est ainsi qu'il parle de produit de lignes multipliées par des lignes ou par des surfaces. Dans les démonstrations où il fait usage des proportions, il applique immédiatement aux proportions entre lignes des théorèmes d'arithmétique établis seulement pour les proportions entre nombres rationnels, et l'extension au cas des incommensurables, qu'il croit démontrer par un artifice imité des géomètres anciens, ne peut être justifiée, tant que l'on n'a par défini avec plus de précision l'égalité de deux rapports entre quantités incommensurables. Nous n'insisterons pas davantage sur les défauts de ces méthodes, qui aujourd'hui sont en partie abandonnées.

Nous nous occuperons plus particulièrement des propositions fondamentales du premier Livre, qui se rattachent immédiatement aux axiômes. Comme nous l'avons déjà fait entendre, si l'on n'avait d'autre but que de mettre hors de doute chacune des vérités géométriques, on pourrait faire un bien plus large appel

à l'expérience, en supprimant la plupart des démonstrations dans cette partie de la géométrie, et prenant pour axiômes le plus grand nombre des propositions énoncées. Nul homme de bon sens aujourd'hui ne se donnerait la peine de réfuter un sophiste niant que, pour aller d'un point à une droite, la perpendiculaire soit plus courte que l'oblique; et ce n'est pas l'évidence qui manquerait à cette proposition pour être rangée parmi les axiômes de la géométrie.

Mais l'auteur d'un traité de géométrie ne doit pas seulement chercher à convaincre l'esprit du lecteur; il doit chercher à l'éclairer; et, s'il ne s'attache pas à établir avec soin l'enchaînement et la subordination des propositions, il arrivera à rassembler des vérités qui resteront isolées et stériles. Faute de connaître le lien qui les unit, le lecteur ne sera nullement préparé à passer des vérités connues à d'autres plus cachées, et il aura perdu l'occasion de se familiariser, sur des exemples simples, avec les procédés de recherche de la géométrie.

Il importe donc de bien préciser d'abord quelle est la nature des axiômes, et de les réduire au plus petit nombre possible. Pour nous guider dans cette recherche, nous ne perdrons jamais de vue cette maxime, trop souvent méconnue, que les verités simples doivent pouvoir se démontrer simplement, et que ce que l'on gagne en rigueur dans les raisonnements, on doit pouvoir aussi le gagner en simplicité. Si quelqu'un des premiers principes de la science ne peut se déduire d'une manière courte et facile des principes précédemment posés, on aura lieu de croire qu'il n'en est pas une conséquence, et qu'il est lui-même un axiôme indémontrable. Il faut donc se défier des démonstrations longues et compliquées, par lesquelles on a souvent voulu établir des propositions que l'on ne voulait pas admettre parmi les axiômes. Par un examen approfondi, on finit généralement par constater qu'il en est de ces démonstrations comme des appareils ingénieux au moyen desquels on espère quelquefois réaliser le mouvement perpétuel. Il s'en faut de bien peu que l'appareil ne marche; mais il ne marche pas. — D'autres fois, on s'aperçoit que la proposition à démontrer n'avait pas été rattachée à celles dont elle est naturellement la conséquence.

Si nous appliquons ces considérations à l'examen des traités de géométrie qui ont paru jusqu'à ce jour, nous verrons sans peine qu'ils laissent tous à désirer sous ces divers rapports.

Au point de vue de la rigueur des déductions et du choix des axiômes, aucun traité, jusqu'à présent, n'a surpassé les Élé-

ments d'Euclide, malgré quelques points défectueux, qu'il serait aisé de corriger. Si les démonstrations d'Euclide n'ont pas toujours la simplicité qui semble règner dans les ouvrages modernes, ce la tient bien moins au fond même de ces démonstrations qu'à la forme dogmatique adoptée par l'auteur, qui se préoccupait avant tout de fermer la bouche à des sophistes que la Grèce avait le tort de prendre au sérieux. De là son habitude de démontrer toujours qu'une chose ne peut pas ne pas être, au lieu d'établir qu'elle est, et de faire voir en même temps pourquoi elle est, et comment on a été conduit à reconnaître son existence. Il suffirait souvent de quelques légères modifications pour transformer les raisonnements indirects d'Euclide en raisonnements directs. On ne peut d'ailleurs lui faire un reproche de n'avoir pas usé dans certains cas des procédés beaucoup plus courts de l'analyse moderne.

On est forcé de convenir aussi que l'ordre des propositions du premier Livre d'Euclide est loin d'être satisfaisant. Il semble que l'auteur ait rangé ses propositions, sans avoir égard à leur simplicité ou à leur importance, et en s'imposant pour seule condition que la démonstration de chaque proposition ne s'appuyât que sur les propositions qui la précèdent *).

Il résulte de là que la lecture d'Euclide n'est pas sans quelque difficulté pour les commençants, et cela explique, jusqu'à un certain point, l'oubli où il est tombé dans les écoles françaises.

Et cependant, pour un géomètre intimement pénétré de l'esprit de rigueur qui règne dans cet admirable ouvrage, et joignant à cela la connaissance des ressources de la science moderne, rien ne serait plus aisé que de tirer du livre des Éléments un traité aussi correct pour le fond des idées, et débarassé de ce que la forme offre d'aride et de rebutant. Il lui suffirait de subordonner les propositions à un ordre plus rationnel; de remplacer autant que possible les démonstrations par l'absurde par des démonstrations directes, plus simples et plus lumineuses; et enfin d'invoquer, quand il y a lieu, le grand principe des limites, que les Anciens n'avaient osé formuler dans toute sa généralité.

---

*) Nous pouvons citer, comme exemple à l'appui de cette assertion, la proposition 13, qu'Euclide démontre avec un grand appareil de logique, et qu'il place après d'autres propositions beaucoup moins simples. Pour nous, cette proposition exprime seulement que les deux parties d'un demi-tour font le demi-tour entier, et il eût presque suffi de l'énoncer en tête du Livre. On eût pu simplifier alors la démonstration de la proposition 5.

Sans vouloir entreprendre une tâche aussi longue, je me bornerai ici à soumettre aux auteurs, qui seraient disposés à concourir à cette oeuvre si utile, le résultat de mes recherches sur les premières propositions d'Euclide.

Je me suis efforcé de délimiter avec plus de précision les axiômes purement géométriques, en les rattachant à leur origine expérimentale. Parmi les vérités qu'Euclide a rassemblées sous le nom de notions communes, nous avons déjà fait remarquer que les sept premières appartiennent à la science des grandeurs en général. Les deux suivantes (les axiômes 8 et 9) ne sont pas, à proprement parler, des axiômes, mais des définitions. L'axiôme 8 est la définition de l'égalité de deux grandeurs géométriques; l'axiôme 9 est la définition du mot plus grand que, ou la définition de l'inégalité de deux grandeurs quelconques.

Les trois derniers axiômes sont classés, dans l'édition de Peyrard, parmi les demandes (*αἰτήματα*). Mais nous pensons, avec R. Simson et Lorenz, que le mot demande a chez Euclide un sens qui ne se rapporte pas à la nature des énoncés en question, et nous leur conserverons le nom d'axiômes. Ces trois axiômes, contrairement aux précédents, appartiennent proprement à la science géométrique.

Les demandes sont au nombre de trois. Nous proposons d'en ajouter une quatrième, dont Euclide fait souvent un usage tacite, quoiqu'il semble avoir voulu d'abord l'éviter à l'aide des propositions 2 et 3. Nous demanderons qu'une figure invariable de forme puisse être transportée d'une manière quelconque dans son plan ou dans l'espace *).

Les premières propositions du premier livre pourront se classer d'après les divisions suivantes:

1°. Propriétés des angles ayant même sommet.

2°. Propriétés des angles ayant des sommets différents (théorie des parallèles).

3°. Propriétés d'un triangle. — Égalités et inégalités dans un triangle.

4°. Comparaison de deux triangles. — Cas d'égalité. — Cas d'inégalité.

Viendraient ensuite les propriétés des quadrilatères et des polygones en général.

Mon but n'étant nullement de rédiger le commencement d'un

---

*) Voy. Note I.

traité classique, je me suis attaché à la discussion des principes et à la comparaison des méthodes, sans chercher à proportionner les développements suivant la régularité didactique.

J'expose, en forme de commentaire sur les 32 premières propositions d'Euclide, l'esquisse d'un plan suivant lequel on pourrait reconstruire plus régulièrement cette partie du premier Livre. J'ai essayé de montrer comment, en ne perdant jamais de vue l'origine des idées géométriques, et rapportant toujours chaque proposition à sa véritable source, on introduit dans la théorie plus de clarté et de généralité, tout en restant plus près des applications pratiques, et l'on est tout préparé, par l'analogie des procédés, à l'étude des grandes méthodes de la nouvelle géométrie.

L'appendice, composé de plusieurs notes trop longues pour trouver place dans le texte, est terminé par quelques réflexions sur l'importance de l'enseignement de la géométrie élémentaire, sur les moyens de rendre cet enseignement plus fructueux au double point de vue de la théorie et des applications, et sur les avantages que la géométrie présente sur l'analyse abstraite, comme première préparation à l'étude des parties plus élevées des mathématiques.

Essai d'une exposition rationnelle des principes de la Géométrie élémentaire.

§. 1.

La Géométrie est fondée sur la notion indéfinissable et expérimentale de la solidité ou de l'invariabilité des figures *).

Elle emprunte, en outre, à l'expérience un certain nombre de données que l'on appelle axiômes. — Nous verrons que les axiômes de la géométrie peuvent se réduire à quatre.

§. 2.

On appelle surface la limite de deux portions de l'espace.

Nous nous élevons à l'idée abstraite de surface par la considération d'une enveloppe ou cloison matérielle, dont nous réduisons indéfiniment l'épaisseur.

---

*) Voy. Note I.

La limite de deux portions de surface s'appelle **ligne**.

Deux surfaces qui se rencontrent se limitent réciproquement.

L'intersection de deux surfaces et donc une ligne.

On s'est élevé à l'idée abstraite de ligne soit par la considération d'une tige très-mince, soit par celle de la rencontre de deux cloisons, ou de la trace laissée sur la superficie d'un corps par le contact d'une autre surface.

La limite de deux portions de ligne s'appelle **point**.

Une ligne peut être limitée par sa rencontre avec une surface ou avec une autre ligne.

Ainsi l'intersection de deux lignes ou d'une surface et d'une ligne est un point.

L'intersection de trois surfaces est aussi un point.

L'idée de point est venue de la considération d'un corps, dont les dimensions étaient indéfiniment réduites.

§. 3.

Nous avons défini les mots **surface**, **ligne**, **point**, en partant de l'idée de surface pour arriver jusqu'au point.

On peut suivre l'ordre inverse, en introduisant plus explicitement l'idée de mouvement *).

On dira alors, en partant de l'idée de **point**, comme idée primitive, qu'une ligne est l'ensemble des positions occupées successivement dans l'espace par un point qui se meut.

De même, on peut considérer une surface comme l'ensemble des positions occupées successivement par une ligne qui se déplace, et qui en même temps peut changer de forme.

Toutes ces idées peuvent être rappelées par les représentations matérielles qui leur ont primitivement donné naissance.

§. 4.

L'étude des lignes et des surface constitue l'objet de la géométrie.

On donne le nom de **figure** à un ensemble quelconque de points, de lignes ou de surfaces, considéré comme invariable de forme.

*) Voy. Note II.

Axiôme I. — Trois points suffisent, en général, pour fixer dans l'espace la position d'une figure.

§. 5.

L'expérience nous apprend cependant que, lorsqu'une figure se meut en tournant autour de deux de ses points, supposés fixes, il y a un ensemble de points, situés sur une certaine ligne, et qui restent immobiles pendant que les autres se déplacent.

Ces points sont disposés sur la route que suivrait un rayon lumineux pour passer de l'un des points fixes à l'autre (en supposant ces deux points situés dans un même milieu homogène).

La ligne qui contient tous ces points, et qui nous apparaît comme la trajectoire habituelle des rayons lumineux, s'appelle la ligne droite. Donc

Axiôme II. — Il existe une ligne, appelée ligne droite, dont la position dans l'espace est complétement fixée par les positions de deux quelconques de ses points, et qui est telle que toute portion de cette ligne peut s'appliquer exactement sur une autre portion quelconque, dès que ces deux portions ont deux points communs *).

Ainsi, d'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite **).

Deux lignes droites qui ont deux points communs, coïncident dans toute leur étendue, quelque loin qu'on les prolonge au-delà de ces deux points.

En d'autres termes, on admet qu'une ligne droite peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens, et qu'elle ne peut l'être que d'une seule manière.

§. 6.

Si, en joignant deux points d'une surface par une ligne droite, la partie de la droite comprise entre ces deux points se trouve d'un certain côté de la surface, on dit que la surface est concave de ce côté, ou convexe du côté opposé.

L'expérience nous montre certaines surfaces, comme celle des eaux tranquilles, qui ne sont concaves d'aucun côté, et sur les-

*) Voy. Note III.

**) C'est, sous une autre forme, l'axiôme 12 d'Euclide.

quelles une ligne droite, menée entre deux de leurs points, s'applique dans toute son étendue.

Une telle surface s'appelle une surface plane ou un plan.

Soient A, B, C (Fig. 1.) trois points d'une surface plane. Si l'on joint le point C à un point quelconque A de la droite AB, la droite CA sera, ainsi que la droite AB, comprise tout entière dans la surface. Si l'on fait mouvoir le point A tout le long de la droite AB, la ligne CA prendra une infinité de positions, qui par leur ensemble engendreront la surface.

Ainsi la surface plane peut être considérée comme engendrée par le mouvement d'une droite tournant autour d'un point fixe, et glissant le long d'une droite fixe qui ne passe pas par ce point.

Si l'on fait tourner un plan autour de deux de ses points A et B, ou, ce qui revient au même, autour de la droite AB comme charnière, jusqu'à ce qu'un point C du plan, non situé sur la droite AB, vienne rencontrer l'ancienne position du plan en un point C', situé de l'autre côté de AB par rapport à C; l'ancienne position pouvant être considérée comme engendrée par le mouvement de $C'A$ le long de AB, et la nouvelle par le mouvement de CA le long de la même droite AB, il est clair que ces deux positions ne formeront qu'une seule et même surface, puisque leurs lignes génératrices coïncident dans chaque position; en sorte que la surface retournée coïncidera avec son ancienne position.

En général, si l'on donne à deux plans trois points communs, non en ligne droite, le même raisonnement fait voir que les deux plans coïncideront dans toute leur étendue. Donc

Axiôme III. — Il existe une surface telle qu'une ligne droite, qui passe par deux quelconques de ses points, y est renfermée tout entière, et qu'une portion quelconque de cette surface peut être appliquée exactement sur la surface elle-même, soit directement, soit après qu'on l'a retournée, en lui faisant faire une demi-révolution autour de deux de ses points. Cette surface est le plan.

Par trois points non en ligne droite, ou par une droite et un point situé hors de cette droite, ou encore, par deux droites qui se coupent, on peut toujours faire passer un plan, et l'on n'en peut faire passer qu'un.

§. 7.

Lorsque deux droites se rencontrent, on dit qu'elles forment un angle.

On peut se représenter un angle comme la quantité plus ou moins grande dont il faut faire tourner une droite autour d'un de ses points pour la faire passer d'une position à une autre, en supposant que le mouvement s'accomplisse dans le plan mené par les deux positions.

On peut passer de la position AB (Fig. 2) à la position AC, en tournant dans un sens ou dans l'autre: l'angle décrit n'est pas le même dans les deux cas.

§. 8.

Pour aller d'un point A à un autre point B, en suivant une ligne droite, il faut connaître 1° la direction de cette droite, 2° la longueur de la portion de cette droite comprise entre les deux points.

Pour déterminer la direction d'une droite, on commence par imaginer un plan passant par les deux points A, B, et dans ce plan une droite fine AC, menée par le point A. La direction de la droite AB sera connue, si l'on donne l'angle CAB qu'elle fait avec la droite fixe AC, c'est-à-dire, la quantité dont il faut tourner, dans le plan ABC, suivant un sens convenu, pour passer de la position AC à la position AB.

Si l'on donne ensuite la distance AB, c'est-à-dire, la quantité dont on doit s'avancer sur la droite AB, on aura enfin la position du point B.

§. 9.

Il est facile de s'expliquer pourquoi l'on a pris la ligne droite pour mesurer les distances, le plan pour mesurer les angles.

1°. C'est que d'abord, par deux points donnés, on peut toujours mener une ligne droite, de même que, par deux droites données, on peut toujours faire passer un plan. — Il pourrait n'en plus être de même, si l'on prenait une ligne courbe ou une surface conique de forme donnée.

2°. En second lieu, toute portion de ligne droite ou de plan peut être superposée à une ligne droite ou à un plan, de sorte que l'on peut constater immédiatement l'égalité ou l'inégalité de deux distances ou de deux angles.

§. 10.

Lorsqu'une droite, après avoir tourné toujours dans le même

sens, revient à son ancienne position, on dit qu'elle a accompli un tour entier.

Lorsque la droite vient se placer sur son prolongement, on dit qu'elle a fait un demi-tour.

Lorsqu'elle s'arrête de manière à former avec sa première position et le prolongement de celle-ci deux angles égaux, elle a décrit un quart de tour ou angle droit, et sa nouvelle position est dite perpendiculaire à la première.

Le prolongement de la perpendiculaire est aussi une perpendiculaire.

La première droite est aussi perpendiculaire à la seconde.

Tous les angles droits sont égaux.

On a pris pour unité de mesure angulaire le quart de tour ou angle droit *).

§. 11.

On appelle cercle une ligne courbe tracée sur un plan, et dont tous les points sont à la même distance d'un point fixe, appelé centre.

Si l'on fait tourner une droite dans un plan autour d'un de ses points, chacun des autres points de la droite décrira dans ce mouvement un cercle.

La distance constante d'un point du cercle au centre s'appelle rayon.

Si l'on fait tourner un cercle dans son plan autour de son centre, le cercle ne cessera pas de coïncider avec lui-même.

Un diamètre est une droite passant par le centre, et terminée de part et d'autre au cercle.

Si l'on fait faire à un cercle un demi-tour autour de son centre et dans son plan, de telle sorte qu'un diamètre donné revienne coïncider avec son ancienne position, on voit que l'une des deux parties du cercle viendra coïncider avec l'autre. Donc un diamètre divise le cercle et la portion de plan qu'il entoure, chacun, en deux parties égales.

Si l'on fait faire à un cercle un demi-tour autour d'un de ses diamètres, jusqu'à ce que son plan revienne coïncider, par retournement, avec son ancienne position, le cercle coïncidera

---

*) Voy. Note IV.

encore avec lui-même, ce qui donne une seconde démonstration de la propriété précédente.

Deux cercles de même rayon coïncident nécessairement, dès que l'on fait coïncider leurs plans et leurs centres.

§. 12.

Tandis qu'une droite tourne autour d'un de ses points, supposé fixe, considérons le cercle décrit par un quelconque des points mobiles de la droite.

Pendant que la droite accomplit un tour entier, elle parcourt le cercle entier.

Lorsqu'elle fait un demi-tour, elle parcourt le demi-cercle.

Si on la fait tourner d'angles égaux à partir de deux positions AB, AB' (Fig. 3), les arcs décrits BC, $B'C'$ seront égaux. — Car, si l'on fait tourner le cercle autour de son centre jusqu'à ce que AB' vienne se placer sur AB, l'égalité des angles fait voir que AC' tombera sur AC, et par suite les arcs BC, $B'C'$ devront coïncider.

Si un angle est égal à la somme ou à la difference de deux autres, l'arc correspondant au premier angle sera égal à la somme ou à la différence des arcs correspondants aux deux autres angles.

De là résulte que

1°. Un angle droit comprend entre ses côtés un quart de cercle ou q u a d r a n t.

2°. Si un angle est multiplié par un nombre entier quelconque, l'arc correspondant est multiplié par le même nombre entier.

3°. Si un angle est divisé par un nombre entier quelconque, l'arc correspondant est divisé par le même nombre entier.

4°. Si deux angles ont entre eux un rapport quelconque, les arcs correspondants ont entre eux le même rapport.

Donc l'arc compris entre les côtés d'un angle varie proportionnellement à cet angle *).

---

*) En d'autres termes, si l'on prend pour unité d'arc l'arc correspondant à l'unité d'angle, en exécutant les opérations nécessaires pour l'évaluation numérique de l'angle, on se trouvera exécuter en même temps les opérations qui conduisent à l'évaluation numérique de l'arc, et l'on arrivera de part et d'autre au même résultat.

Si l'on veut donc comparer un angle à son unité, pour arriver à sa représentation numérique, il revient au même de comparer l'arc correspondant à cet angle avec l'arc correspondant à l'unité d'angle, et que l'on prend naturellement pour unité d'arc.

L'unité d'angle étant l'angle droit, l'unité d'arc sera le quadrant.

On exprime cette correspondance en disant qu'un angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés.

L'avantage de la substitution des arcs de cercle aux angles consiste à offrir une représentation plus facile à saisir, et à faciliter les opérations graphiques que l'on doit exécuter sur les angles.

§. 13.

Une droite AD (Fig. 4.), qui en rencontre une autre, fait avec les deux parties AB, AC de celle-ci deux angles dont la somme est l'angle $CAB =$ un demi-tour ou deux angles droits.

Ce deux angles sont dits supplémentaires, et chacun d'eux est le supplément de l'autre.

Si l'on ajoute deux angles supplémentaires, il est clair que leurs côtés non communs seront en ligne droite.

Si deux droites se traversent mutuellement, les angles opposés par le sommet sont égaux, comme ayant même supplément. — On pourrait encore démontrer cette égalité, en retournant la figure de manière que chacun des côtés de l'angle supplémentaire commun vînt coïncider avec l'ancienne position de l'autre côté, auquel cas les deux angles en question seraient amenés à coïncider *).

On peut encore énoncer la même proposition, en disant que les deux arcs de cercle compris entre deux rayons et entre les prolongements de ces rayons, sont égaux entre eux.

§. 14.

Deux droites quelconques, rencontrées par une troisième, forment avec celle-ci huit angles égaux deux à deux et supplé-

*) Nous ferons un continuel usage de ce procédé de retournement, toutes les fois qu'il s'agira de démontrer l'égalité de deux parties d'une même figure. — On peut présenter ce procédé autrement, en concevant que l'on plie en deux la figure autour de son axe de symétrie, qui est ici la bissectrice de l'angle supplémentaire.

mentaires, deux à deux, et auxquels, pour les désigner plus facilement, on a donné les noms de correspondants, d'alternes-internes, d'internes d'un même côte, etc.

Si l'on suppose qu'une quelconque des cinq relations suivantes ait lieu:

1°. Angles correspondants
2°. „ alternes-internes } égaux,
3°. „ alternes-externes
4°. Angles internes d'un même côté } supplémentaires,
5°. „ externes „ „ „

les quatre autres relations ont nécessairement lieu.

Lorsque ces cinq relations ont lieu, les droites *CD*, *EF* ne peuvent avoir aucun point commun (Fig. 5.). — Concevons, en effet, que la moitié de gauche de la figure soit rendue mobile, et qu'on lui fasse faire un demi-tour, dans son plan, autour du milieu *J* de la droite *AB*. Lorsque le point *A* sera arrivé en *B* et le point *B* en *A*, on voit aisément que les deux moitiés de la figure coïncideront dans tous leurs points, quelque loin que l'on suppose les droites prolongées. Il ne saurait donc y avoir un point de concours des droites dans une des moitiés de la figure, sans qu'il en existât un autre dans l'autre moitié; et comme l'existence simultanée de deux points de rencontre est contraire à la nature de la ligne droite, il s'ensuit que les deux droites n'ont aucun point commun *).

Donc, si l'on fait glisser un angle, de grandeur invariable, le long d'un de ses côtés supposé fixe, le côté mobile se détache entièrement de son ancienne position, et ne conserve plus avec elle aucun point commun.

Deux droites situées dans le même plan, et ne pouvant se rencontrer, si loin qu'on les prolonge l'une et l'autre, sont dites parallèles.

Ainsi deux droites qui forment avec une troisième des angles satisfaisant à l'une des cinq conditions ci-dessus, sont parallèles.

En particulier, deux droites perpendiculaires à une troisième sont parallèles entre elles.

En d'autres termes, par un point donné hors d'une droite, on ne peut pas mener plus d'une perpendiculaire à cette droite.

Il résulte de ce que nous venons de dire que, par un point

---

*) Dupin, Géométrie et Mécanique, tome I, p. 32.

pris hors d'une droite, on peut toujours mener une parallèle à cette droite *).

§. 15.

La parallèle étant menée, si on la fait tourner tant soit peu autour de l'un de ses points, elle finira par atteindre la première ligne, lorsqu'on les prolongera suffisamment l'une et l'autre; de sorte que la position de parallélisme est unique. C'est-là un nouveau principe, qui ne semble pas être renfermé dans les axiômes précédents, et que nous énoncerons ainsi:

Axiôme IV. — Par un point donné, on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite donnée.

Il résulte de là que

1°. Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

2°. Deux droites parallèles étant rencontrées par une sécante, les angles formés satisfont aux cinq relations du paragraphe précédent.

En particulier, toute perpendiculaire à l'une des parallèles est perpendiculaire à l'autre.

Donc, par un point donné hors d'une droite, on peut toujours mener une perpendiculaire à cette droite. — Car si AB (Fig. 6.) est une perpendiculaire menée à la droite donnée en un quelconque de ses points, la parallèle à AB, menée par le point donné C, sera la perpendiculaire demandée. — Nous avons d'ailleurs vu, dans le paragraphe précédent, que cette perpendiculaire est la seule qui puisse être abaissée du point C sur la droite AB.

§. 16.

Deux angles qui ont les côtés parallèles et dirigés dans le même sens sont égaux. — On le voit en les comparant à l'angle formé par l'intersection de leurs côtés prolongés.

Réciproquement, deux angles étant égaux et dirigés dans le même sens, si leurs premiers côtés sont parallèles, leurs seconds côtés seront aussi parallèles.

Il résulte de là que, étant donné un systéme quelconque de droites, si l'on transporte ce système dans son plan, de manière

---

*) Voy. Note V.

qu'une des droites du système reste constamment parallèle à son ancienne position, chacune des autres droites restera également parallèle à son ancienne position.

On dit, dans ce cas, que le système a subi un mouvement de translation parallèlement à lui-même.

Plus généralement, si les deux côtés d'un angle tournent, dans le même sens, chacun d'une même quantité angulaire, autour de deux quelconques de leurs points, la grandeur de l'angle n'aura pas changé. — Et réciproquement, si l'on transporte un angle dans son plan, sans le retourner, chacun des côtés de l'angle fera le même angle avec son ancienne position.

En particulier, deux angles qui ont les côtés perpendiculaires, chacun à chacun, sont égaux ou supplémentaires.

Si l'on fait tourner un système de droites dans son plan, autour d'un point quelconque qui lui soit invariablement lié, toutes les droites feront avec leurs anciennes positions respectives des angles égaux, dont la valeur commune est dite l'angle de rotation du système.

§. 17.

Deux droites concourantes forment avec une troisième des angles alternes-internes inégaux, dont le plus petit est celui qui est dirigé vers le point de concours.

En d'autres termes, si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur ainsi formé est plus grand que chacun des angles intérieurs non adjacents.

Cette proposition est presque évidente, si l'on s'appuie sur l'axiôme IV. En effet, si, de la position de parallélisme, on fait passer la droite AB (Fig. 7.) à la position $A'B'$, en la faisant tourner autour du point C, de manière qu'elle rencontre la droite DE en G; il est clair que, dans ce mouvement, l'angle BCF aura augmenté, tandis que son alterne-interne CFD sera resté constant. Donc, puisqu'on avait, avant le mouvement, $BCF = CFD$, on aura, après le mouvement, $B'CF > CFD$. — De même, $A'CF < CFE$.

On voit en même temps que la valeur commune des différences $B'CF - CFD$, $CFE - A'CF$ est égale à l'angle G que font entre elles les droites $A'B'$ et DE. Donc l'angle extérieur, formé par le prolongement d'un côté d'un triangle, est égal à la somme des deux angles intérieurs

non adjacents, et la somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.

§. 18.

Si la manière précédente d'établir le théorème sur l'inégalité des angles alternes-internes formés par des droites concourantes est la plus directe et la plus simple, on ne peut nier cependant qu'elle ne s'appuie sur un axiôme dont ce théorème ne dépend pas nécessairement, et il semble alors plus logique de l'établir sans le secours de cet axiôme. C'est ce qu'a fait Euclide (prop. 16), et sa démonstration peut être présentée comme il suit:

Soit ABC (Fig. 8.) le triangle donné. Je dis que l'angle ACD est plus grand que son alterne-interne BAC. — En effet, joignons B au milieu E de la droite AC, et faisons tourner le triangle EBA autour du point E, jusqu'à ce que EA vienne s'appliquer sur son prolongement EC, et par suite le point A sur le point C. L'autre côté EB de l'angle BEA viendra aussi s'appliquer sur son prolongement. La ligne BA partira donc du point C pour aller rencontrer BEF dans l'intérieur de l'angle ACD. Donc l'angle ECF ou BAE sera contenu dans l'angle ACD. Donc enfin l'angle A est moindre que son alterne-interne ACD.

Par la même raison, les deux droites AB, AC étant coupées par BC, l'angle ABC sera moindre que son alterne-interne BCG, ou que son correspondant $ACD = BCG$.

Donc l'angle extérieur ACD est plus grand que chacun des angles extérieurs non-adjacents.

En d'autres termes, dans un triangle, chaque angle est moindre que le supplément de l'un quelconque des deux autres.

Donc la somme de deux quelconques des angles d'un triangle est moindre que deux angles droits.

Tout triangle a au moins deux angles aigus.

Deux droites partant d'un même point ne peuvent avoir une perpendiculaire commune.

Si l'on mène, d'un même point, à une droite donnée, une perpendiculaire et une oblique, l'oblique fera un angle aigu avec la partie de la droite qui va du pied de l'oblique au pied de la perpendiculaire.

§. 19.

Après avoir établi ces inégalités indépendamment du qua-

trième axiôme, on démontrera, comme Euclide (prop. 32), les théorèmes d'égalité fondés sur cet axiôme.

Si l'on prolonge un côté d'un triangle, l'angle extérieur est égal à la somme des deux intérieurs non-adjacents.

La somme des trois angles du triangle est égale à deux angles droits.

Dans un triangle rectangle, les deux angles aigus sont complémentaires.

Deux angles d'un triangle, étant donnés, déterminent le troisième.

§. 20.

Du triangle isoscèle *). — Soit ABC (Fig. 9.) un triangle isoscèle, dans lequel $AB = AC$. Retournons le plan de ce triangle, en lui faisant faire une demi-révolution autour de la bissectrice AD de l'angle A; ou, ce qui revient au même, plions la figure en deux, en faisant tourner une des moitiés autour de AD comme charnière. On voit alors que les deux moitiés de la figure se recouvrent parfaitement.

Si l'on ne veut pas d'abord introduire la bissectrice, on commencera par faire voir que le triangle retourné $A'C'B'$ peut se placer sur sa première position ABC. Alors la bissectrice de l'angle $C'A'B'$ coïncide avec celle de l'angle BAC, le milieu de $C'B'$ avec le milieu de BC, etc. Donc

Théorème. — Dans un triangle isoscèle, 1° les angles opposés aux côtés égaux sont égaux; 2° la bissectrice de l'angle au sommet est perpendiculaire à la base; 3° elle partage cette base en deux parties égales.

Autre énoncé. — Si, d'un point pris hors d'une droite, on mène à cette droite une perpendiculaire et deux obliques égales entre elles, 1° ces obliques s'écartent également du pied de la

---

*) C'est à tort que plusieurs auteurs français se permettent d'écrire, au mépris de l'étymologie, isocèle pour isoscèle. C'est la même négligence que si l'on écrivait cène pour scène. Nous dirons en passant que plusieurs autres mots du langage mathématique sont généralement défigurés par un usage qui, malheureusement, tend de plus en plus à prévaloir. Cependant, malgré toutes les autorités qu'on pourrait nous citer, nous persisterons toujours à dire que dizaine, hypothénuse, parallélipipède, etc., mis pour dixaine, hypoténuse, parallélépipède, etc., constituent de véritables fautes d'orthographe.

perpendiculaire; 2° elles sont également inclinées sur la perpendiculaire; 3° elles sont également inclinées sur la base donnée.

Donc tout point à égale distance des extrémités d'une droite appartient à la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite.

Si donc chacun des deux points A et B de la droite AB (Fig. 11.) est équidistant des extrémités C et D de la droite CD, AB sera perpendiculaire sur le milieu de CD.

Autre énoncé. — Si l'on joint, dans un cercle, le centre aux deux extrémités d'une corde, 1° les deux rayons feront avec la corde des angles égaux; 2° la bissectrice de l'angle des deux rayons (laquelle est aussi la bissectrice de l'arc) est perpendiculaire à la corde; 3° elle partage cette corde en deux parties égales.

Donc, si deux cercles ont deux points communs, la ligne des centres est perpendiculaire sur le milieu de la corde commune.

Remarque. — La bissectrice de l'angle A (Fig. 9.) satisfait à quatre conditions:

1°. Elle passe au point A.

2°. Elle partage l'angle A en deux parties égales.

3°. Elle passe au milieu D de BC.

4°. Elle est perpendiculaire à BC.

Or deux de ces quatre conditions, combinées convenablement, déterminent complètement la droite AD. De là résultent autant de réciproques du théorème précédent. Ainsi, dans un triangle isoscèle,

La droite qui joint le sommet au milieu de la base est perpendiculaire à cette base, et bissectrice de l'angle au sommet;

La perpendiculaire abaissée du sommet sur la base partage cette base et l'angle au sommet, chacun, en deux parties égales;

La perpendiculaire élevée sur le milieu de la base passe au sommet, et partage l'angle au sommet en deux parties égales.

— On peut énoncer encore ces réciproques comme il suit:

Dans un cercle, la droite qui joint le centre au milieu d'une corde est perpendiculaire à la corde et bissectrice de l'arc;

La perpendiculaire abaissée du centre sur une corde est bissectrice de la corde et de l'arc;

La perpendiculaire élevée sur le milieu d'une corde passe par le centre et par le milieu de l'arc.

§. 21.

Considérons maintenant un triangle qui a deux angles égaux, ces deux angles étant nécessairement aigus.

En retournant le triangle et l'appliquant sur son ancienne position; ou encore, en pliant la figure autour de la perpendiculaire élevée sur le milieu de la base *), on voit que les deux moitiés de la figure coïncident l'une avec l'autre; par conséquent, le triangle est isoscèle.

Autre énoncé. — Deux obliques également inclinées sur la base sont égales, et par suite s'écartent également du pied de la perpendiculaire.

Autre énoncé. — Si deux droites, coupées par une troisième, forment avec celle-ci des angles { internes / externes } d'un même côté égaux, ou des angles { correspondants / alternes-internes / alternes-externes } supplémentaires, les trois droites forment un triangle isoscèle.

§. 22.

Soit enfin un triangle, dans lequel le sommet se trouve sur la perpendiculaire élevée au milieu de la base.

En retournant la figure, ou en la pliant autour de la perpendiculaire, on voit que le triangle est isoscèle.

Ainsi un triangle, dans lequel la perpendiculaire élevée au milieu de la base passe par le sommet, est isoscèle.

Autre énoncé. — Tout point de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est équidistant des deux extrémités de cette droite.

Autre énoncé. — Deux obliques qui s'écartent également du pied de la perpendiculaire sont égales.

— De cette proposition, jointe à sa réciproque du §. 20., il résulte que la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est le lieu géométrique des points équidistants des deux extrémités de cette droite.

---

*) Cette perpendiculaire rencontre les deux côtés au-dessus de la base (axiôme IV et corollaires).

En d'autres termes, c'est le lieu géométrique des centres des cercles qui passent par les extrémités de la droite.

§. 23.

Inégalités dans un triangle quelconque. — Si deux côtés AB, AC (Fig. 10.) d'un triangle sont inégaux, au plus grand côté AB est opposé un plus grand angle C.

Voy. Euclide I, 18.

Autrement, en retournant le triangle, et le plaçant sur son ancienne position (ou, ce qui revient au même, en pliant le triangle autour de la bissectrice AD de l'angle au sommet), on forme le triangle BDC', dans lequel l'angle $AC'D$, extérieur au triangle, est plus grand que l'angle intérieur non adjacent B.

— Réciproquement, si deux angles d'un triangle sont inégaux, au plus grand angle est opposé un plus grand côté. — (Euclide I, 19).

§. 24.

Dans un triangle, un côté quelconque est moindre que la somme des deux autres. — (Euclide I, 20).

Il s'ensuit que, dans un triangle, un côté quelconque est plus grand que la différence des deux autres.

Corollaires. — Dans un polygone, un côté quelconque est moindre que la somme de tous les autres.

En d'autres termes, une ligne droite est plus courte qu'une ligne polygonale ayant les mêmes extrémités.

Un contour polygonal convexe est plus court qu'un contour polygonal quelconque qui l'enveloppe en aboutissant aux mêmes extrémités.

Un contour polygonal fermé et convexe est moindre qu'un contour polygonal quelconque qui l'enveloppe de toutes parts *).

§. 25.

Si d'un point on mène à une droite une perpendiculaire et diverses obliques,

---

*) Pour la comparaison des longueurs curvilignes aux longueurs rectilignes, voy. Note VI.

1°. La perpendiculaire est plus courte que toute oblique;

2°. Si deux obliques s'écartent inégalement du pied de la perpendiculaire, celle qui s'en écarte le plus est la plus longue.

Autre énoncé. — Si la hauteur d'un triangle ne tombe pas au milieu de la base, au plus grand segment est adjacent un plus grand côté.

Pour démontrer cette proposition, si les obliques sont de côtés différents de la perpendiculaire, on compare l'une d'elles à une oblique égale à l'autre, et menée du même côté de la perpendiculaire que la première. Le triangle formé par les deux obliques a alors un angle obtus, opposé à l'oblique la plus éloignée; donc celle-ci est la plus longue.

On peut encore énoncer cette proposition ainsi:

Tout point hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu d'une droite est plus rapproché de celle des deux extrémités de la droite qui est située du même côté que lui par rapport à la perpendiculaire.

§. 26.

Réciproquement, dans un triangle non isoscèle, la hauteur est plus rapprochée du plus petit côté.

Autre énoncé. — De deux obliques inégales, la plus longue s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.

Autre énoncé. — Tout point inégalement distant des deux extrémités d'une droite, est hors de la perpendiculaire élevée sur le milieu de cette droite, et il est du même côté de cette perpendiculaire que celle des extrémités de la droite dont il est le plus rapproché.

§. 27.

Cas d'égalité des triangles. — 1°. Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux, chacun à chacun. — (Euclide I, 4.)

2°. Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux, chacun à chacun. — La démonstration donnée par Legendre (liv. I, pr. 7) est plus simple que celle d'Euclide (I, 26).

3°. Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux, chacun à chacun. — Adossons les deux triangles (Fig. 11.), de manière que leurs sommets C, C' se trouvent de côtés diffé-

rents de la base commune AB. Chacun des points A, B étant équidistant des points C et C', la ligne AB est perpendiculaire sur le milieu de CC'. Si donc on replie la figure autour de AB, le point C' tombera en C.

— Autrement, la perpendiculaire AB sur la base du triangle isoscèle ACC' étant bissectrice de l'angle au sommet, on a $CAB = BAC'$, ce qui ramène au premier cas d'égalité.

— On peut dire encore que, les triangles CAC', CBC' étant isoscèles, on a l'angle $ACC' = AC'C$, l'angle $BCC' = BC'C$, d'où $ACC' \pm BCC' = AC'C \pm BC'C$, c'est-à-dire $ACB = AC'B$, etc.

§. 28.

Deux triangles rectangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés de même nom égaux, chacun à chacun.

1°. Si ce sont les deux côtés de l'angle droit, on est dans le premier cas du paragraphe précédent.

2°. Si ce sont l'hypoténuse et un autre côté, on adosse les deux triangles rectangles, de manière à former un triangle isoscèle, que sa hauteur partage en deux triangles égaux.

— Cette dernière proposition est un cas particulier de la suivante:

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun, et l'angle opposé au plus grand de ces deux côtés égal.

§. 29.

Si deux triangles ont un angle inégal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, au plus grand angle est opposé un plus grand côté. — (Euclide I, 24.)

— Réciproquement, si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun et le troisième inégal, au plus grand côté est opposé un plus grand angle. — (Euclide I, 25.)

Appendice.

Note I.

Sur l'invariabilité des figures.

Toute la géométrie est fondée sur l'idée de l'invariabilité des formes. On commence par admettre qu'il existe dans les figures une certaine propriété, qui subsiste lorsque ces figures se trouvent transportées dans une autre région de l'espace.

Cette propriété ne saurait être définie en termes géométriques, sans petition de principe. L'idée d'invariabilité de forme nous vient de l'expérience. Après avoir acquis l'idée de grandeur ou d'étendue par la considération du mouvement (voy. la Note suivante), nous constatons que certains corps, ceux surtout qui offrent au toucher le plus de résistance, nous présentent toujours, de quelque manière qu'on les déplace, des dimensions et des configurations que nous jugeons être les mêmes, c'est-à-dire, qui, appréciées d'après le mouvement de l'oeil, en tenant compte de l'éloignement plus ou moins grand, nous causent des impressions toujours identiques. Nous donnons à ces corps le nom de corps solides.

Nous dépouillons ensuite, par abstraction, ces corps de toutes les parties dont la considération ne nous intéresse pas; ou, si l'on veut, nous supposons ces parties parfaitement translucides et pénétrables; et l'ensemble des parties conservées ou restées visibles constitue ce qu'on appelle une figure géométrique.

Note II.

Sur le mouvement géométrique.

C'est par suite d'une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de géométrie la considération du mouvement.

L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire, l'idée du mouvement géométrique n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue. On peut même dire, en toute rigueur, que cette idée est identique avec celle de grandeur, puisque c'est précisément par le mouvement que nous parvenons à l'idée de grandeur.

Ce mouvement géométrique, qu'une équivoque de langage a fait confondre avec le mouvement dans le temps, objet de la cinématique, ne peut pas dépendre d'une autre science que de la géométrie pure.

Il est avantageux d'introduire cette idée de mouvement géométrique le plustôt et le plus explicitement possible. On y gagne beaucoup sous le rapport de la clarté et de la précision du langage, et l'on se trouve mieux préparé à introduire plus tard dans le mouvement les notions nouvelles de temps et de vitesse.

C'est d'ailleurs ce que tous les auteurs font à leur insu et malgré eux; et il serait difficile de trouver une seule démonstration d'une proposition fondamentale de géométrie, dans laquelle n'entre pas l'idée de mouvement géométrique, plus ou moins déguisée.

Note III.

Sur la définition de la ligne droite.

Supposons un observateur placé au milieu d'une vaste plaine. Il aperçoit de loin un point, et veut se transporter en ce point.

L'instinct le porte à marcher dans la direction suivant laquelle ce point lui envoie ses impressions lumineuses. La preuve que ce procédé est instinctif, c'est qu'il est suivi par tous les animaux.

L'expérience, aidée de la réflexion, lui apprend plus tard qu'en suivant cette route, il accomplit le trajet en moins de temps que s'il se fût écarté de la direction des rayons lumineux.

De là cette vérité vulgaire, mais assez complexe au point de vue géométrique: La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. C'est cet énoncé que les auteurs de la plupart des traités de géométrie ont cru pouvoir prendre pour définition de la ligne droite.

En discutant l'origine et la véritable signification de cette notion du sens commun, nous verrons sans peine que l'inscription d'une telle proposition en tête des éléments de géométrie indique que l'on n'a pas suffisamment analysé les idées très-simples qui se rapportent à cet objet.

Certains philosophes de l'antiquité, au dire de Proclus, voulant railler agréablement la 20e proposition d'Euclide, prétendaient que les ânes eux-mêmes l'admettaient sans démonstration.

On peut répondre à cela que les ânes, en suivant telle route plutôt que telle autre pour atteindre leur but, ne se préoccupent en aucune façon de la longueur du chemin. Leur instinct les porte à marcher dans la ligne suivant laquelle l'objet impressionne leurs sens, et cette ligne sera la ligne droite, parce que c'est la route que suivent la lumière, le son, etc. Il n'est pas impossible, d'ailleurs, que les animaux fassent quelquefois acte d'intelligence, en adoptant le chemin que l'expérience leur a montré être le plus court.

C'est donc l'expérience, aidée de la mémoire et de la réflexion, qui nous apprend que le chemin rectiligne est, toutes choses égales d'ailleurs, le plus tôt parcouru.

Le jugement concordant, que l'on forme en appréciant au coup d'oeil la longueur du chemin, doit être rapporté à la même origine, puisque l'idée de grandeur, que nous transmet immédiatement le sens de la vue (abstraction faite des notions fournies par les autres sens, ainsi que par la mémoire et la réflexion), n'a pas d'autre source que le mouvement plus ou moins considérable que doit exécuter l'axe de l'oeil pour parcourir tel ou tel contour.

Il nous paraît donc établi que l'adoption du chemin rectiligne a une origine primitivement instinctive et irréfléchie, et que sa propriété de minimum, qui en a fait conserver l'usage, nous a été révélée par l'expérience.

Examinons maintenant de plus près quelle est la signification de ce jugement, quelle en est l'exacte interprétation géométrique, après qu'on l'a, pour ainsi dire, épuré par la faculté d'abstraction, et dépouillé de toutes les circonstances physiques qui avaient accompagné sa formation.

Le chemin de direction constante *), que nous parcourons en suivant le rayon lumineux, nous conduit à l'idée d'une ligne de direction constante, en remplaçant, par la pensée, notre corps par un point, c'est-à-dire, en réduisant indéfiniment les dimensions de notre corps par rapport à ce qui l'environne; ce qui donne à l'idée de chemin une précision de plus en plus grande.

En appliquant le même procédé d'abstraction aux autres chemins possibles, on a dû continuer d'abord, sans s'en rendre compte, à mesurer la longueur du chemin par le nombre des pas, le temps du parcours par le temps employé à faire un pas; l'idée de temps

---

*) Nous jugeons que la direction est constante, parce que nous n'avons fait aucun effort pour imprimer à notre corps un mouvement de rotation.

n'étant ici, du reste, qu'une idée auxiliaire, qui doit être éliminée à la fin de l'opération intellectuelle. Dans le langage abstrait, cela revient à supposer le mobile décrivant un polygone, et à admettre, comme un fait d'expérience, qu'un côté d'un polygone est moindre que la somme de tous les autres.

Pour aller plus loin, pour acquérir des notions relatives à la longueur des lignes courbes, on est forcé de recourir à un nouveau procédé, au procédé du passage à la limite, qui remplace la comparaison directe, devenue impossible.

Il ne suffit pas, en effet, de faire appel ici à l'idée vague que chacun a ou croit avoir de la longueur d'une courbe. On peut bien, il est vrai, définir nettement ce qu'on entend par un arc plus grand ou plus petit qu'un autre, lorsque ces deux arcs sont comptés à partir d'une origine commune. Mais déjà, dès qu'il ne s'agit plus du cercle ou de l'hélice, il n'est plus possible de comparer directement deux arcs de la même courbe, lorsqu'ils ne sont pas comptés à partir de la même origine. A plus forte raison cette comparaison est-elle impossible, lorsque l'on considère des arcs pris sur des courbes différentes.

Il faut bien, cependant, que l'on trouve un moyen de suppléer à cette comparaison directe, sans quoi, en disant que telle ligne est plus ou moins longue que telle autre, on ne ferait que prononcer une phrase absolument vide de sens. Voyons donc quels moyens peuvent proposer ceux qui se refusent à invoquer le principe des limites.

1°. Le temps employé par le mobile pour parcourir un certain chemin. — Mais il faut alors supposer tacitement que la vitesse est la même dans les deux chemins que l'on veut comparer. Qu'est-ce maintenant que la vitesse? Ou, si l'on renonce à définir la vitesse, en l'admettant au nombre des quantités primitives, qu'est-ce que deux vitesses égales? — De quelque manière que l'on essaie de répondre à cette question, on se trouvera toujours obligé, tôt ou tard, de passer par les notions de limites, et l'on n'aura fait que reculer inutilement la difficulté, en introduisant des auxiliaires inutiles, pour faire une comparaison qu'on aurait aussi bien pu faire directement.

2°. On applique un fil flexible sur la courbe, puis on le redresse. — On suppose ici le fil inextensible. Qu'est-ce donc qu'un fil inextensible, dès qu'il cesse d'être en ligne droite ou d'être appliqué sur la même courbe? Toutes les définitions que l'on peut tenter de donner du phénomène physique de l'allongement d'un fil curviligne, reviennent, en définitive, à ôter à ce fil

(supposé infiniment mince) son caractère de courbe continue, pour en faire un polygone à côtés très-petits, et ce n'est que dans le passage à la limite que l'on arrive à supposer ces côtés infiniment petits. On voit donc que, là encore, on n'a fait qu'obscurcir la question en la compliquant de notions physiques étrangères.

Telles sont les difficultés insurmontables que l'on rencontre, lorsqu'on veut définir la plus simple des figures de géométrie au moyen d'une de ses propriétés secondaires, qui n'est, au fond, qu'un théorème d'une nature assez compliquée, et exigeant, pour être compris, la connaissance préalable d'un grand nombre d'autres propositions.

Nous disons que la propriété de minimum de la ligne droite est une propriété secondaire. En effet, aucune des propositions fondamentales de la géométrie ne repose sur cette propriété, du moins quand on prend, pour arriver à leur démonstration, la voie la plus directe et la plus naturelle.

La propriété dont il s'agit a son analogue dans toutes les figures symétriques, sans que cependant on ait jamais songé à la prendre comme définition pour une autre figure que pour la ligne droite. Que dirait-on, en effet, d'un auteur qui définirait le cercle comme la courbe d'aire maximum parmi celles d'un périmètre donné? Il serait difficile de déduire simplement, de cette définition, les propriétés fondamentales du cercle. Et cependant c'est ce même procédé que la plupart des auteurs suivent pour la ligne droite, et la force de l'habitude nous empêche seule d'en sentir l'étrangeté.

L'origine de cette prétendue définition de la ligne droite remonte à une fausse interprétation d'un passage d'Archimède. Lorsque ce grand géomètre voulut, le premier, aborder les problèmes de la rectification du cercle et de la quadrature de la sphère, il lui fallut bien définir ce qu'il entendait par longueur d'une ligne courbe ou par aire d'une surface courbe. Pour y parvenir, il posa comme des principes certaines propositions, sur lesquelles il s'appuya comme sur de nouveaux axiômes:

1°. La ligne droite est la plus courte de toutes celles qui ont les mêmes extrémités.

2°. Un contour convexe est moindre qu'un contour qui l'enveloppe en s'appuyant sur les mêmes extrémités.

3°. La surface plane est la plus petite de toutes celles qui sont terminées au même contour.

Etc.

On peut aisément montrer, comme chacun sait, que la méthode d'exhaustion, employée par les Anciens dans leurs démonstrations, est identique, pour le fond, avec la méthode des limites, par laquelle les Modernes l'ont remplacée. La limite d'une quantité variable n'est déterminée, en effet, que par l'exclusion de toutes les valeurs de la variable, autres que celle que l'on ne peut définir directement, et que la variable ne peut en général jamais atteindre; et ce procédé est précisément celui de la méthode d'exhaustion.

En suivant le même ordre d'idées, on reconnaîtra facilement que les principes que nous venons de rapporter, étant interprétés d'après les idées modernes, ne sont autre chose que des définitions de la longueur d'une ligne courbe, ou de l'aire d'une surface courbe. Ainsi Archimède, ne pouvant définir directement la ligne droite qui représente une longueur curviligne, a défini celle-ci comme quelque-chose plus grand que tous les contours rectilignes inscrits, et plus petit que tous les contours rectilignes circonscrits. Comme on peut faire en sorte que deux contours rectilignes, pris dans chacune de ces deux séries, soient rendus aussi peu différents que l'on voudra l'un de l'autre, il en résulte que ces deux séries tendent vers une limite commune, qui est la longueur de la courbe. On voit donc que nous sommes arrivés à la définition moderne de la longueur de l'arc de courbe, sans faire autre chose que de traduire et de développer l'idée d'Archimède, et que les principes que nous avons cités, loin de contenir une définition de la ligne droite, servent au contraire à définir, au moyen de la ligne droite, la longueur de la ligne courbe.

On peut remarquer en même temps que les auteurs qui ont fait cette confusion au sujet de la ligne droite, auraient dû, pour rester conséquents avec eux-mêmes, prendre le troisième principe pour définition du plan, les propriétés exprimées par les principes 1 et 3 étant complètement analogues.

Note IV.

Sur l'unité angulaire.

Les diverses fonctions trigonométriques, le sinus, la tangente, etc., sont définies d'abord pour le premier quadrant, dans l'intervalle duquel elles parcourent entièrement la série de leurs valeurs numériques. C'est par l'introduction des signes + et — que l'on parvient à donner, aux angles non compris entre les

limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, des fonctions trigonométriques, qui ne sont autres que celles de certains angles du premier quadrant, prises avec des signes convenables. On sait, en effet, que, pour obtenir les fonctions trigonométriques d'un angle < 0 ou $> \frac{\pi}{2}$, on commence par ajouter ou retrancher le nombre de quadrants nécessaire pour ramener l'angle donné à être compris dans le premier quadrant, de sorte qu'il suffit d'avoir une table des fonctions trigonométriques dressée seulement pour le premier quadrant.

Si l'on exprime maintenant un angle en prenant le quadrant pour unité, et le soumettant à la division décimale, l'angle se composera d'une partie entière, positive ou négative, et d'une partie décimale, que l'on pourra toujours supposer positive *). L'opération de l'addition ou de la soustraction des quadrants sera alors complètement analogue à celle du changement de caractéristique dans les logarithmes décimaux. C'est déjà là un premier avantage du choix de la véritable unité angulaire.

Si, comme quelques auteurs l'ont proposé, on prenait le cercle entier pour unité, le quadrant serait représenté par la fraction 0,25, et, pour opérer la réduction d'un angle au premier quadrant, on serait obligé d'alterer les deux premières décimales, ce qui serait beaucoup moins simple dans la pratique.

L'adoption, comme unité angulaire, du centième de quadrant ou grade n'a d'autre raison d'être que le désir de se rapprocher du degré sexagésimal. Il n'en peut résulter aucun avantage sérieux, mais seulement une complication dans l'écriture, et une perpétuelle confusion des degrés nouveaux, des minutes nouvelles, etc. avec les degrés anciens, les minutes anciennes, etc.

Nous avons signalé une première analogie entre la division décimale du quadrant et les logarithmes décimaux du système de

---

*) Nous ferons observer à ce propos que la notation des caractéristiques négatives, telle qu'elle est actuellement usitée en France, nous semble de beaucoup préférable, pour la commodité et la briéveté, à la notation employée par les géometres allemands. Elle permet, en outre, de réserver les signes + et —, placés en avant du logarithme, pour indiquer le signe du nombre (Logarithmand) dont le logarithme représente la valeur numérique, écrite dans un système particulier de numération. Ce mode d'indication est plus clair et moins sujet aux erreurs que l'emploi de la lettre n, placée, d'après Gauss, à la suite du logarithme, pour indiquer que le nombre doit être pris négativement.

Briggs. La raison de cette analogie est facile à saisir. Si l'on considère une exponentielle à exposant complexe,

$$a^{x+y\sqrt{-1}},$$

la partie réelle de l'exposant est un logarithme réel, le coefficient de $\sqrt{-1}$ un arc de cercle; de sorte qu'on peut regarder les arcs de cercle comme des logarithmes imaginaires. D'après cela, si l'on rapporte les logarithmes au système décimal, les déplacements de la virgule dans la valeur numérique de l'exponentielle répondront à des changements de la seule caractéristique; et, d'après la nature des exponentielles réelles, qui ne sont pas des fonctions périodiques, la caractéristique pourra prendre toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$.

De même, si l'on adopte la division décimale pour les logarithmes imaginaires, les changements de quadrant, qui reviennent à la multiplication de l'exponentielle par une puissance de $\sqrt{-1}$, correspondront à des changements de la caractéristique du logarithme imaginaire; et, d'après le caractère périodique de l'exponentielle imaginaire, cette exponentielle parcourra le cycle entier de ses valeurs, lorsqu'on fera varier la caractéristique de 0 à 4, ou encore, ce qui revient au même, de -2 à $+2$, l'addition d'une unité à la caractéristique équivalant à la multiplication par $\sqrt{-1}$.

Ainsi, de même que 10 est la base des logarithmes réels décimaux, $e^{\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}}$ sera celle des logarithmes imaginaires décimaux.

Les autres unités angulaires dont on fait usage ont aussi leurs analogues dans les logarithmes, et il est aisé de s'en rendre compte au moyen des considérations précédentes.

Dans le calcul littéral, on emploie constamment les logarithmes naturels, relatifs à la base e, et l'on prend pour unité angulaire l'arc égal au rayon. Dans ce cas, l'analogue de la caractéristique des logarithmes décimaux réels n'est plus un nombre entier; c'est le logarithme naturel de 10, ou le nombre 2,302585.... L'analogue de la caractéristique des logarithmes décimaux imaginaires est, de même, le nombre irrationnel $\frac{\pi}{2}$. Pour calculer numériquement dans ce système naturel, on serait donc obligé de se servir de caractéristiques fractionnaires, ce qui serait peu commode dans la pratique.

Il reste à chercher l'analogue de la division sexagésimale du

cercle. Il faut, pour cela, remonter dans l'antiquité au temps où les astronomes faisaient usage de la division sexagésimale du rayon, et où le calcul proprement dit était trop méprisé des hommes de science pour qu'ils songeassent à en perfectionner les méthodes. Les inventeurs des logarithmes se sont bien gardés de reprendre ces traditions, en choisissant 60 ou 90 pour bases de leurs systèmes, et la numération sexagésimale des logarithmes imaginaires n'a plus aujourd'hui rien qui lui corresponde dans la numération des nombres réels, du moins dans les pays qui, comme la France, ont soumis leur système métrique à la division décimale.

On se demande souvent pourquoi les astronomes français, après avoir proposé les premiers la division décimale du quadrant *), que les étrangers appellent encore la division française, ont été eux-mêmes les premiers à l'abandonner. Il y a, pour expliquer ce fait, une raison très-grave dans la nécessité où sont les astronomes de puiser sans cesse dans des registres d'observations, qui, à toutes les époques, ont été construits d'après le système sexagésimal. On conçoit quel immense travail entraînerait la conversion de tant de nombres d'un système dans l'autre, et quelle source d'erreurs et de confusion résulterait d'un tel remaniement, sans parler des inconvénients qu'éprouveraient les observateurs actuels, forcés de changer leurs habitudes et leurs instruments. L'astronomie, enchaînée par son passé, a donc sagement fait de renoncer à un perfectionnement, qui, en somme, aurait présenté plus de dangers que d'avantages réels.

Mais les astronomes observateurs ne sont pas seuls à se servir des tables trigonométriques. Or, pour tout autre usage que le calcul immédiat des observations faites avec des instruments portant la division sexagésimale, il est incontestable que la division décimale présenterait des avantages immenses, et nous ne pouvons comprendre la persistance avec laquelle la plupart des calculateurs la rejettent. Il n'est pas besoin d'une bien grande expérience du calcul pour voir combien on gagnerait à l'adopter dans les calculs de mécanique céleste, de géodésie, de topographie, en un mot, dans tous les cas où l'on n'a pas à lire ses nombres dans un registre d'observations astronomiques.

La seule bonne raison que l'on pourrait nous opposer, c'est le manque de bonnes tables trigonométriques décimales. Les

---

*) Voyez, pour plus de détails, l'Introduction des Tables décimales de Hobert et Ideler, Berlin 1799.

seules tables à sept figures construites dans ce système, celles de Hobert et Ideler, de Borda et de Callet, sont mal disposées pour les usages pratiques, l'intervalle des divisions étant trop considérable. Les tables de Plauzoles, à six figures, sont beaucoup plus commodes, et cependant elles sont peu répandues. Pour que les calculateurs pussent jouir des avantages de la division décimale, il faudrait que l'on tirât des grandes Tables manuscrites du Cadastre *) une série de tables répondant aux divers degrés de précision dont on a besoin dans les calculs, c'est-à-dire, des tables à sept, à six, à cinq et à quatre figures. Si cette publication était faite avec les mêmes soins et une disposition aussi convenable que celle des bonnes tables sexagésimales publiées récemment en Allemagne, nous sommes convaincu que le seul système vraiment rationnel reprendrait bientôt faveur, et que les tables sexagésimales ne trouveraient plus place que dans les observatoires, où elles devront longtemps encore être exclusivement en usage.

Note V.

Sur la théorie des parallèles.

Si l'on juge de la direction d'une droite par l'angle dont elle s'écarte d'une direction donnée, deux droites qui forment avec une troisième des angles correspondants égaux seront de même direction, et le théorème démontré au §. 14. pourra s'énoncer ainsi:

Deux droites de même direction ne peuvent se rencontrer, et sont parallèles.

Cette proposition pourrait être prise pour axiôme, en considérant l'idée de direction comme une donnée fondamentale de l'expérience. Dès lors, il serait évident que deux droites qui se rencontrent ont des directions différentes, et par suite celles qui ont la même direction ne peuvent se rencontrer.

Dans cet ordre d'idées, l'axiôme réciproque, c'est-à-dire, l'axiome IV. du §. 15. pourrait s'énoncer comme il suit:

Dans un plan, une droite quelconque rencontre toutes celles qui n'ont pas la même direction.

---

*) Il existe deux exemplaires de ces tables, déposés l'un à la bibliothèque de l'Observatoire de Paris, l'autre à celle de l'Institut. Voy. Nouvelles Annales de Mathématiques, Bulletin de Bibliographie, 1855, p. 14; Comptes rendus de l'Acad. des sciences, 24. mai 1858, et Annales de l'Observatoire, t. LV.

Cet énoncé devient encore plus évident, lorsqu'on le rapproche de ce que nous avons dit (§. 6.) de la génération rectiligne du plan.

Cette manière de présenter la théorie des parallèles est plus simple et plus symmétrique que la méthode ordinaire, et nous semble avantageuse pour un premier enseignement de la géométrie *). En revenant plus tard sur cet objet, on montrerait, comme nous l'avons fait au §. 14., que le parallélisme des droites de même direction est une conséquence des axiômes précédents.

Note VI.

Sur la longueur d'une ligne courbe.

On démontre, dans la plupart des traités de Calcul intégral, ce théorème, qu'il existe une limite commune, finie et déterminée, pour les périmètres des polygones infinitésimaux inscrits et circonscrits à un arc de courbe donné. On peut présenter cette démonstration sous une forme tout à fait élémentaire, sans employer l'algorithme de l'analyse transcendante.

La démonstration repose sur le principe fondamental du calcul intégral **), savoir, que, dans une somme d'éléments infiniment petits, on peut, sans changer la limite de cette somme, altérer chacun de ces éléments d'une fraction de lui-même infiniment petite. — En effet, en remplaçant toutes ces fractions par la plus grande d'entre elles, qui est encore infiniment petite, on voit que l'altération de la somme est moindre que cette fraction maximum de la somme elle-même, c'est-à-dire que, si $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ sont tous moindres que ε, on a $\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \ldots < \varepsilon(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots)$. La somme étant supposée finie, l'altération sera donc moindre qu'une fraction infiniment petite d'une quantité finie, et par suite elle sera infiniment petite. Donc l'altération de la limite sera la limite d'un infiniment petit, c'est-à-dire, zéro.

Cette démonstration ne repose, comme on voit, sur aucune considération qui dépasse les principes que l'on a souvent occasion d'invoquer en géométrie élémentaire.

Disons en passant que ce principe fournit immédiatement les démonstrations les plus simples des théorèmes sur l'équivalence de deux prismes ou de deux pyramides de même base et de même hauteur.

---

*) Voy. Note VII.

**) Duhamel, Élements de Calcul infinitésimal, t. I, p. 35.

Supposons maintenant que l'on ait un triangle dont un seul angle soit infiniment petit. Le côté opposé à cet angle sera infiniment petit par rapport à chacun des deux autres *), et il en sera de même, à plus forte raison, de la différence de ces deux côtés par rapport à chacun d'eux. Nous énoncerons ce résultat d'une manière abrégée, en disant que les deux côtés qui comprennent l'angle infiniment petit diffèrent infiniment peu l'un de l'autre.

Il résulte de là que, si l'on projette, par des parallèles de direction quelconque, orthogonale ou non, une droite de longueur donnée sur un axe faisant avec cette droite un angle infiniment petit, la différence entre la droite et sa projection sera infiniment petite par rapport à chacune d'elles; en d'autres termes, la droite et sa projection différeront infiniment peu.

Donc, si la droite qui ferme un contour polygonal fait avec chacun des côtés de ce contour des angles infiniment petits, la longueur de cette droite ne diffèrera qu'infiniment peu de celle du contour polygonal.

Cela posé, considérons un arc de courbe, que nous supposerons plane, pour plus de simplicité, et admettons que cet arc soit entièrement convexe **). D'après les corollaires de la proposition 20. du premier livre d'Euclide (§. 24.), on voit: 1°. que le contour d'un polygone inscrit dans l'arc convexe croît à mesure que l'on établit de nouveaux sommets intermédiaires, en subdivisant les arcs; 2°. que le contour d'un polygone circonscrit au même arc diminue à mesure que l'on trace de nouveaux côtés, dont les points de contact subdivisent les arcs; 3°. qu'un quelconque des contours inscrits est toujours moindre qu'un quelconque des contours circonscrits.

On en conclut d'abord: 1°. que les contours inscrits, dont on augmente le nombre des côtés suivant une certaine loi, allant d'une part toujours en croissant, mais restant d'autre part toujours moindre qu'un polygone circonscrit quelconque, tendront nécessairement vers une certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision;

2°. Que les contours circonscrits, allant toujours en diminuant par la subdivision des arcs, et restant toujours supérieurs à un polygone inscrit quelconque, tendront aussi vers une certaine limite finie, dépendante ou non de la loi de subdivision.

---

*) Le rapport de cette différence à chacun des cotés serait même infiniment petit du second ordre, si le triangle était rectangle.

**) S'il ne l'était pas, on le décomposerait en portions convexes.

Il reste à prouver que tous ces contours, tant inscrits que circonscrits, tendent vers une seule et même limite, indépendante de la loi de subdivision.

Considérons un côté d'un contour inscrit, et un polygone inscrit dans l'arc soustendu par ce côté. Si ce côté est assez petit, sa direction, ainsi que la direction d'un côté quelconque du polygone en question, fera un angle aussi petit qu'on voudra avec la tangente et un quelconque des points de l'arc. Donc, d'après la proposition démontrée ci-dessus, le côté et le polygone diffèrent l'un de l'autre infiniment peu.

Soient maintenant deux polygones inscrits quelconques, à côtés suffisamment petits. Si nous les comparons l'un et l'autre au polygone formé par la réunion de tous leurs sommets, et correspondant par conséquent à une subdivision de chacun des deux systèmes d'arcs, chaque côté de l'un quelconque des deux contours primitifs diffèrera infiniment peu de la portion correspondante du troisième contour. Donc chacun des deux premiers contours diffèrera infiniment peu du troisième, et par suite les deux premiers contours diffèreront infiniment peu l'un de l'autre. Donc ils ne peuvent tendre que vers une seule et même limite.

On étendrait de même ce résultat à deux polygones circonscrits, ou à un polygone inscrit comparé avec un polygone circonscrit.

Ainsi se trouve établie l'existence de la longueur d'une courbe plane.

Il en résulte en même temps:

1°. Que cette longueur est plus grande que celle d'une ligne droite ayant les mêmes extrémités;

2°. Qu'une courbe convexe est plus courte qu'une courbe quelconque qui l'enveloppe de toutes parts sans la couper, ou qui l'enveloppe en s'appuyant sur les mêmes extrémités;

3°. Que la limite du rapport d'un arc infiniment petit à sa corde est égale à l'unité.

Le même mode de démonstration servirait à établir l'existence de la longueur d'une courbe non plane, et celle de l'aire d'une surface courbe.

Note VII.

Réflexions sur l'enseignement de la géométrie élémentaire.

Tout le monde s'accorde à répéter que l'un des buts de l'en-

seignement des mathématiques doit être de donner plus de rectitude à l'esprit, en lui offrant un modèle de logique inflexible, appliquée à des principes certains. Pour que ce but soit atteint, il faut évidemment que l'enseignement ne se départe jamais de cette rigueur qui distingue les mathématiques de toutes les autres sciences, et c'est là une condition essentielle pour que cette étude soit fructueuse, aussi bien comme gymnastique intellectuelle que comme source d'applications pratiques.

Mais la rigueur, telle que nous la concevons, n'est nullement compromise par l'omission volontaire de la démonstration d'une proposition, tandis qu'elle l'est par l'introduction d'une démonstration fausse ou incomplète. La logique n'a rien à souffrir d'une lacune laissée provisoirement dans la suite des raisonnements, pourvu que cette lacune soit clairement indiquée, et qu'on ne cherche pas à la dissimuler.

C'est d'après cette manière de voir que nous concevons la possibilité d'un enseignement gradué de la géométrie élémentaire, conduit, à tous ses degrés, d'après un plan unique et invariable, toujours soumis aux règles de la plus sévère logique, et où les difficultés ne se montreraient qu'à mesure que les esprits seraient préparés à les aborder.

Pour cela, l'étude de la géométrie devrait être reprise successivement à divers points de vue, correspondants aux divers degrés d'initiation des élèves. Pour les commençants, il s'agit avant tout de se familiariser avec les figures et leurs dénominations, d'apprendre des faits, d'entrevoir leurs applications les plus simples et les plus immédiates, celles surtout qui se rapportent aux usages de la vie ordinaire. On devra donc, au début, multiplier les axiômes, employer au lieu de démonstrations, les vérifications expérimentales, l'analogie, l'induction, en ne laissant jamais oublier que ce mode d'exposition est essentiellement provisoire. On exercera l'élève aux tracés graphiques, au maniement des instruments, à la solution de divers problèmes de levé des plans et d'arpentage, à la construction des figures en relief au moyen de fils ou d'argile plastique, à la représentation de ces figure à l'aide de leurs projections, etc., etc. Le maître saura proportionner au degré de développement intellectuel de l'élève la part plus ou moins grande qu'il devra faire au raisonnement, dans cette première ébauche des études géométriques; et la grande variété d'applications qu'offrent la géographie, l'astronomie, l'arpentage, la stéréotomie, etc., suffira pour donner à cet enseignement un intérêt soutenu.

On pourra mêler à la géométrie pure et appliquée l'étude des propriétés les plus simples des nombres entiers, que l'on représentera par des points régulièrement distribués sur des droites ou sur des plans, ou encore par des longueurs de droites, des aires de rectangles ou des volumes de parallélépipèdes. Cette manière de traiter l'arithmétique conduit aussi promptement que la méthode abstraite aux règles du calcul, et chaque raisonnement acquiert une plus grande clarté par cette représentation qui parle aux yeux.

On exposera ensuite le systéme des poids et mesures, tandis que, d'un autre côté, on étudiera les propriétés des proportions entre nombres rationnels.

Remarquons que les diverses théories que nous venons d'énumérer, et qui devront servir de préliminaires à l'étude rigoureuse de la géométrie, ne sont pas destinées, selon nous, à faire l'objet d'une suite unique de leçons. On ne doit pas craindre de se répéter, dans un enseignement scientifique, et les élèves devront suivre successivement plusieurs cours gradués, dont chacun comprendra les matières du cours précédent, plus les nouveaux développements qu'on y ajoutera, en faisant au raisonnement une plus large part.

Mais les programmes de ces cours successifs ne devront pas être tracés au hasard, indépendamment les uns des autres. Il faudra se garder, avant tout, d'altérer l'ordre des propositions pour substituer à une démonstration difficile un raisonnement plus simple en apparence et moins rigoureux. Si une démonstration présente quelques difficultés pour l'intelligence de l'élève, qu'on la supprime, sans la remplacer autrement que par des explications, des analogies, des vérifications expérimentales. Mais que la subordination des vérités géométriques, telle que l'exigera plus tard une étude scientifique et approfondie, soit conservée sans altération à tous les degrés de l'enseignement. Qu'il y ait unité de plan, et que les cours les plus élémentaires ne diffèrent des cours les plus élevés que par des suppressions, de telle sorte que la place de chaque démonstration soit toujours réservée, et qu'on n'ait plus qu'à l'y intercaler, lorsque l'esprit de l'élève sera suffisamment préparé.

Le premier enseignement sera donc exclusivement expérimental, et peu à peu on fera voir à l'élève comment toutes les vérités n'ont pas besoin d'être séparément constatées par l'expérience, et comment elles sont les conséquences d'un certain nombre d'entre elles, nombre que l'on restreindra de plus en plus, à mesure que

l'on avancera dans l'étude de la science, jusqu'à ce qu'on soit arrivé aux axiômes fondamentaux, dont le nombre ne peut plus être réduit.

Telle doit être, à notre avis, la première période de l'enseignement géométrique, et le programme que nous venons d'esquisser comprend toutes les notions mathématiques nécessaires aux commençants. Parallèlement à cet enseignement, l'élève pourra suivre utilement des cours élémentaires de cosmographie, de mécanique, de physique, de chimie, où il rencontrera à chaque instant des applications de ses connaissances en géométrie et en arithmétique.

Le second degré d'enseignement se rapprocherait, d'après nos idées, du système actuellement suivi dans les classes de science des lycées français. En géométrie, on adopterait la méthode euclidienne dans toute sa rigueur, et le cadre des études embrasserait à peu près les Éléments d'Euclide et les premières notions sur les sections coniques.

On joindrait à cette étude celle des premières notions d'algèbre, en rattachant les règles du calcul algébrique aux propriétés des figures par des raisonnements analogues à ceux du second livre d'Euclide. On établirait ainsi par la géométrie, en même temps que par l'analyse abstraite, les principales règles de la multiplication algébrique, la résolution des équations du second degré, les principaux théorèmes sur les maxima et les minima, etc.

L'étude rigoureuse de la géométrie conduisant tout naturellement au principe des limites et à la considération de l'incommensurabilité, on serait alors amené à introduire les symboles appelés nombres incommensurables, et à revenir sur la théorie des proportions, en l'étendant à des grandeurs continues, généralement incommensurables.

On pourrait passer de là à l'étude des logarithmes et de la trigonométrie.

Mais cette étude de la géométrie scientifique et rigoureuse doit elle-même être graduée, comme celle de la géométrie expérimentale. S'il peut être avantageux, dans une première exposition, de s'attacher autant que possible à la méthode des Anciens, afin d'établir d'abord avec briéveté et précision les faits fondamentaux de la science; il nous semble, au contraire, que dans les révisions successives du cours de géométrie, on devra s'étudier de préférence à faire comprendre, par des applications

aux vérités simples et désormais bien connues de la géométrie élémentaire, les grandes méthodes et les puissants procédés de l'analyse moderne. On pourra, de cette manière, sans sortir du cadre d'Euclide, initier l'elève à tous les procédés qu'il aura plus tard à appliquer dans les parties les plus élevées de la science.

Ainsi, on sait quelles sont, en géometrie et en arithmétique, les nombreuses applications du principe des limites.

L'étude des lieux géométriques, employés comme moyens généraux de résolution des problèmes déterminés, conduira naturellement à la notion de fonction d'une ou de deux variables indépendantes. En y joignant même le mouvement, on aura une représentation sensible des fonctions de trois et même de quatre variables.

Le cercle et les sections coniques donneront lieu d'appliquer la méthode des tangentes, et de présenter la méthode des limites sous la forme plus commode de la méthode infinitésimale.

On reviendra alors avec plus de détails sur les questions de maxima et de minima, et on les raménera à la méthode des tangentes, dans le cas d'une seule variable indépendante.

Les quadratures et les cubatures des lignes et des surfaces pourront s'effectuer non-seulement par les méthodes détournées des Anciens, mais encore par les méthodes directes sur lesquelles est fondé le calcul intégral. Ainsi l'équivalence de deux prismes de même base et de même hauteur pourra s'établir par la division en tranches infiniment minces, comme nous l'avons déjà indiqué dans la Note précédente.

C'est alors qu'il conviendra d'introduire les notions de longueur d'une ligne courbe quelconque et d'aire d'une surface courbe quelconque, en justifiant et généralisant les définitions restreintes et incomplètes qu'on en avait données, au moyen des polygones réguliers, en traitant du cercle et des trois corps ronds.

On peut enfin, sans sortir du même cadre, donner des exemples de courbes enveloppes, d'applications de la méthode inverse des tangentes, etc.

En un mot, la géométrie d'Euclide peut servir de texte à une exposition de tous les principes fondamentaux de l'analyse moderne, et l'on conçoit quel fruit un esprit intelligent pourrait retirer d'une telle préparation à l'étude de la géométrie analytique et du calcul infinitésimal.

XIII.

Note über lineare Differentialgleichungen.

Von

Herrn *Simon Spitzer,*

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Sehr häufig kommt es vor, dass in lineare Differentialgleichungen statt der abhängig Variablen y eine andere abhängig Variable z eingeführt werden soll, welche mit y in folgendem Zusammenhange steht:

$$y = e^{\alpha x} z,$$

woselbst α eine constante Zahl ist. Wir wollen im Folgenden zeigen, auf welch einfache Weise diess zu bewerkstelligen ist. Sei vorerst

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + a_{n-2} y^{(n-2)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (1)$$

die vorgelegte Gleichung. Setzt man hierin $y = e^{\alpha x} z$, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&a_n \left[z^{(n)} + \binom{n}{1} \alpha z^{(n-1)} + \binom{n}{2} \alpha^2 z^{(n-2)} + \ldots \right] \\
&+ a_{n-1} \left[z^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} \alpha z^{(n-2)} + \binom{n-1}{2} \alpha^2 z^{(n-3)} + \ldots \right] \\
&+ a_{n-2} \left[z^{(n-2)} + \binom{n-2}{1} \alpha z^{(n-3)} + \binom{n-2}{2} \alpha^2 z^{(n-4)} + \ldots \right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ a_1 (z' + \alpha z) + a_0 z = 0,
\end{aligned}$$

oder anders geordnet:

$$\left.\begin{aligned}
&a_n z^{(n)}\\
&+\left[a_{n-1}+\binom{n}{1}\alpha a_n\right]z^{(n-1)}\\
&+\left[a_{n-2}+\binom{n-1}{1}\alpha a_{n-1}+\binom{n}{2}\alpha^2 a_n\right]z^{(n-2)}\\
&+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&+\left[a_1+2\alpha a_2+3\alpha^2 a_3+\ldots.+n\alpha^{n-1}a_n\right]z'\\
&+\left[a_0+\alpha a_1+\alpha^2 a_2+\ldots.+\alpha^n a_n\right]z=0.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Setzt man nun

$$a_0+\alpha a_1+\alpha^2 a_2+\ldots.+\alpha^n a_n=\varphi(\alpha),$$

so gestattet die Gleichung (2) folgende Schreibweise:

$$\frac{\varphi^{(n)}(\alpha)}{n!}z^{(n)}+\frac{\varphi^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}z^{(n-1)}+\frac{\varphi^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!}z^{(n-2)}+\ldots+\varphi'(\alpha)z'+\varphi(\alpha)z=0.$$

Wird auf gleiche Weise in die Differentialgleichung

$$(a_n+b_n x)y^{(n)}+(a_{n-1}+b_{n-1}x)y^{(n-1)}+(a_{n-2}+b_{n-2}x)y^{(n-2)}$$
$$+\ldots.+(a_1+b_1 x)y'+(a_0+b_0 x)y=0$$

für y die Substitution

$$y=e^{\alpha x}z$$

gemacht, so erhält man, wenn man

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+a_{n-2}\alpha^{n-2}+\ldots.+a_1\alpha+a_0=\varphi(\alpha),$$
$$b_n\alpha^n+b_{n-1}\alpha^{n-1}+b_{n-2}\alpha^{n-2}+\ldots.+b_1\alpha+b_0=\psi(\alpha)$$

setzt, auf ähnliche Weise vorgehend, folgende Gleichung in z:

$$\frac{\varphi^{(n)}(\alpha)+x\psi^{(n)}(\alpha)}{n!}z^{(n)}+\frac{\varphi^{(n-1)}(\alpha)+x\psi^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!}z^{(n-1)}$$
$$+\frac{\varphi^{(n-2)}(\alpha)+x\psi^{(n-2)}(\alpha)}{(n-2)!}z^{(n-2)}+\ldots.$$
$$\ldots.+[\varphi'(\alpha)+x\psi'(\alpha)]z'+[\varphi(\alpha)+x\psi(\alpha)]z=0,$$

und ähnlich kann man verfahren bei allen jenen linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen von x sind.

XIV.

Die Methoden von Tschirnhaus und Jerrard zur Transformation der Gleichungen.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

Zu allen Zeiten hat die allgemeine Auflösung der Gleichungen die Mathematiker lebhaft beschäftigt; auch Ehrenfried Walther von Tschirnhaus *), Herr auf Kiesslingswalde und Stoltzenberg, Kurfürstlich Sächsischer Rath, geboren zu Kiesslingswalde unweit Görlitz in der Oberlausitz am 10. April 1651, gestorben am 11. October 1708, hat sich eifrigst bei diesen Arbeiten und Bestrebungen betheiligt, und glaubte dadurch zu dem so sehr erstrebten Ziele zu gelangen, dass er durch geeignete Transformationen der aufzulösenden Gleichung beliebig viele Glieder derselben wegzuschaffen suchte, — so wie man ja schon längst aus jeder Gleichung das zweite Glied wegzuschaffen verstand, — um dadurch endlich entweder zu einer reinen Gleichung

---

*) Häufiger, aber wahrscheinlich unrichtig, „Tschirnhausen" geschrieben. Die französischen Mathematiker, welche sich, namentlich der berühmte Lagrange, der über die Methode von Tschirnhaus in den Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin. 1770 et 1771 tiefsinnige Untersuchungen angestellt hat, eifriger mit unserem Landsmanne beschäftigt haben, als wir selbst, schreiben nicht selten „Tschirnaüs", wie z. B. J. A. Serret überall in dem Cours d'Algèbre supérieure, professé à la Faculté des sciences de Paris. Paris. 1854.; hier ist also auch die Form „Tschirnhaus" unverkennbar.

oder wenigstens zu einer durch schon früher bekannte Hülfsmittel auflösbaren Gleichung zu gelangen. Wenn auch Tschirnhaus auf diesem Wege sein Ziel nicht erreichte und nicht erreichen konnte, aus Gründen, welche wir später entwickeln werden; so ist sein Gedanke doch immer als ein sehr scharfsinniger betrachtet worden, und seine Methode *), die er in den Actis Eruditorum. 1683. p. 204. bekannt machte, ist namentlich in neuester Zeit wieder besonders hervorgetreten und hat die Aufmerksamkeit der Mathematiker von Neuem auf sich gezogen, nachdem der Engländer George B. Jerrard, Esq. **), in ähnlicher Richtung sich bewegend wie Tschirnhaus, die merkwürdige und wichtige Entdeckung gemacht hat, dass aus jeder Gleichung das zweite, dritte und vierte Glied bloss mit Hülfe der Auflösung einer Gleichung des dritten Grades weggeschafft werden kann, worauf dann weiter Hermite und Brioschi ihre berühmten Auflösungen der Gleichungen des fünften Grades durch die elliptischen Functionen basirt haben. Die grosse Wichtigkeit dieser Gegenstände und die immer weitere Ausbildung und Vervollkommnung der betreffenden Untersuchungen in neuester Zeit geben mir jetzt hinreichende Veranlassung, denselben einige Abhandlungen in dieser Zeitschrift zu widmen, was ich bis jetzt absichtlich unterlassen habe, weil die Nothwendigkeit der erwähnten weiteren Ausbildung und Vervollkommnung sich voraussehen liess. Die vorliegende Abhandlung soll daher zunächst den Umformungs-Methoden von Tschirnhaus und Jerrard gewidmet sein, indem ich im nächsten Paragraphen sogleich mit der ersteren beginnen werde.

§. 2.

Die gegebene Gleichung sei:

$$1)\qquad x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots.+A_{m-1}x+A_m=0,$$

über die wir zuvörderst Folgendes bemerken.

Aus 1) ergiebt sich:

$$x^m=-A_1x^{m-1}-A_2x^{m-2}-\ldots.-A_{m-1}x-A_m$$

oder, wenn wir

*) „Méthode élégante de Tschirnaüs" (Serret a. a. O. p. 113).

**) M. s. z. B. Inquiry into the validity of a method recently proposed by George B. Jerrard, Esq. for transforming and resolving Equations of elevated degrees. By Professor Sir. W. R. Hamilton. London. 1837.

$$\overset{0}{A}_1 = -A_1,\quad \overset{0}{A}_2 = -A_2, \ldots, \overset{0}{A}_{m-1} = -A_{m-1},\quad \overset{0}{A}_m = -A_m$$

setzen:

$$x^m = \overset{0}{A}_1 x^{m-1} + \overset{0}{A}_2 x^{m-2} + \ldots + \overset{0}{A}_{m-1} x + \overset{0}{A}_m.$$

Also ist:

$$x^{m+1} = \overset{0}{A}_1 x^m + \overset{0}{A}_2 x^{m-1} + \ldots + \overset{0}{A}_{m-1} x^2 + \overset{0}{A}_m x,$$

und führen wir nun in diese Gleichung für x^m seinen obigen Ausdruck ein, so erhalten wir für x^{m+1} offenbar einen Ausdruck von der folgenden Form:

$$x^{m+1} = \overset{1}{A}_1 x^{m-1} + \overset{1}{A}_2 x^{m-2} + \ldots + \overset{1}{A}_{m-1} x + \overset{1}{A}_m.$$

Also ist:

$$x^{m+2} = \overset{1}{A}_1 x^m + \overset{1}{A}_2 x^{m-1} + \ldots + \overset{1}{A}_{m-1} x^2 + \overset{1}{A}_m x,$$

und führen wir in diese Gleichung für x^m wieder seinen obigen Ausdruck ein, so erhalten wir für x^{m+2} einen Ausdruck von der folgenden Form:

$$x^{m+2} = \overset{2}{A}_1 x^{m-1} + \overset{2}{A}_2 x^{m-2} + \ldots + \overset{2}{A}_{m-1} x + \overset{2}{A}_m.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und man sieht also aus dem Vorhergehenden, dass sich die Potenz x^{m+k}, wo k eine positive ganze Zahl, Null eingeschlossen, bezeichnet, immer durch einen Ausdruck von der Form:

$$2)\qquad x^{m+k} = \overset{k}{A}_1 x^{m-1} + \overset{k}{A}_2 x^{m-2} + \ldots + \overset{k}{A}_{m-1} x + \overset{k}{A}_m$$

darstellen lässt, wo natürlich die Coefficienten

$$\overset{k}{A}_1,\ \overset{k}{A}_2,\ \overset{k}{A}_3, \ldots, \overset{k}{A}_{m-1},\ \overset{k}{A}_m$$

bloss von den Coefficienten der gegebenen Gleichung 1) abhängen und durch dieselben bestimmt werden.

§. 3.

Eine neue unbekannte Grösse y einführend, setzen wir nun:

$$3)\ \ldots\ y = \overset{1}{a}_0 + \overset{1}{a}_1 x + \overset{1}{a}_2 x^2 + \ldots + \overset{1}{a}_{n-1} x^{n-1} + \overset{1}{a}_n x^n,$$

und nehmen an, dass n eine positive ganze Zahl bezeichne, die kleiner als m ist; aus den beiden Gleichungen 1) und 3) elimi-

niren wir, um eine, y als unbekannte Grösse enthaltende Gleichung zu erhalten, die Grösse x, wozu wir auf folgende Art gelangen.

Aus 3) bilden wir die Potenzen

$$y^2,\quad y^3,\quad y^4,\quad y^5,\ldots,y^m;$$

und stellen dieselben, was nach dem vorhergehenden Paragraphen immer möglich ist, unter der folgenden Form dar:

$$4)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} y^2 = \overset{2}{a}_0 + \overset{2}{a}_1 x + \overset{2}{a}_2 x^2 + \ldots + \overset{2}{a}_{m-1} x^{m-1}, \\ y^3 = \overset{3}{a}_0 + \overset{3}{a}_1 x + \overset{3}{a}_2 x^2 + \ldots + \overset{3}{a}_{m-1} x^{m-1}, \\ y^4 = \overset{4}{a}_0 + \overset{4}{a}_1 x + \overset{4}{a}_2 x^2 + \ldots + \overset{4}{a}_{m-1} x^{m-1}, \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \\ y^m = \overset{m}{a}_0 + \overset{m}{a}_1 x + \overset{m}{a}_2 x^2 + \ldots + \overset{m}{a}_{m-1} x^{m-1}. \end{array}\right.$$

Sind nun

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\ldots,x_m$$

die m Wurzeln der gegebenen Gleichung 1) und

$$y_1,\quad y_2,\quad y_3,\quad y_4,\ldots,y_m$$

die entsprechenden Werthe von y; so ist nach 3):

$$\begin{array}{l} y_1 = \overset{1}{a}_0 + \overset{1}{a}_1 x_1 + \overset{1}{a}_2 x_1^2 + \ldots + \overset{1}{a}_n x_1^n, \\ y_2 = \overset{1}{a}_0 + \overset{1}{a}_1 x_2 + \overset{1}{a}_2 x_2^2 + \ldots + \overset{1}{a}_n x_2^n, \\ y_3 = \overset{1}{a}_0 + \overset{1}{a}_1 x_3 + \overset{1}{a}_2 x_3^2 + \ldots + \overset{1}{a}_n x_3^n, \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \\ y_m = \overset{1}{a}_0 + \overset{1}{a}_1 x_m + \overset{1}{a}_2 x_m^2 + \ldots + \overset{1}{a}_n x_m^n, \end{array}$$

und nach 4):

$$\begin{array}{l} y_1^2 = \overset{2}{a}_0 + \overset{2}{a}_1 x_1 + \overset{2}{a}_2 x_1^2 + \ldots + \overset{2}{a}_{m-1} x_1^{m-1}, \\ y_2^2 = \overset{2}{a}_0 + \overset{2}{a}_1 x_2 + \overset{2}{a}_2 x_2^2 + \ldots + \overset{2}{a}_{m-1} x_2^{m-1}, \\ y_3^2 = \overset{2}{a}_0 + \overset{2}{a}_1 x_3 + \overset{2}{a}_2 x_3^2 + \ldots + \overset{2}{a}_{m-1} x_3^{m-1}, \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \\ y_m^2 = \overset{2}{a}_0 + \overset{2}{a}_1 x_m + \overset{2}{a}_2 x_m^2 + \ldots + \overset{2}{a}_{m-1} x_m^{m-1}; \end{array}$$

$$y_1{}^3 = \overset{3}{a}_0 + \overset{3}{a}_1 x_1 + \overset{3}{a}_2 x_1{}^2 + \ldots. + \overset{3}{a}_{m-1} x_1{}^{m-1},$$
$$y_2{}^3 = \overset{3}{a}_0 + \overset{3}{a}_1 x_2 + \overset{3}{a}_2 x_2{}^2 + \ldots. + \overset{3}{a}_{m-1} x_2{}^{m-1},$$
$$y_3{}^3 = \overset{3}{a}_0 + \overset{3}{a}_1 x_3 + \overset{3}{a}_2 x_3{}^2 + \ldots. + \overset{3}{a}_{m-1} x_3{}^{m-1},$$

u. s. w.

$$y_m{}^3 = \overset{3}{a}_0 + \overset{3}{a}_1 x_m + \overset{3}{a}_2 x_m{}^2 + \ldots. + \overset{3}{a}_{m-1} x_m{}^{m-1};$$

$$y_1{}^4 = \overset{4}{a}_0 + \overset{4}{a}_1 x_1 + \overset{4}{a}_2 x_1{}^2 + \ldots. + \overset{4}{a}_{m-1} x_1{}^{m-1},$$
$$y_2{}^4 = \overset{4}{a}_0 + \overset{4}{a}_1 x_2 + \overset{4}{a}_2 x_2{}^2 + \ldots. + \overset{4}{a}_{m-1} x_2{}^{m-1},$$
$$y_3{}^4 = \overset{4}{a}_0 + \overset{4}{a}_1 x_3 + \overset{4}{a}_2 x_3{}^2 + \ldots. + \overset{4}{a}_{m-1} x_3{}^{m-1},$$

u. s. w.

$$y_m{}^4 = \overset{4}{a}_0 + \overset{4}{a}_1 x_m + \overset{4}{a}_2 x_m{}^2 + \ldots. + \overset{4}{a}_{m-1} x_m{}^{m-1};$$

u. s. w.

u. s. w.

$$y_1{}^m = \overset{m}{a}_0 + \overset{m}{a}_1 x_1 + \overset{m}{a}_2 x_1{}^2 + \ldots. + \overset{m}{a}_{m-1} x_1{}^{m-1},$$
$$y_2{}^m = \overset{m}{a}_0 + \overset{m}{a}_1 x_2 + \overset{m}{a}_2 x_2{}^2 + \ldots. + \overset{m}{a}_{m-1} x_2{}^{m-1},$$
$$y_3{}^m = \overset{m}{a}_0 + \overset{m}{a}_1 x_3 + \overset{m}{a}_2 x_3{}^2 + \ldots. + \overset{m}{a}_{m-1} x_3{}^{m-1},$$

u. s. w.

$$y_m{}^m = \overset{m}{a}_0 + \overset{m}{a}_1 x_m + \overset{m}{a}_2 x_m{}^2 + \ldots. + \overset{m}{a}_{m-1} x_m{}^{m-1}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Summe der $k$ten Potenzen von

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad x_4, \ldots., x_m$$

durch S_k und die Summe der $k$ten Potenzen von

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_4, \ldots., y_m$$

durch s_k, so ergeben sich aus dem Vorstehenden unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$5) \ldots \left\{ \begin{array}{l} s_1 = m\overset{1}{a}_0 + \overset{1}{a}_1 S_1 + \overset{1}{a}_2 S_2 + \ldots. + \overset{1}{a}_n S_n, \\ s_2 = m\overset{2}{a}_0 + \overset{2}{a}_1 S_1 + \overset{2}{a}_2 S_2 + \ldots. + \overset{2}{a}_{m-1} S_{m-1}, \\ s_3 = m\overset{3}{a}_0 + \overset{3}{a}_1 S_1 + \overset{3}{a}_2 S_2 + \ldots. + \overset{3}{a}_{m-1} S_{m-1}, \\ s_4 = m\overset{4}{a}_0 + \overset{4}{a}_1 S_1 + \overset{4}{a}_2 S_2 + \ldots. + \overset{4}{a}_{m-1} S_{m-1}, \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \\ s_m = m\overset{m}{a}_0 + \overset{m}{a}_1 S_1 + \overset{m}{a}_2 S_2 + \ldots. + \overset{m}{a}_{m-1} S_{m-1}. \end{array} \right.$$

Nach den Formeln des Newton'schen Satzes von den Summen der Potenzen der Wurzeln der Gleichungen kann man aus den gegebenen Coefficienten der Gleichung 1) die Summen

$$S_1, \quad S_2, \quad S_3, \ldots, S_{m-1}, \quad S_n$$

bilden, erhält sodann

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \ldots, s_{m-1}, \quad s_m$$

mittelst der Gleichungen 5), und kann nun hieraus wieder mittelst der Formeln des genannten Satzes die Coefficienten der Gleichung des $m$ten Grades finden, welche für y als unbekannte Grösse die Wurzeln

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_4, \ldots, y_m$$

hat, also diese Gleichung, die natürlich die durch Elimination von x aus den beiden Gleichungen 1) und 3) hervorgehende Gleichung sein wird, selbst bilden. Bezeichnen wir nämlich diese Gleichung durch

$$6) \ldots y^m + P_1 y^{m-1} + P_2 y^{m-2} + \ldots + P_{m-1} y + P_m = 0,$$

so haben wir zur Bestimmung der Coefficienten

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots, P_{m-1}, \quad P_m$$

nach dem Newton'schen Satze bekanntlich die folgenden Formeln:

7)

$$P_1 = -s_1,$$
$$P_2 = -\tfrac{1}{2}(P_1 s_1 + s_2),$$
$$P_3 = -\tfrac{1}{3}(P_2 s_1 + P_1 s_2 + s_3),$$
$$P_4 = -\tfrac{1}{4}(P_3 s_1 + P_2 s_2 + P_1 s_3 + s_4),$$
$$P_5 = -\tfrac{1}{5}(P_4 s_1 + P_3 s_2 + P_2 s_3 + P_1 s_4 + s_5),$$

u. s. w.

$$P_m = -\frac{1}{m}(P_{m-1} s_1 + P_{m-2} s_2 + P_{m-3} s_3 + \ldots + P_1 s_{m-1} + s_m).$$

Man kann zu der durch Elimination von x aus den Gleichungen 1) und 3) hervorgehenden Gleichung aber auch auf folgende Art gelangen. In dem Gleichungssysteme 4) sind $m-1$ Gleichungen enthalten, welche in Bezug auf

$$x, \quad x^2, \quad x^3, \quad x^4, \ldots, x^{m-1}$$

vom ersten Grade sind, so dass man also diese Grössen aus den genannten Gleichungen immer auf bekannte Weise bestimmen, und

die erhaltenen Ausdrücke dann für die entsprechenden Potenzen von x in die Gleichung 3) einführen kann, wobei man zu bemerken hat, dass n nicht grösser als $m-1$ ist. Durch dieses Verfahren, welches den Vortheil hat, dass man dabei zugleich x als ganze rationale Function von y ausgedrückt erhält, ergiebt sich die gesuchte Gleichung des $m$ten Grades mit der unbekannten Grösse y.

Sollen nun in der Gleichung 6) vom zweiten Gliede an n Glieder verschwinden, so muss, wie aus den Gleichungen 7) ohne Weiteres erhellet,

$$8) \ldots s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad s_4 = 0, \ldots, s_n = 0$$

sein, und die Coefficienten

$$\overset{1}{a}_0, \quad \overset{1}{a}_1, \quad \overset{1}{a}_2, \quad \overset{1}{a}_3, \ldots, \overset{1}{a}_{n-1}, \quad \overset{1}{a}_n$$

in dem Ausdrucke 3) von y, von denen die Potenzensummen

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4, \ldots, s_n$$

nach dem Obigen abhängen, müssen also so bestimmt werden, dass den Gleichungen 8) genügt wird, wobei man, da die Anzahl der zu bestimmenden Coefficienten $n+1$, die Anzahl der zu erfüllenden Gleichungen aber nur n ist, immer einen der ersteren willkührlich annehmen kann.

Betrachten wir, indem x, y überhaupt zwei zusammengehörende Werthe der im Allgemeinen eben so bezeichneten Grössen bezeichnen,

$$\overset{1}{a}_0, \quad \overset{1}{a}_1, \quad \overset{1}{a}_2, \ldots, \overset{1}{a}_{n-1}, \quad \overset{1}{a}_n$$

als unabhängige veränderliche Grössen, was offenbar verstattet ist, von denen nach dem Obigen x gar nicht, aber natürlich y abhängt, so ist nach 3):

$$\frac{\partial y}{\partial \overset{1}{a}_1} = x,$$

und nach 6):

$$\{my^{m-1} + (m-1)P_1 y^{m-2} + (m-2)P_2 y^{m-2} + \ldots + P_{m-1}\} \frac{\partial y}{\partial \overset{1}{a}_1}$$

$$+ y^{m-1} \frac{\partial P_1}{\partial \overset{1}{a}_1} + y^{m-2} \frac{\partial P_2}{\partial \overset{1}{a}_1} + \ldots + y \frac{\partial P_{m-1}}{\partial \overset{1}{a}_1} + \frac{\partial P_m}{\partial \overset{1}{a}_1} = 0;$$

also nach diesen beiden Gleichungen:

9)

$$x = -\frac{y^{m-1}\frac{\partial P_1}{\partial a_1} + y^{m-2}\frac{\partial P_2}{\partial a_1} + \dots + y\frac{\partial P_{m-1}}{\partial a_1} + \frac{\partial P_m}{\partial a_1}}{my^{m-1} + (m-1)P_1 y^{m-2} + (m-2)P_2 y^{m-2} + \dots + P_{m-1}},$$

mittelst welcher Formel aus den durch Auflösung der Gleichung 6) erhaltenen Werthen von y unmittelbar die entsprechenden Werthe von x erhalten werden. Weil nach 3):

$$10) \dots \frac{\partial y}{\partial a_2} = x^2, \quad \frac{\partial y}{\partial a_3} = x^3, \quad \frac{\partial y}{\partial a_4} = x^4, \dots, \quad \frac{\partial y}{\partial a_n} = x^n$$

ist, so kann man ganz auf ähnliche Art wie vorher auch Ausdrücke zur Bestimmung der Potenzen x^2, x^3, x^4, ..., x^n entwickeln, was einer weiteren Erläuterung nicht bedarf.

§. 4.

Wir haben im Vorhergehenden ganz im Allgemeinen gezeigt, wie die Elimination der Grösse x aus den beiden Gleichungen 1) und 3) jederzeit ausgeführt werden kann, wodurch wir auf eine Gleichung mit der unbekannten Grösse y von demselben Grade wie die Gleichung 1) mit der unbekannten Grösse x geführt worden sind. Natürlich kann man aber diese Elimination noch auf vielen anderen Wegen ausführen, welche in besonderen Fällen oft einfacher und leichter das Ziel erreichen lassen. Indem ich nun jetzt zeigen will, wie nach der Methode von Tschirnhaus die Gleichungen des dritten Grades aufzulösen sind, werde ich mich in diesem Falle bei der erwähnten Elimination der von Lagrange *) gebrauchten, ziemlich einfachen Methode bedienen.

Die aufzulösende Gleichung des dritten Grades sei:

$$11) \dots \dots \quad x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Man setze:

---

*) M. s. Leonhard Euler's Einleitung in die Analysis des Unendlichen. Aus dem Lateinischen übersetzt von J. A. C. Michelsen. Drittes Buch (Die Theorie der Gleichungen. Aus den Schriften der Herren Euler und de la Grange). Berlin. 1791. S. 291.; in der von Michelsen übersetzten Abhandlung: Bemerkungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen. Vom Herrn de la Grange. Aus dem 2ten Bande der neuen Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften in Berlin. Nr. 10.

12) . . . . $y = -p - qx + x^2,$

also, wenn der Kürze wegen

13) . . . . $r = p + y$

gesetzt wird:

14) . . . . $x^2 = r + qx.$

Hieraus folgt:

15) . . . . . $x^3 = rx + qx^2 = qr + (q^2 + r)x,$

und folglich nach 11):

$$qr + (q^2 + r)x + a(r + qx) + bx + c = 0,$$

also:

16) . . . . $x = -\frac{c + (a+q)r}{b + (a+q)q + r}.$

Führt man nun diesen Ausdruck in die Gleichung 14) ein, so erhält man die Gleichung:

$$\left\{\frac{c + (a+q)r}{b + (a+q)q + r}\right\}^2 = r - \frac{c + (a+q)r}{b + (a+q)q + r}q$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} \{c + (a+q)r\}^2 + q\{c + (a+q)r\}\{b + (a+q)q + r\} \\ \qquad -r\{b + (a+q)q + r\}^2 \end{array}\right\} = 0,$$

und, wenn man nach den Potenzen von r ordnet, wie man nach leichter Rechnung findet:

17) . . . $$\left.\begin{array}{l} r^3 \\ -(a^2 - 2b + aq)r^2 \\ -\{2ac - b^2 + (3c - ab)q - bq^2\}r \\ -c(c + bq + aq^2 + q^3) \end{array}\right\} = 0.$$

Entwickelt man nun aber mit Bezug auf die Gleichung 13) die vorstehende Gleichung nach Potenzen von y, so erhält man, wenn der Kürze wegen:

18) . . . $$\left\{\begin{array}{l} P = -a^2 + 2b - aq + 3p, \\ Q = -\{2ac - b^2 + (3c - ab)q - bq^2\} \\ \qquad -2(a^2 - 2b + aq)p \\ \qquad +3p^2, \\ R = -c(c + bq + aq^2 + q^3) \\ \qquad -\{2ac - b^2 + (3c - ab)q - bq^2\}p \\ \qquad -(a^2 - 2b + aq)p^2 \\ \qquad +p^3 \end{array}\right.$$

gesetzt wird:

$$19) \quad y^3 + Py^2 + Qy + R = 0.$$

Bildet man jetzt die beiden Gleichungen:

$$20) \quad P = 0, \quad Q = 0;$$

so kann man aus denselben durch bekannte Hülfsmittel p, q bestimmen, weil in Bezug auf diese beiden unbekannten Grössen die erste dieser beiden Gleichungen vom ersten, die zweite vom zweiten Grade ist. Führt man dann die auf diese Weise gefundenen Werthe von p, q in die Grösse R ein, und bezeichnet den dadurch erhaltenen Werth dieser Grösse durch R'; so wird die Gleichung 19):

$$21) \quad y^3 + R' = 0,$$

und lässt sich also als eine reine Gleichung nach bekannten Methoden auflösen.

Weil für den vorliegenden Fall im vorhergehenden Paragraphen

$$m = 3; \quad \overset{1}{a}_0 = -p, \quad \overset{1}{a}_1 = -q, \quad \overset{1}{a}_2 = 1;$$
$$P_1 = P, \quad P_2 = Q, \quad P_3 = R$$

zu setzen ist; so hat man nach 9) zur Bestimmung von x die Formel:

$$22) \quad x = \frac{y^2 \frac{\partial P}{\partial q} + y \frac{\partial Q}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial q}}{3y^2 + 2Py + Q}.$$

Aus dem theoretischen Gesichtspunkte betrachtet, ist diese Auflösung der Gleichungen des dritten Grades jedenfalls sehr einfach, führt aber dessenungeachtet auf sehr weitläufige Rechnungen.

Um die Gleichung des vierten Grades

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

aufzulösen, setze man wieder

$$y = -p - qx + x^2,$$

und eliminire aus den beiden vorstehenden Gleichungen die Grösse x, so erhält man eine Gleichung von der Form:

$$y^4 + Py^3 + Qy^2 + Ry + S = 0.$$

Setzt man nun

$$P=0, \quad R=0;$$

so findet man, dass aus diesen beiden Gleichungen die Grössen p, q bloss mittelst einer cubischen Gleichung bestimmt werden können; und bezeichnet man die diesen Werthen von p, q entsprechenden Werthe von Q, S respective durch Q', S', so hat man zur Bestimmung von y die Gleichung:

$$y^4+Q'y^2+S'=0,$$

welche wie eine quadratische Gleichung aufgelöst werden kann, wodurch also die Auflösung der Gleichungen des vierten Grades gegeben ist, indem x immer nach der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Methode bestimmt werden kann. Die vollständige Ausführung der Rechnung führt in nicht geringe Weitläufigkeit und kann bei Lagrange a. a. O. S. 348. oder auch in der Sammlung von Aufgaben aus der Theorie der algebraischen Gleichungen von Meier Hirsch. Erster Theil. Berlin. 1809. S. 142. nachgesehen werden.

Will man nun aber die Methode von Tschirnhaus auf die Auflösung den vierten Grad übersteigender Gleichungen anwenden, so kommt man auf Gleichungen, deren Grad nicht unter dem Grade der aufzulösenden Gleichung liegt, wird also bei diesen höheren Gleichungen von der Methode ganz verlassen. Wir wollen deshalb auch diese Methode hier nicht weiter verfolgen, was überhaupt gleich von vorn herein nicht in unserer Absicht lag, indem wir vielmehr in dieser Abhandlung hauptsächlich die neuerlich von Jerrard gefundene höchst merkwürdige Transformation der Gleichungen im Auge haben, die aber ohne die Methode von Tschirnhaus im Allgemeinen nicht verständlich ist und deren genaue Kenntniss voraussetzt, weshalb auch Serret a. a. O. Note V. die Methode von Jerrard ohne Weiteres als eine Anwendung der Methode von Tschirnhaus bezeichnet; zu dieser Methode von Jerrard wollen wir daher jetzt übergehen.

§. 5.

An die in §. 2. und §. 3. im Allgemeinen entwickelte Methode von Tschirnhaus uns anschliessend, sei nun wieder die gegebene Gleichung:

$$23) \quad . \; . \quad x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}x+A_m=0;$$

es werde

$$24) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad y=\overset{1}{a}_0+\overset{1}{a}_1x+\overset{1}{a}_2x^2+\overset{1}{a}_3x^3+\overset{1}{a}_4x^4$$

gesetzt, und nach der in den beiden genannten Paragraphen gegebenen allgemeinen Anleitung die aus diesen beiden Gleichungen durch Elimination von x hervorgehende Gleichung

$$25) \ldots y^m + P_1 y^{m-1} + P_2 y^{m-2} + \ldots + P_{m-1} y + P_m = 0$$

gebildet; so sind, wie aus der in §. 2. und §. 3. gegebenen Darstellung ganz unzweideutig und ganz ohne Weiteres erhellet, die Coefficienten

$$P_1, \quad P_2, \quad P_3, \ldots, \quad P_{m-1}, \quad P_m$$

sämmtlich homogene ganze rationale algebraische Functionen von

$$\overset{1}{a}_0, \quad \overset{1}{a}_1, \quad \overset{1}{a}_2, \quad \overset{1}{a}_3, \quad \overset{1}{a}_4$$

respective vom

1ten, 2ten, 3ten, ..., $(m-1)$ten, $m$ten

Grade *).

Wenn nun, was wir im Allgemeinen unseren weiteren Betrachtungen vorausschicken müssen, $\overset{0}{V}$ eine beliebige homogene ganze rationale algebraische Function der beliebigen Grössen

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_{n-1}$$

vom zweiten Grade bezeichnet, so kann $\overset{0}{V}$ jederzeit auf die Form:

$$\overset{0}{V} = Pa_0^2 + Qa_0 + R$$

gebracht werden, wo P eine constante Grösse, Q eine homogene ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ und R eine homogene ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ bezeichnet. Bringt man aber den vorstehenden Ausdruck von $\overset{0}{V}$ ferner auf die Form:

$$\overset{0}{V} = (a_0\sqrt{P} + \frac{Q}{2\sqrt{P}})^2 + (R - \frac{Q^2}{4P}),$$

so sind

*) Dass in §. 4. 18) die Coefficienten P, Q, R nicht als homogene ganze rationale algebraische Functionen der Coefficienten in dem für y angenommenen Ausdrucke erscheinen, hat lediglich darin seinen Grund, dass in diesem Ausdrucke der Coefficient von x^2 der Einheit gleich gesetzt worden ist.

$$a_0\sqrt{P}+\frac{Q}{2\sqrt{P}} \text{ und } R-\frac{Q^2}{4P}$$

respective homogene ganze rationale algebraische Functionen vom ersten und zweiten Grade von $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ und $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$; woraus sich also ergiebt, dass immer

$$\overset{0}{V}=V_0{}^2+\overset{1}{V}$$

gesetzt werden kann, wo $\overset{0}{V}$ eine homogene ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$; V_0 eine homogene ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$; $\overset{1}{V}$ eine homogene ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ ist. Ganz auf dieselbe Art kann man nun wieder

$$\overset{1}{V}=V_1{}^2+\overset{2}{V}$$

setzen, wo V_1 eine homogene ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$; $\overset{2}{V}$ eine homogene ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$ ist. Eben so kann man wieder

$$\overset{2}{V}=V_2{}^2+\overset{3}{V}$$

setzen, wo V_2 eine homogene ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$; $\overset{3}{V}$ eine homogene ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von $a_3, \ldots, a_{n-1}$ ist. Geht man auf diese Art weiter, so gelangt man endlich zu der Gleichung:

$$\overset{n-3}{V}=V_{n-3}{}^2+\overset{n-2}{V},$$

wo $\overset{n-3}{V}$ eine homogene ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}$; V_{n-3} eine homogene ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von $a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}$; $\overset{n-2}{V}$ eine homogene ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von a_{n-2}, a_{n-1} ist. Ferner ist:

$$\overset{n-2}{V}=V_{n-2}{}^2+\overset{n-1}{V},$$

wo V_{n-2} eine homogene ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von a_{n-2}, a_{n-1}; $\overset{n-1}{V}$ eine homogene ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von a_{n-1} ist. Weil

man nun offenbar jede homogene ganze rationale algebraische Function des zweiten Grades von einer einzigen veränderlichen Grösse als das Quadrat einer homogenen ganzen rationalen algebraischen Function des ersten Grades von derselben veränderlichen Grösse darstellen kann, so kann man

$$\overset{n-1}{V} = V_{n-1}^2$$

setzen, wo V_{n-1} eine homogene ganze rationale algebraische Function des ersten Grades von a_{n-1} ist. Hiernach hat man also die folgenden Gleichungen:

$$\overset{0}{V} = V_0^2 + \overset{1}{V},$$
$$\overset{1}{V} = V_1^2 + \overset{2}{V},$$
$$\overset{2}{V} = V_2^2 + \overset{3}{V},$$
u. s. w.
$$\overset{n-2}{V} = V_{n-2}^2 + \overset{n-1}{V},$$
$$\overset{n-1}{V} = V_{n-1}^2;$$

durch deren Addition sich die Gleichung:

$$26) \ldots \overset{0}{V} = V_0^2 + V_1^2 + V_2^2 + \ldots + V_{n-2}^2 + V_{n-1}^2$$

und also der folgende Satz ergiebt:

Jede homogene ganze rationale algebraische Function $\overset{0}{V}$ des zweiten Grades der n Grössen

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_{n-2}, \quad a_{n-1}$$

lässt sich immer als eine Summe von Quadraten von n homogonen ganzen rationalen algebraischen Functionen des ersten Grades

$$V_0, \quad V_1, \quad V_2, \quad V_3, \ldots, V_{n-2}, \quad V_{n-1}$$

respective der Grössen

$$a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_{n-2}, \quad a_{n-1};$$
$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \ldots, a_{n-2}, \quad a_{n-1};$$
$$a_2, \quad a_3, \ldots, a_{n-2}, \quad a_{n-1};$$
$$a_3, \ldots, a_{n-2}, \quad a_{n-1};$$
u. s. w.
$$a_{n-2}, \quad a_{n-1};$$
$$a_{n-1}$$

ausdrücken, und zwar auf sehr verschiedene Arten, weil man natürlich die Grössen

$$a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots, a_{n-1}$$

in beliebiger Ordnung oder Folge nehmen kann.

Hiervon lässt sich nun die folgende Anwendung auf das Obige machen. In der Gleichung 25) setze man:

$$27) \ldots\ldots \quad P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0.$$

Weil P_1 eine homogene ganze rationale algebraische Function des ersten Grades oder eine homogene lineare Function von

$$\overset{1}{a}_0,\ \overset{1}{a}_1,\ \overset{1}{a}_2,\ \overset{1}{a}_3,\ \overset{1}{a}_4$$

ist, so kann man mittelst der Gleichung

$$P_1 = 0$$

die Grösse $\overset{1}{a}_4$ als homogene lineare Function der Grössen

$$\overset{1}{a}_0,\ \overset{1}{a}_1,\ \overset{1}{a}_2,\ \overset{1}{a}_3$$

ausdrücken, und diesen Ausdruck für $\overset{1}{a}_4$ in die Gleichungen

$$P_2 = 0, \quad P_3 = 0$$

einführen, wodurch man die Gleichungen:

$$28) \ldots\ldots \quad P_2' = 0, \quad P_3' = 0$$

erhalten mag. Weil P_2 und P_3 beziehungsweise homogene ganze rationale algebraische Functionen des zweiten und dritten Grades von

$$\overset{1}{a}_0,\ \overset{1}{a}_1,\ \overset{1}{a}_2,\ \overset{1}{a}_3,\ \overset{1}{a}_4$$

sind, so sind P_2' und P_3' homogene ganze rationale algebraische Functionen respective des zweiten und dritten Grades von

$$\overset{1}{a}_0,\ \overset{1}{a}_1,\ \overset{1}{a}_2,\ \overset{1}{a}_3.$$

Also kann man nach dem obigen Lemma

$$29) \ldots\ldots \quad P_2' = K^2 + L^2 + M^2 + N^2$$

setzen, wo

$$K,\ L,\ M,\ N$$

homogene ganze rationale algebraische Functionen des ersten Grades respective von

$$\overset{1}{a}_0, \quad \overset{1}{a}_1, \quad \overset{1}{a}_2, \quad \overset{1}{a}_3;$$
$$\overset{1}{a}_1, \quad \overset{1}{a}_2, \quad \overset{1}{a}_3;$$
$$\overset{1}{a}_2, \quad \overset{1}{a}_3;$$
$$\overset{1}{a}_3$$

sind. Die Gleichung

$$P_2' = 0$$

wird nach 29) erfüllt durch die beiden Gleichungen:

30) . . . . . . $K^2 + L^2 = 0, \quad M^2 + N^2 = 0$

oder:

31) . . . . . . $K = L\sqrt{-1}, \quad M = N\sqrt{-1};$

welche linear sind. Also kann man mittelst derselben $\overset{1}{a}_2$, $\overset{1}{a}_3$ durch $\overset{1}{a}_0$, $\overset{1}{a}_1$ in linearer Form ausdrücken; und führt man nun diese Ausdrücke für $\overset{1}{a}_2$, $\overset{1}{a}_3$ in die Gleichung

$$P_3' = 0$$

ein, so erhält man eine Gleichung:

32) . . . . $P_3'' = 0,$

in welcher, weil P_3' eine homogene ganze rationale algebraische Function des dritten Grades von

$$\overset{1}{a}_0, \quad \overset{1}{a}_1, \quad \overset{1}{a}_2, \quad \overset{1}{a}_3$$

ist, P_3'' eine homogene ganze rationale algebraische Function des dritten Grades von $\overset{1}{a}_0$, $\overset{1}{a}_1$ bezeichnet. Nimmt man nun eine dieser beiden Grössen willkührlich an, so wird die andere im Allgemeinen durch eine Gleichung des dritten Grades bestimmt, welche sich auf bekannte Weise auflösen lässt; und die übrigen Grössen $\overset{1}{a}_2$, $\overset{1}{a}_3$, $\overset{1}{a}_4$ sind dann durch das Obige von selbst bestimmt.

Hat man aber auf diese Weise $\overset{1}{a}_0$, $\overset{1}{a}_1$, $\overset{1}{a}_2$, $\overset{1}{a}_3$, $\overset{1}{a}_4$ bestimmt, so nimmt die Gleichung 25) die Form

33) . . . $y^m + P_4 y^{m-4} + \ldots + P_{m-1} y + P_m = 0$

an, also die Form einer Gleichung, in welcher das zweite, dritte und vierte Glied fehlen, und diese Transformation ist bloss durch Auflösung einer Gleichung des dritten Grades bewirkt worden.

Die ganze vorhergehende Darstellung zeigt aber zugleich auf das Deutlichste, dass auch aus jeder Gleichung das zweite, dritte und fünfte Glied bloss mittelst der Auflösung einer Gleichung des vierten Grades weggeschafft werden kann.

Hierin besteht die merkwürdige, von Jerrard gefundene Transformation der Gleichungen, über die übrigens schon Hamilton a. a. O. p. 307. sehr richtig bemerkt hat: „It is, however, important to remark that the coefficients of these new or transformed equations will often be imaginary, even when the coefficients of the original equation *) are real.“

§. 6.

Wenden wir jetzt das Vorhergehende auf die Gleichungen des fünften Grades an, so sehen wir, dass jede Gleichung dieses Grades bloss mittelst der Auflösung einer Gleichung des dritten oder des vierten Grades auf eine der beiden Formen:

$$x^5 + ax + b = 0,$$
$$x^5 + ax^2 + b = 0$$

gebracht werden kann; und setzt man in diesen Gleichungen $x = \frac{1}{u}$, so erhalten sie die Form:

$$u^5 + \frac{a}{b}u^4 + \frac{1}{b} = 0,$$

$$u^5 + \frac{a}{b}u^3 + \frac{1}{b} = 0.$$

Also kann bloss durch Auflösung von Gleichungen des dritten oder vierten Grades jede Gleichung des fünften Grades auf eine der vier folgenden Formen gebracht werden:

$$x^5 + ax + b = 0,$$
$$x^5 + ax^2 + b = 0,$$
$$x^5 + ax^3 + b = 0,$$
$$x^5 + ax^4 + b = 0.$$

Wenn man in der ersten dieser vier Formen

$$x = \left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}} . v$$

setzt, wo ϱ eine unbestimmte Grösse, die man beliebig annehmen kann, bezeichnen soll; so wird die Gleichung:

---

*) Oben 23).

$$\left(\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^5 .v^5 + a\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}} .v + b = 0,$$

also, wenn man diese Gleichung mit

$$\left(\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-5}$$

multiplicirt:

$$v^5 + a\left(\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-4} .v + b\left(\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-5} = 0,$$

und folglich:

$$v^5 + a\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{-1} .v + b\left(\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-5} = 0$$

oder:

$$v^5 + \varrho v + b\left(\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{-5} = 0,$$

woraus man, weil ϱ willkührlich ist, sieht, dass man dem zweiten Gliede der Gleichung jeden beliebigen Coefficienten verschaffen kann.

Setzt man in der vierten der vier obigen Formen

$$x = \frac{a}{\varrho}v,$$

so wird die Gleichung:

$$\left(\frac{a}{\varrho}\right)^5 .v^5 + a\left(\frac{a}{\varrho}\right)^4 .v^4 + b = 0,$$

also, wenn man diese Gleichung mit

$$\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{-5}$$

multiplicirt:

$$v^5 + a\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{-1} .v^4 + b\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{-5} = 0,$$

oder:

$$v^5 + \varrho v^4 + b\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{-5} = 0,$$

woraus sich ergiebt, dass man auch in dieser Form dem zweiten Gliede jeden beliebigen Coefficienten verschaffen kann.

Aehnliche Betrachtungen würden sich mehrere anstellen lassen, was aber hier nicht weiter ausgeführt zu werden braucht.

XV.

Note über Differentialgleichungen der Form

(1) $$xy^{(n)} - my^{(n-1)} = ay,$$

in welchen m und a constante Zahlen sind und n ganz und positiv ist.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor an der Handels-Akademie in Wien.

Ich setze das Integral der linearen Differentialgleichung

(2) $$xz^{(n)} = az$$

als bekannt voraus; es sei $z = \psi(x)$; und man nehme nun an, dass der Gleichung (1) genügt wird durch einen Ausdruck der folgenden Form:

(3) $$y = \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [\psi(ux) W] \right\}_\alpha,$$

woselbst W eine, einstweilen noch unbestimmte Function von u ist, h eine ganze positive Zahl bezeichnet und α diejenige constante Zahl anzeigt, die in

$$\frac{\partial^h}{\partial u^h} [\psi(ux) W]$$

nach vorgenommener $h$maliger Differentiation statt u gesetzt werden muss.

Aus (3) folgt:

$$y^{(n-1)} = \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [\psi^{(n-1)}(ux) u^{n-1} W] \right\}_\alpha, \quad y^{(n)} = \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [\psi^{(n)}(ux) u^n W] \right\}_\alpha;$$

und setzt man diese Werthe in (1), so erhält man:

(4)

$$\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[u^n Wx\psi^{(n)}(ux) - mu^{n-1}W\psi^{(n-1)}(ux) - a W\psi(ux)\right]\right\}_\alpha = 0.$$

Nun ist aber:

$$x\psi^{(n)}(x) = a\psi(x),$$

folglich:

$$ux\psi^{(n)}(ux) = a\psi(ux);$$

und setzt man den hieraus sich ergebenden Werth von $\psi(ux)$ in (4), so erhält man:

(5)

$$\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[u^n Wx\psi^{(n)}(ux) - mu^{n-1}W\psi^{(n-1)}(ux) - u Wx\psi^{(n)}(ux)\right]\right\}_\alpha = 0.$$

Damit aber der eben aufgestellte Ausdruck identisch werde, ist es erforderlich, dass er in folgende Form:

$$\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[(u-\alpha)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - h\varphi\right]\right\}_\alpha = 0 \tag{6}$$

gebracht werden könne; denn führt man die hier vorkommende $h$malige Differentiation bezüglich u wirklich aus, so erhält man:

$$(u-\alpha)\frac{\partial^{h+1}\varphi}{\partial u^{h+1}},$$

was für $u = \alpha$ in der Regel Null wird.

Durch Gleichsetzen der Ausdrücke (5) und (6) kömmt man zu folgender Gleichung:

(7)

$$W\left[x(u^n - u)\psi^{(n)}(ux) - mu^{n-1}\psi^{(n-1)}(ux)\right] = (u-\alpha)\frac{\partial\varphi}{\partial u} - h\varphi,$$

aus welcher nun φ und W zu bestimmen ist.

Ich setze in selber:

$$\varphi = \psi^{(n-1)}(ux).Z, \tag{8}$$

unter Z eine reine Function von u verstanden, und habe dann, da

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \psi^{(n-1)}(ux)\frac{\partial Z}{\partial u} + xZ\psi^{(n)}(ux)$$

ist,

$$(9) \qquad W[x(u^n-u)\psi^{(n)}(ux)-mu^{n-1}\psi^{(n-1)}(ux)]$$

$$=(u-\alpha)\psi^{(n-1)}(ux)\frac{\partial Z}{\partial u}+(u-\alpha)xZ\psi^{(n)}(ux)-hZ\psi^{(n-1)}(ux),$$

welche Gleichung in folgende zwei zerfällt:

$$W(u^n-u)=(u-\alpha)Z,$$

$$-mWu^{n-1}=(u-\alpha)\frac{\partial Z}{\partial u}-hZ.$$

Aus ihnen folgt:

$$(10) \qquad Z=\frac{(u-\alpha)^h}{(u^{n-1}-1)^{\frac{m}{n-1}}}, \quad W=\frac{(u-\alpha)^{h+1}}{u(u^{n-1}-1)^{\frac{m}{n-1}+1}};$$

folglich ist:

$$(11) \qquad y=\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[\frac{(u-\alpha)^{h+1}\psi(ux)}{u(u^{n-1}-1)^{\frac{m}{n-1}+1}}\right]\right\}_\alpha$$

das Integral der vorgelegten Gleichung.

Das so eben gefundene y ist, wenn h eine ganze positive Zahl bezeichnet und α ganz willkührlich ist, stets gleich Null. Bloss in dem einen speciellen Falle, wo $u-\alpha$ ein Factor von $u^{n-1}-1$ ist, ergibt sich für y ein anderer Werth.

Ich setze daher $\alpha=1$ und erhalte hierdurch:

$$(12) \qquad y=\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[\frac{(u-1)^{h+1}\psi(ux)}{u(u^{n-1}-1)^{\frac{m}{n-1}+1}}\right]\right\}_1,$$

was sich vereinfacht, wenn

$$h=\frac{m}{n-1}$$

ist; denn man hat sodann:

$$(13) \qquad y=\left\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\left[\frac{\psi(ux)}{u}\left(\frac{u-1}{u^{n-1}-1}\right)^{h+1}\right]\right\}_1.$$

Sei z. B. $m=n-1$, dann ist die zu integrirende Differentialgleichung

$$(14) \qquad xy^{(n)}=(n-1)y^{(n-1)}+ay,$$

und das Integral derselben ist:

(15) $$y = \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\psi(ux)}{u} \left(\frac{u-1}{u^{n-1}-1} \right)^2 \right] \right\}_1.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so erhält man:

$$y = \left\{ 2 \cdot \frac{u-1}{u^{n-1}-1} \cdot \frac{\psi(ux)}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u-1}{u^{n-1}-1} \right) + \left(\frac{u-1}{u^{n-1}-1} \right)^2 \cdot \frac{ux\psi'(ux) - \psi(ux)}{u^2} \right\}_1.$$

Nun ist für $u = 1$:

$$\frac{u-1}{u^{n-1}-1} = \frac{1}{n-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u-1}{u^{n-1}-1} \right) = -\frac{n-2}{2(n-1)};$$

folglich hat man:

$$y = -\frac{n-2}{(n-1)^2} \psi(x) + \frac{x\psi'(x) - \psi(x)}{(n-1)^2},$$

oder, den constanten Factor $-\frac{1}{(n-1)^2}$ weglassend:

(16) $$y = (n-1)\psi(x) - x\psi'(x)$$

als Integral der Gleichung (14).

Auf ganz ähnliche Weise lässt sich auch das Integral der linearen Differentialgleichung

(1) $$xy^{(n)} - my^{(n-1)} = ay$$

abhängig machen von dem Integral der Gleichung

(17) $$xz^{(n)} - \mu z^{(n-1)} = az.$$

Setzt man nämlich voraus, dass diese Gleichung das Integral

(18) $$z = f(x)$$

habe, so ist das Integral der Gleichung (1) von folgender Form:

(19) $$y = \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [f(ux) W] \right\}_\alpha,$$

und diess führt, in (1) substituirt, zu folgender Gleichung:

(20) $$\left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [xu^n W f^{(n)}(ux) - mu^{n-1} W f^{(n-1)}(ux) - a W f(ux)] \right\}_\alpha = 0.$$

Nun ist aber:

$$xf^{(n)}(x) - \mu f^{(n-1)}(x) = af(x),$$

und folglich:

$$uxf^{(n)}(ux) - \mu f^{(n-1)}(ux) = af(ux).$$

Daher hat man, den aus dieser Gleichung folgenden Werth von $f(ux)$ in (20) einführend:

$$(21)\quad \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [(u^n - u)x\, Wf^{(n)}(ux) - (mu^{n-1} - \mu)\, Wf^{(n-1)}(ux)] \right\}_\alpha = 0.$$

Der hier aufgestellte Ausdruck wird identisch, wenn er in folgende Form gebracht werden kann:

$$\left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [(u - \alpha)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - h\varphi] \right\}_\alpha = 0,$$

und damit diess stattfinde, muss sein:

$$(u^n - u)\, x\, Wf^{(n)}(ux) - (mu^{n-1} - \mu)\, Wf^{(n-1)}(ux) = (u - \alpha)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - h\varphi,$$

aus welcher Gleichung nun W und φ zu bestimmen sind.

Ich setze in derselben:

$$\varphi = f^{(n-1)}(ux)\, Z,$$

und erhalte sodann:

$$(u^n - u)x\, Wf^{(n)}(ux) - (mu^{n-1} - \mu)\, Wf^{(n-1)}(ux) = (u - \alpha) f^{(n-1)}(ux) \frac{\partial Z}{\partial u}$$
$$+ (u - \alpha)\, xZf^{(n)}(ux) - hZf^{(n-1)}(ux),$$

welche Gleichung in folgende zwei zerfällt:

$$W(u^n - u) = (u - \alpha)\, Z,$$

$$(\mu - mu^{n-1})\, W = (u - \alpha)\frac{\partial Z}{\partial u} - hZ.$$

Aus ihnen folgt:

$$Z = \frac{(u^{n-1} - 1)^{\frac{\mu - m}{n-1}} (u - \alpha)^h}{u^\mu},$$

$$W = \frac{(u^{n-1} - 1)^{\frac{\mu - m}{n-1} - 1} (u - \alpha)^{h+1}}{u^{\mu + 1}};$$

daher ist:

$$y = \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} \left[\frac{f(ux)}{u^{\mu+1}} (u^{n-1} - 1)^{\frac{\mu-m}{n-1}-1} (u-\alpha)^{h+1} \right] \right\}_\alpha .$$

Setzt man hierein $\alpha = 1$ und $h = \frac{m-\mu}{n-1}$, so erhält man:

$$y = \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} \left[\frac{f(ux)}{u^{\mu+1}} \left(\frac{u-1}{u^{n-1}-1} \right)^{h+1} \right] \right\}_1 \tag{22}$$

als Integral der vorgelegten Gleichung.

Sei z. B.

$$m = \mu + n - 1,$$

dann ist die zu integrirende Differentialgleichung:

$$xy^{(n)} - (\mu + n - 1) y^{(n-1)} = ay, \tag{23}$$

und das Integral derselben ist:

$$y = \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{f(ux)}{u^{\mu+1}} \left(\frac{u-1}{u^{n-1}-1} \right)^2 \right] \right\}_1 , \tag{24}$$

vorausgesetzt, dass

$$xf^{(n)}(x) - \mu f^{(n-1)}(x) = af(x)$$

ist. Aus (24) folgt:

$$y = (n + \mu - 1) f(x) - xf'(x),$$

oder anders geschrieben:

$$y = mf(x) - xf'(x)$$

als das Integral der vorgelegten Differentialgleichung.

Hat man daher folgendes System linearer Differentialgleichungen.

$$\left\{ \begin{array}{l} xy_1^{(n)} - m_1 y_1^{(n-1)} = ay_1, \\ xy_2^{(n)} - m_2 y_2^{(n-1)} = ay_2, \\ xy_3^{(n)} - m_3 y_3^{(n-1)} = ay_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right. \tag{25}$$

und ist in selben:

$$\begin{aligned} m_2 &= m_1 + n - 1, \\ m_3 &= m_2 + n - 1, \\ m_4 &= m_3 + n - 1, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

so ist:

$$y_2 = m_2 y_1 - x y_1',$$
$$y_3 = m_3 y_2 - x y_2',$$
$$y_4 = m_4 y_3 - x y_3',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Kennt man daher das Integral der ersten Gleichung des Systems (25), so kennt man auch die Integrale aller übrigen Gleichungen.

Dieselbe Methode lässt sich auch bei Gleichungen der Form:

$$x^p y^{(n)} - m x^{p-1} y^{(n-1)} = ay \tag{26}$$

in Anwendung bringen. Sei nämlich $z = F(x)$ das Integral der Gleichung

$$x^p z^{(n)} - \mu x^{p-1} z^{(n-1)} = az, \tag{27}$$

so ist:

$$y = \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [F(ux) W] \right\}_\alpha \tag{28}$$

das Integral der Gleichung (26), vorausgesetzt, dass W eine bestimmte Function von u ist, h und α constante Zahlen sind. Durch Substitution von y in (26) erhält man:

$$\left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [x^p u^n W F^{(n)}(ux) - m x^{p-1} u^{n-1} W F^{(n-1)}(ux) - a W F(ux)] \right\}_\alpha = 0. \tag{29}$$

Nun ist aber:

$$u^p x^p F^{(n)}(ux) - \mu u^{p-1} x^{p-1} F^{(n-1)}(ux) = aF(ux);$$

folglich hat man, den Werth von $F(ux)$, der aus dieser Gleichung folgt, in (29) einführend:

$$\left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} [(u^n - u^p) x W F^{(n)}(ux) + (\mu u^{p-1} - m u^{n-1}) W F^{(n-1)}(ux)] \right\} = 0.$$

Diess wird wieder identisch, wenn es in folgende Form gebracht werden kann:

$$\left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} \left[(u-\alpha)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - h\varphi\right] \right\}_\alpha = 0;$$

es muss also sein:

$$(u^n - u^p) x W F^{(n)}(ux) + (\mu u^{p-1} - m u^{n-1}) W F^{(n-1)}(ux) = (u-\alpha)\frac{\partial \varphi}{\partial u} - h\varphi.$$

Ich setze nun:

$$\varphi = F^{(n-1)}(ux)\, Z,$$

woselbst Z eine reine Function von u bedeutet, und habe sodann:

$$(u^n - u^p)\, x\, W F^{(n)}(ux) + (\mu u^{p-1} - m u^{n-1})\, W F^{(n-1)}(ux)$$

$$= (u-\alpha)\, F^{(n-1)}(ux) \frac{\partial Z}{\partial u} + (u-\alpha)\, x Z F^{(n)}(ux) - h Z F^{(n-1)}(ux),$$

welche Gleichung in folgende zwei zerfällt:

$$W(u^n - u^p) = (u-\alpha)\, Z,$$

$$W(\mu u^{p-1} - m u^{n-1}) = (u-\alpha) \frac{\partial Z}{\partial u} - hZ.$$

Aus diesen folgt:

$$W = \frac{(u-\alpha)^{h+1} (u^{n-p} - 1)^{\frac{\mu - m}{n-p} - 1}}{u^{p+\mu}};$$

daher ist:

$$y = \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} \left[\frac{F(ux)}{u^{p+\mu}} (u-\alpha)^{h+1} (u^{n-p} - 1)^{\frac{\mu - m}{n-p} - 1} \right] \right\}_\alpha,$$

und diess vereinfacht sich für

$$\alpha = 1, \quad h = \frac{m - \mu}{n - p}$$

und geht dadurch über in:

$$y = \left\{ \frac{\partial^h}{\partial u^h} \left[\frac{F(ux)}{u^{p+\mu}} \left(\frac{u-1}{u^{n-p} - 1} \right)^{h+1} \right] \right\}_1, \tag{30}$$

was tadellos ist in allen jenen Fällen, wo h eine ganze positive Zahl ist.

Die Gleichung

$$x^{2n} z^{(n)} = az,$$

welche aus der Gleichung (27) hervorgeht, wenn man in selber

$$\mu = 0, \quad p = 2n$$

setzt, lässt sich leicht integriren. Es lässt sich demnach auch die Gleichung

$$x^{2n} y^{(n)} - m x^{2n-1} y^{(n-1)} = ay \tag{31}$$

mittelst der Formel (30) integriren, wenn nur h, d. i. $-\frac{m}{n}$, eine

ganze positive Zahl ist. Setzen wir in (31) statt $-m$ seinen Werth hn, so hat man die Differentialgleichung:

$$x^{2n}y^{(n)}+hnx^{2n-1}y^{(n-1)}=ay,$$

deren Integral für ganze und positive Werthe von h die Gestalt hat:

$$y=\Big\{\frac{\partial^h}{\partial u^h}\Big[u^{n(h-1)}F(ux)\Big(\frac{u-1}{u^n-1}\Big)^{h+1}\Big]\Big\}_1,$$

vorausgesetzt, dass

$$x^{2n}F^{(n)}(x)=aF(x)$$

ist.

XVI.

Zinsen oder Zinseszinsen?

Von

Herrn Professor Dr. *Wittstein*

in Hannover.

Herr Hofrath Oettinger hat in diesem Archiv, so wie in seiner „Weiteren Ausführung der politischen Arithmetik“ die Unrichtigkeit der einfachen Zinsrechnung und die Richtigkeit der Zinseszinsrechnung bei jeder Vergleichung von Capitalien, welche zu verschiedenen Zeitpunkten fällig sind, so überzeugend nachgewiesen, dass unsers Erachtens diese seit langer Zeit schwebend gewesene Frage damit ihre definitive Erledigung gefunden hat. Wenn nun dessen ungeachtet dieser Beweis in der in Berlin erscheinenden „Deutschen Versicherungs Zeitung“ vom 14. Dec. 1862 von dem Herrn Dr. Zillmer als verfehlt bezeichnet wird, so darf uns dies wohl rechtfertigen, noch einmal auf den Gegenstand zurückzukommen. Denn wir glauben, dass sich der Beweis, unbeschadet des Princips, in einer noch viel einfacheren Form geben lässt, die wir hier nachstehend mittheilen.

1. Wenn Jemand 100 Thaler zu 4 Procent ausleihet, so erachtet er offenbar den Besitz von 100 Thaler baar von gleichem Werthe mit einer jährlich postnumerando fälligen und bis in die Ewigkeit fortlaufenden Rente von 4 Thalern. Wenn man demnach jeden dieser Rentenbeträge auf den gegenwärtigen Augenblick reducirt, so muss die Summe der also erhaltenen Werthe genau 100 Thaler betragen, oder diejenige Reductionsmethode, welche dieses Resultat herbeiführt, wird die richtige sein.

Es sei allgemein a ein Capital, welches zu p Procent ausgeliehen ist, und $1+\frac{p}{100}=\delta$. Dann ist die jährliche Rente:

$$r = a(\delta - 1). \qquad (1)$$

Aber nach dem Princip der Zinseszinsen hat

r nach 1 Jahr gegenwärtig den Werth $\frac{r}{\delta}$,

r „ 2 Jahren „ „ „ $\frac{r}{\delta^2}$,

r „ 3 „ „ „ „ $\frac{r}{\delta^3}$,

u. s. w.,

und die Summe aller dieser gegenwärtigen Werthe beträgt:

$$\frac{r}{\delta}+\frac{r}{\delta^2}+\frac{r}{\delta^3}+\ldots \text{ in inf.} = \frac{r}{\delta}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{\delta}} = \frac{r}{\delta-1},$$

welche Summe nach (1) den Werth a annimmt.

Nach dem Princip der einfachen Zinsen würden statt der Divisoren

$$\delta^2, \quad \delta^3, \ldots$$

an die Stelle treten:

$$1+\frac{2p}{100}, \quad 1+\frac{3p}{100}, \ldots,$$

und da diese kleiner sind als jene, so wird hier die Summe aller auf die Gegenwart reducirten Werthe $> a$. Sie wird sogar, wie beiläufig bemerkt werden mag, unendlich gross. Dies widerspricht aber der Natur der Aufgabe, und es folgt mithin, dass die Reduction mit einfachen Zinsen fehlerhaft, diejenige mit Zinseszinsen dagegen die allein richtige ist.

2. Man kann vom Standpunkte der Praxis gegen das vorige Beispiel den Einwand machen, dass darin die Rückzahlung des Capitals ausser Acht gelassen sei. Setzen wir deshalb, um auch diese zu berücksichtigen, es finde nach n Jahren zugleich mit der letzten Zinszahlung die Rückzahlung des Capitals statt. Dann ist nach dem Princip der Zinseszinsen die Summe der gegenwärtigen Werthe der n Rentenbeträge

$$=\frac{r}{\delta}+\frac{r}{\delta^2}+\frac{r}{\delta^3}\cdots+\frac{r}{\delta^n}=\frac{r}{\delta}\cdot\frac{1-\frac{1}{\delta^n}}{1-\frac{1}{\delta}}=a-\frac{a}{\delta^n},$$

und der gegenwärtige Werth des nach n Jahren zurückfallenden Capitals a ist ebenso

$$=\frac{a}{\delta^n},$$

folglich die Totalsumme aus beiden wieder $=a$, wie es sein muss. Dagegen nach dem Princip der einfachen Zinsen würde auch hier eine Summe $> a$ erschienen sein.

3. Die beweisende Kraft dieses Beweises liegt offenbar darin, dass, wenn in einem besonderen Falle, wo man das Resultat der Rechnung aus der Natur dieses Falles schon im Voraus kennt, eine gewisse Methode das richtige Resultat liefert, diese Methode sodann, insoweit sie durch den Fall vollständig bestimmt wird, auch in allen verwandten, obwohl verwickelteren Fällen die richtige sein muss. Es ist dies genau dieselbe Beweisform, durch welche Gauss in der Theoria motus etc. die Methode der kleinsten Quadrate begründet, indem er aus der Gültigkeit für den besonderen Fall des arithmetischen Mittels die allgemeine Gültigkeit ableitet. Wir müssen demnach als bewiesen ansehen, dass in allen Fällen, wo Capitalien aus verschiedenen Zeiten mit einander verglichen werden sollen, die Reducirung auf einerlei Zeitpunkt nur nach dem Princip der Zinseszinsen ausgeführt werden darf.

Nichts desto weniger kann es Fälle geben, wo auch die Anwendung der Zinseszinsen zu fehlerhaften Resultaten führt; aber man kann sicher sein, dass dies niemals an dem Princip der Zinseszinsen liegt, sondern an einer unvorsichtigen Anwendung desselben. Ein Beispiel dieser Art haben wir in der kleinen Schrift erörtert: „Die Berechnung der Ablösung von Bauverpflichtungen, Hannover 1861“, wo wir durch die Auflösung, welche wir von dieser Aufgabe geben, den Gebrauch der Zinseszinsen wieder in das ihm gebührende Recht gesetzt zu haben glauben.

XVII.

Bemerkung zu dem vorstehenden Aufsatze des Herrn Professor Dr. Wittstein.

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

Es kann nur im Interesse der Wissenschaft gelegen und darum sehr erwünscht sein, wenn ein so wichtiger Gegenstand, wie die Lehre von der Rechnung mit einfachen und Zinseszinsen, worüber die Ansichten bisher ziemlich von einander abwichen, von mehreren Seiten besprochen und untersucht wird. Die Wahrheit kann hiedurch nur gewinnen. Der Aufsatz des Herrn Professor Dr. Wittstein ist daher als ein sehr willkommener und dankenswerther Beitrag zur Begründung und Feststellung der Lehrsätze der politischen Arithmetik zu betrachten, zumal er einen sehr klaren und präcisen Beweis für die Richtigkeit der Zinszins-Rechnung enthält. Er steht auf demselben Boden, von welchem ich bei meiner Beweisführung ausging, nämlich dem der unbestrittenen, zum Voraus bekannten Thatsachen, und baut hierauf seine weitere, einen andern Weg betretende mathematische Begründung.

Was den erwähnten, in der „Deutschen Versicherungs-Zeitung" erschienenen Artikel des Herrn Dr. Zillmer betrifft, so ist in derselben Zeitung (15. Februar) von mir eine Erwiderung hierauf erschienen. Ob ich gleich auf Zeitungsartikel nicht zu antworten gewohnt bin, so glaubte ich doch, es der Wichtigkeit der Sache wegen thun zu sollen und glaube es, den Lesern des Archivs, denen meine Arbeit hierüber vorliegt, schuldig zu sein, kurz über den Inhalt dieses ganz unbegründeten Angriffs berichten zu sollen. Die Hauptpunkte sind folgende:

1) Ich habe §. 2. meiner Schrift gezeigt, wie im Laufe der Zeit der genannte Gegenstand sich entwickelte und mit der juri-

dischen Streitfrage über die richtige Berechnung des Interusuriums zusammen behandelt und dadurch in ein seiner Natur fremdes Gebiet übergeführt wurde, dem er entrückt werden müsse, indem hier allein die Mathematik, nicht die Jurisprudenz entscheiden könne. Dieser historischen Thatsache stellt Herr Dr. Zillmer die nicht näher begründete Behauptung gegenüber, dass meine Ansicht „vollständig irrig" sei. Die einfache Erwähnung hiervon überhebt mich einer Widerlegung.

2) Ich habe die Mathematik als die Wissenschaft bezeichnet, durch welche die vorliegende Streitfrage zur Entscheidung gebracht werden müsse. Herr Dr. Zillmer läugnet diess und behauptet, nicht die „Mathematik", sondern die „Volkswirthschaftslehre" habe diess zu thun, und gibt in einem Räsonnement hierüber wesentlich die Gründe wieder, welche Bilfinger schon vor hundert Jahren in einer Abhandlung (2. Aufl. von Polack's Mathesis forensis) gegeben hat, die aber Herr Dr. Zillmer nicht zu kennen scheint. Ein allgemeines Räsonnement ersetzt aber keinen Beweis, wie denn auch die von Bilfinger vorgebrachten Gründe von den Gegnern nicht anerkannt wurden. Uebrigens schliessen sich verschiedene Gründe für dieselbe Sache nicht aus.

3) Nachdem Herr Dr. Zillmer nach seiner Weise den Beweis für die Richtigkeit der Zinszinsrechnung aufgestellt und im Einzelnen noch näher bezeichnet hat, so sollte man mit Recht erwarten, dass er diess auch festhalte und die von mir angegebenen Sätze über die Unrichtigkeit der einfachen Zinsrechnung anerkenne. Diess thut er aber nicht und es findet sich folgende ganz eigenthümliche Behauptung:

4) Dass ich bewiesen habe, „die einfache Zinsrechnung gehe von falschen Voraussetzungen aus." Leider aber könne Herr Dr. Zillmer diess doch nicht sagen und setzt bei, dass ich „falsch gerechnet" habe. — Was soll man zu solch sich widersprechenden Behauptungen sagen? Habe ich „bewiesen", dass die einfache Zinsrechnung falsch ist, so habe ich nicht falsch gerechnet. Habe ich falsch gerechnet, so habe ich nicht bewiesen. Der Nachweis des Falschrechnens ist aber nicht gegeben.

5) Um nun den Vorwurf des Falschrechnens etwas plausibel zu machen, greift Herr Dr. Zillmer den in §. 13. behandelten Fall heraus, worin gezeigt ist, zu welchen Ungereimtheiten die Rechnung mit einfachen Zinsen führt, und kommt im Laufe seiner Erörterungen zu der Behauptung, dass ich auch durch die einfache Zinsrechnung zu einem andern, nämlich dem richtigen Re-

sultate hätte kommen müssen. Wie Herr Dr. Zillmer eine solche Behauptung aufstellen kann, nachdem zugestanden ist, dass die Rechnung mit einfachen Zinsen auf falschen Voraussetzungen beruht, ist mir in der That nicht recht begreiflich.

6) Vergleicht man folgende Worte des Herrn Dr. Zillmer, die sich am Schlusse seiner Begründung für die Richtigkeit der Zinszinsrechnung finden: — „Zugleich ergibt sich hieraus, wie man zu rechnen hat, wenn es sich um einen Zeitraum handelt, der kleiner als jener bestimmte Zeitraum, für welchen die Vermehrung festgesetzt ist. Die gewöhnliche Rechnung mit einfachen Zinsen für solchen Zeitraum ergiebt sich als falsch, wenn sie auch annäherungsweise richtige Resultate liefert" — mit seinen sonstigen, zum Theil oben angeführten Aeusserungen, so lassen sie sich um so schwerer in einen klaren Zusammenhang unter einander bringen, da sie mit den von mir aufgestellten Sätzen vollständig übereinstimmen, während er letztere als „vollständig irrig", als „falsch gerechnet" und „princip-verletzend" bekämpft. Bei etwas ruhigerer Prüfung wären wohl alle diese unbegründeten Vorwürfe unterblieben.

7) Da mir gelegentlich auch der Vorwurf der Princip-Verletzung von Herrn Dr. Zillmer gemacht wurde, so muss ich zur Abwehr dieses vollständig unbegründeten Vorwurfs bemerken, dass Herr Dr. Zillmer es ist, welcher sich am bezüglichen Orte seiner Schrift „Die mathematischen Rechnungen bei Lebensversicherungen" dieses Vorwurfs schuldig gemacht hat. Er hat dort mit einfachen Zinsen statt mit Zinseszinsen, also falsch gerechnet, und dadurch das von mir und ihm selbst vertheidigte Princip der Zinszinsrechnung verletzt.

Ich glaube, es wird an dem Gesagten, das noch vermehrt werden könnte, genügen, um den völlig unbegründeten und inhaltslosen Angriff des Herrn Dr. Zillmer zu würdigen und als solchen zu kennzeichnen.

8) Endlich glaube ich noch, der Sache, nicht meiner Person wegen, auf einen Aufsatz aufmerksam machen zu dürfen, der sich im 20sten Bande der „Nouvelles Annales de mathématiques p. Terquem et Gerono" p. 441 u. ff. findet und den Titel führt: „Intérèt simple et intérèt composé d'après M. Oettinger." Dort ist mit vieler Anerkennung auf meine Arbeit über diesen Gegenstand hingewiesen, die Beweisführung kurz und sehr präcis wieder gegeben und die Richtigkeit des zu Grunde gelegten Princips mit den Worten „C'est donc là le vrai critérium" anerkannt.

XVIII.

Die allgemeine Cardanische Formel.

Von
dem Herausgeber.

Es ist mir schon früher öfters aufgefallen, dass die Cardanische Formel, so viel mir bekannt ist, immer nur unter der Voraussetzung entwickelt wird, dass aus der gegebenen Gleichung des dritten Grades das zweite Glied weggeschafft ist; jedoch bin ich nur erst ganz vor Kurzem zufällig auf eine Entwickelung gekommen, welche jene Voraussetzung nicht in Anspruch nimmt. Diese Entwickelung will ich im Folgenden mit einigen Worten mittheilen.

Die aufzulösende Gleichung des dritten Grades sei:

$$1) \quad x^3 - 3ax^2 + 3bx - c = 0.$$

Nun findet, wie man sich mittelst leichter Rechnung auf der Stelle überzeugt, zwischen jeden drei Grössen u, v, w die identische Gleichung:

$$2) \quad \left.\begin{array}{r}(u+v+w)^3 - 3u(u+v+w)^2 + 3(u^2-vw)(u+v+w) \\ -(u^3+v^3+w^3-3uvw)\end{array}\right\} = 0$$

Statt. Vergleicht man diese Gleichung mit der vorhergehenden und bestimmt die Grössen u, v, w mittelst der drei folgenden Gleichungen:

$$3) \quad \left\{\begin{array}{r} u = a, \\ u^2 - vw = b, \\ u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = c; \end{array}\right.$$

so ist offenbar:

4) . . . . $x = u + v + w$

eine Wurzel der aufzulösenden cubischen Gleichung 1).

Die Auflösung der drei Gleichungen 3) unterliegt aber nicht der mindesten Schwierigkeit. Denn aus den beiden ersten Gleichungen folgt auf der Stelle:

$$u = a, \quad vw = a^2 - b;$$

also:

$$uvw = a(a^2 - b), \quad 3uvw = 3a(a^2 - b);$$

und daher vermöge der dritten Gleichung:

$$v^3 + w^3 = c - a^3 + 3a(a^2 - b)$$

oder:

$$v^3 + w^3 = 2a^3 - 3ab + c.$$

Folglich hat man jetzt die drei Gleichungen:

5) . . $u = a, \quad vw = a^2 - b, \quad v^3 + w^3 = 2a^3 - 3ab + c.$

Aus den beiden letzten dieser drei Gleichungen ergiebt sich aber:

$$v^3 w^3 = (a^2 - b)^3, \quad v^3 + w^3 = 2a^3 - 3ab + c;$$

also:

$$(v^3 - w^3)^2 = (v^3 + w^3)^2 - 4v^3w^3 = (2a^3 - 3ab + c)^2 - 4(a^2 - b)^3,$$

oder:

$$(v^3 - w^3)^2 = 4b^3 + c^2 - a(3ab^2 - 4a^2c + 6bc);$$

folglich:

$$v^3 - w^3 = \pm\sqrt{4b^3 + c^2 - a(3ab^2 - 4a^2c + 6bc)}.$$

Daher hat man jetzt die beiden Gleichungen:

$$v^3 + w^3 = 2a^3 - 3ab + c,$$

$$v^3 - w^3 = \pm\sqrt{4b^3 + c^2 - a(3ab^2 - 4a^2c + 6bc)};$$

aus denen sich mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander ergiebt:

6)

$$2v^3 = 2a^3 - 3ab + c \pm \sqrt{4b^3 + c^2 - a(3ab^2 - 4a^2c + 6bc)},$$

$$2w^3 = 2a^3 - 3ab + c \mp \sqrt{4b^3 + c^2 - a(3ab^2 - 4a^2c + 6bc)}.$$

Setzen wir nun:

$$7)\quad v=\sqrt[3]{\frac{2a^3-3ab+c\pm\sqrt{4b^3+c^2-a(3ab^2-4a^2c+6bc)}}{2}},$$

so ist, wegen der aus 4) bekannten Gleichung

$$vw=a^2-b$$

zu setzen:

$$8)\quad w=\frac{a^2-b}{\sqrt[3]{\frac{2a^3-3ab+c\pm\sqrt{4b^3+c^2-a(3ab^2-4a^2c+6bc)}}{2}}},$$

wo natürlich die Cubikwurzeln in den Ausdrücken von v und w gleichwerthig sind.

Nach 4), 5), 7), 8) hat man nun für die Wurzel x der allgemeinen cubischen Gleichung

$$x^3-3ax^2+3bx-c=0$$

den folgenden merkwürdigen Ausdruck:

$$9)\quad x=a+\sqrt[3]{\frac{2a^3-3ab+c\pm\sqrt{4b^3+c^2-a(3ab^2-4a^2c+6bc)}}{2}} + \frac{a^2-b}{\sqrt[3]{\frac{2a^3-3ab+c\pm\sqrt{4b^3+c^2-a(3ab^2-4a^2c+6bc)}}{2}}},$$

oder, wenn wir wie vorher:

$$10)\quad v=\sqrt[3]{\frac{2a^3-3ab+c\pm\sqrt{4b^3+c^2-a(3ab^2-4a^2c+6bc)}}{2}} =\sqrt[3]{\frac{2a^3-3ab+c\pm\sqrt{(2a^3-3ab+c)^2-4(a^2-b)^3}}{2}}$$

setzen:

$$11)\ \ldots\ldots\ldots\quad x=a+v+\frac{a^2-b}{v},$$

oder:

$$12)\ \ldots\ldots\ldots\quad x=a+\frac{a^2-b+v^2}{v},$$

oder auch:

$$13) \ldots\ldots \quad x=\frac{(a+v)^2-(b+av)}{v}.$$

Diese Bemerkungen über den vorliegenden Gegenstand mögen für jetzt genügen; ich behalte mir aber vor, späterhin auf denselben zurückzukommen.

Bemerken will ich jedoch noch, dass die Gleichungen des zweiten Grades eine ganz ähnliche Auflösung zulassen. Die aufzulösende quadratische Gleichung sei nämlich:

$$14) \ldots\ldots \quad x^2-2ax+b=0.$$

Nun hat man die identische Gleichung:

$$15) \ldots\ldots \quad (u+v)^2-2u(u+v)+u^2-v^2=0.$$

Bestimmt man u und v mittelst der Gleichungen:

$$16) \ldots\ldots \quad u=a, \quad u^2-v^2=b;$$

so ist:

$$17) \ldots\ldots \quad x=u+v.$$

Aus den beiden Gleichungen 16) erhält man aber:

$$u=a, \quad v^2=a^2-b, \quad v=\pm\sqrt{a^2-b};$$

also nach 17):

$$18) \ldots\ldots \quad x=a\pm\sqrt{a^2-b}.$$

Es liegt nahe, eine ähnliche Auflösung der Gleichungen des vierten Grades zu suchen, indem man die Wurzel $x=t+u+v+w$ setzt, welche mitzutheilen aber hier der Raum fehlt, was daher erst in einem der nächsten Hefte geschehen wird.

Ich erlaube mir hiebei noch auf die beiden Abhandlungen des Herrn Professor Mossbrugger in Theil XIV. Nr. VIII. S. 113. und Theil XXVIII. Nr. IX. S. 205. zu verweisen, glaube aber, dass die von mir hier und in dem erwähnten später mitzutheilenden Aufsatze gewählte Darstellungsweise diesen Gegenstand besonders zur Aufnahme in die elementare Algebra geeignet macht.

XIX.

Herleitung einiger Formeln zur Berechnung der wahren Distanz zwischen Sonne und Mond.

Von

Herrn Dr. *Ligowski*,

Lehrer an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule und am See-Cadetten-Institut in Berlin.

Es sei d die wahre und d' die scheinbare Distanz zwischen Sonne und Mond,
h „ „ „ h' „ „ Höhe der Sonne,
H „ „ „ H' „ „ Höhe des Mondes,
γ der Winkel zwischen den Scheitelkreisen der Sonne und des Mondes; dann ist bekanntlich:

1) . . . . . $\cos d = \sin H \sin h + \cos H \cos h \cos\gamma$

und

2) . . . . . $\cos d' = \sin H' \sin h' + \cos H' \cos h' \cos\gamma$.

Setzt man $\frac{H'+h'-d'}{2} = S$, so ist:

3) . . . . . $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(H'-S)\sin(h'-S)}{\cos H' \cos h'}}$,

4) . . . . $\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\cos S \cos(S+d')}{\cos H' \cos h'}}$

und

5) . . . . . . $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\sin(H'-S)\sin(h'-S)}{\cos S \cos(S+d')}}$.

Wenn man in No. 1) für $\cos\gamma$ seinen Werth $\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}$ einführt und das erste Glied der rechten Seite mit $\cos^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}=1$ multiplicirt, dann entsteht:

$$\cos d = \sin H\sin h(\cos^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2})+\cos H\cos h(\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2})$$

$$=(\cos H\cos h+\sin H\sin h)\cos^2\frac{\gamma}{2}-(\cos H\cos h-\sin H\sin h)\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$6)\ \ldots\ \cos d=\cos(H-h)\cos^2\frac{\gamma}{2}-\cos(H+h)\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Nun ist:

$$\cos d = 1-2\sin^2\frac{d}{2},$$

$\cos(H-h)=1-2\sin^2\tfrac{1}{2}(H-h)$ und $\cos(H+h)=2\cos^2\tfrac{1}{2}(H+h)-1$.
Setzt man diese Werthe von $\cos d$, $\cos(H-h)$ und $\cos(H+h)$ in No. 6) ein, dann erhält man nach einigen einfachen Reduktionen die bekannte Formel:

$$7)\ \ldots\ \sin^2\frac{d}{2}=\sin^2\tfrac{1}{2}(H-h)\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\tfrac{1}{2}(H+h)\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

$\sin\frac{d}{2}$ ist also die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten $\sin\tfrac{1}{2}(H-h)\cos\frac{\gamma}{2}$ und $\cos\tfrac{1}{2}(H+h)\sin\frac{\gamma}{2}$ sind. Nach No. 7) folgt aus No. 2):

$$8)\ \ldots\ \sin^2\frac{d'}{2}=\sin^2\tfrac{1}{2}(H'-h')\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\tfrac{1}{2}(H'+h')\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Nennt man in dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse $\sin\frac{d}{2}$ ist, den der Kathete $\cos\tfrac{1}{2}(H+h)\sin\frac{\gamma}{2}$ gegenüberliegenden Winkel ψ, dann ist:

$$9)\ \ldots\ \operatorname{tg}\psi=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(H+h)}{\sin\tfrac{1}{2}(H-h)}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

und

$$10)\ \ldots\ \sin\frac{d}{2}=\frac{\cos\tfrac{1}{2}(H+h)}{\sin\psi}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

Mit Hülfe der Formeln 5), 9) und 10) lässt sich nun aus H, H', h, h' und d' die wahre Distanz d berechnen.

Zum Vergleiche mit dem weiter unten Folgenden wenden wir die eben genannten Formeln auf ein von Dr. Schaub in seiner Nautischen Astronomie gegebenes Beispiel an.

Es ist gegeben:

$$H' = 65^0\,41'\,41'' \qquad d' = 74^0\,42'\,3'' \quad \text{und} \quad H = 66^0\;5'\,34''$$
$$h' = 27^0\,32'\,42'' \qquad\qquad\qquad\qquad h = 27^0\,31'\;5''$$

Hieraus erhält man:

$$S = 9^0\,16'\,10'' \qquad \frac{H+h}{2} = 46^0\,48'\,19{,}5''$$
$$H' - S = 56^0\,25'\,31''$$
$$h' - S = 18^0\,16'\,32'' \qquad \frac{H-h}{2} = 19^0\,17'\,14{,}5''$$
$$d' + S = 83^0\,58'\,13''$$

$$\log\sin(H'-S) = 9{,}9207312 - 10 \qquad \log\cos S = 9{,}9942915 - 10$$
$$\log\sin(h'-S) = 9{,}4963586 - 10 \qquad \log\cos(S+d') = 9{,}0213727 - 10$$
$$19{,}4170898 - 20 \qquad 19{,}0156642 - 20$$
$$19{,}0156642 - 20$$
$$0{,}4014256$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 0{,}2007128$$

$$\frac{\gamma}{2} = 57^0\,47'\,32{,}1'' \qquad \log\sin\frac{\gamma}{2} = 9{,}9274325 - 10$$

$$\log\cos\tfrac{1}{2}(H+h) = 9{,}8353596 - 10$$
$$\log\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = 0{,}2007128 - 1$$
$$0{,}0360724$$
$$\log\sin\tfrac{1}{2}(H-h) = 9{,}5189167 - 10$$
$$\log\operatorname{tg}\psi = 0{,}5171557$$
$$\psi = 73^0\,5'\,30{,}5'' \qquad \log\sin\psi = 9{,}9808084 - 10$$

$$\log\cos\tfrac{1}{2}(H+h) = 9{,}8353596 - 10$$
$$\log\sin\frac{\gamma}{2} = 9{,}9274325 - 10$$
$$19{,}7627921 - 20$$
$$\log\sin\psi = 9{,}9808084 - 10$$
$$\log\sin\frac{d}{2} = 9{,}7819837 - 10$$

$$\frac{d}{2} = 37^0\,15'\,6{,}3'',$$
$$d = 74^0\,30'\,12{,}6''.$$

Um die Distanz d mit der eben gefundenen Genauigkeit durch Benutzung fünfstelliger, oder sogar nur vierstelliger Logarithmen zu erhalten, setzen wir:

$$H+h=H'+h'+a,$$

also:

$$a=H+h-H'-h'=(H-H')-(h'-h)$$

und

$$h-H=H'-h'+b,$$

also:

$$b=H-h-H'+h'=(H-H')+(h'-h).$$

Es ist daher a die Differenz und b die Summe der mit positivem Zeichen genommenen Correctionen der scheinbaren Mond- und Sonnenhöhen.

Nach No. 7) und No. 8) hat man nun:

$$\sin^2\frac{d}{2}=\cos^2\frac{H'+h'+a}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{H'-h'+b}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\sin^2\frac{d'}{2}=\cos^2\frac{H'+h'}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{H'-h'}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$\sin^2\frac{d}{2}-\sin^2\frac{d'}{2}=\left(\cos^2\frac{H'+h'+a}{2}-\cos^2\frac{H'+h'}{2}\right)\sin^2\frac{\gamma}{2}$$
$$+\left(\sin^2\frac{H'-h'+b}{2}-\sin^2\frac{H'-h'}{2}\right)\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Da nun

$$\sin^2x-\sin^2y=-(\cos^2x-\cos^2y)=\sin(x+y)\sin(x-y)$$

ist, so entsteht:

$$\sin\frac{d+d'}{2}\sin\frac{d-d'}{2}=-\sin\frac{a}{2}\sin\left(H'+h'+\frac{a}{2}\right)\sin^2\frac{\gamma}{2}$$
$$+\sin\frac{b}{2}\sin\left(H'-h'+\frac{b}{2}\right)\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

$\frac{d-d'}{2}$, $\frac{a}{2}$ und $\frac{b}{2}$ sind sehr kleine Winkel, weshalb man für ihre Sinus der Reihe nach setzen kann:

$$\frac{d-d'}{2}\sin 1'',\quad \frac{a}{2}\sin 1''\ \text{ und }\ \frac{b}{2}\sin 1'',$$

wenn die Winkel selbst in Sekunden ausgedrückt sind. Die obige Gleichung verwandelt sich nun in die folgende:

$$(d-d')\sin\frac{d+d'}{2} = -a\sin(H'+h'+\frac{a}{2})\sin^2\frac{\gamma}{2}$$
$$+b\sin(H'-h'+\frac{b}{2})\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

oder auch:

$$(d'-d)\sin\frac{d+d'}{2} = a\sin(H'+h'+\frac{a}{2})\sin^2\frac{\gamma}{2}$$
$$-b\sin(H'-h'+\frac{b}{2})\cos^2\frac{\gamma}{2}).$$

Setzt man $d'-d=x$, dann ist $\frac{d+d'}{2}=d'-\frac{x}{2}$, und daher:

11)

$$x\sin(d'-\frac{x}{2}) = a\sin(H'+h'+\frac{a}{2})\sin^2\frac{\gamma}{2} - b\sin(H'-h'+\frac{b}{2})\cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Führt man in No. 11) noch die sich aus No. 3) und No. 4) ergebenden Werthe von $\sin^2\frac{\gamma}{2}$ und $\cos^2\frac{\gamma}{2}$ ein, dann entsteht:

12) . . . . $x=$

$$\frac{a\sin(H'-S)\sin(h'-S)\sin(H'+h'+\frac{a}{2}) - b\cos S\cos(S+d')\sin(H'-h'+\frac{b}{2})}{\cos H'\cos h'\sin(d'-\frac{x}{2})}.$$

Man setze nun:

13) . . . $p=a\sin(H'-S)\sin(h'-S)\sin(H'+h'+\frac{a}{2})$

und

14) . . . . $q=b\cos S\cos(S+d')\sin(H'-h'+\frac{b}{2})$,

dann ist:

15) . . . . . . $x=\frac{p-q}{\cos H'\cos h'\sin(d'-\frac{x}{2})}.$

Da $\frac{x}{2}$ sehr klein ist, so hat man als Näherungswerth:

16) . . . . $x_1=\frac{p-q}{\cos H'\cos h'\sin d'}$

und alsdann genauer:

$$17) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{x_1 \sin d'}{\sin(d' - \frac{x_1}{2})},$$

mithin:

$$18) \quad \ldots \quad \log x = \log x_1 + (\log \sin d' - \log \sin(d' - \frac{x_1}{2})),$$

und endlich:

$$19) \quad \ldots\ldots\ldots \quad d = d' - x.$$

Wir wenden jetzt diese Formeln auf das vorhin berechnete Beispiel an.

Es war gegeben:

$$H' = 65^0 41' 41'' \qquad d' = 74^0 42' 3'' \quad \text{und} \quad H = 66^0 \; 5' 34''$$
$$h' = 27^0 32' 42'' \qquad\qquad\qquad\qquad h = 27^0 31' \; 5''$$

Hieraus ergiebt sich:

$$S = 9^0 16' 10'' \qquad a = 22' 16'' = 1336''$$
$$H' - S = 56^0 25' 31'' \qquad b = 25' 30'' = 1530''$$
$$h' - S = 18^0 16' 32''$$
$$d' + S = 83^0 58' 13''$$
$$H' + h' + \frac{a}{2} = 93^0 25' 31''$$
$$H' + h' + \frac{b}{2} = 38^0 21' 44''$$

$$\log a = 3{,}12581 \qquad \log b = 3{,}18469$$
$$\log \sin(H' - S) = 9{,}92073 - 10 \qquad \log \cos S = 9{,}99429 - 10$$
$$\log \sin(h' - S) = 9{,}49636 - 10 \qquad \log \cos(d' + S) = 9{,}02137 - 10$$
$$\log \sin(H' + h' + \frac{a}{2}) = 9{,}99923 - 10 \qquad \log \sin(H' - h' + \frac{b}{2}) = 9{,}79284 - 10$$
$$\log p = 2{,}54213 \qquad \log q = 1{,}99319$$
$$p = 348{,}44 \qquad q = 98{,}444$$
$$q = 98{,}444$$
$$p - q = 249{,}996$$

$$\log \cos H' = 9{,}61447 - 10$$
$$\log \cos h' = 9{,}94775 - 10$$
$$\log \sin d' = 9{,}98433 - 10$$
$$0{,}54655 - 1$$
$$\log(p - q) = 2{,}39794$$
$$\log x_1 = 2{,}85139$$

$$x_1 = 710{,}2'' = 11' 50{,}2'' \qquad d' - \frac{x_1}{2} = 74^0 36' 8''$$

$$\log \sin d' = 9{,}98433 - 10$$
$$\log \sin (d' - \frac{x_1}{2}) = 9{,}98412$$
$$0{,}00021$$
$$\log x_1 = 2{,}85139$$
$$\log x = 2{,}85160$$
$$x = 710{,}56'' = 11' \, 50{,}56''$$
$$d = d' - x, \text{ also:}$$
$$d = 74^0 \, 30' \, 12{,}44''.$$

Dr. Schaub hat in dem oben genannten Werke d nach den Methoden von Dr. Bremiker und Witchell berechnet und findet nach der Methode des Erstern:

$$d = 74^0 \, 30' \, 14'',$$

und nach der Methode des Andern:

$$d = 74^0 \, 30' \, 13''.$$

In den meisten Fällen wird die Distanz d nach der von mir entwickelten Methode mit vierstelligen Logarithmen berechnet werden können, wodurch die Rechnung bedeutend abgekürzt wird, wie die folgende Berechnung zeigt, welche mit den vierstelligen Logarithmen ausgeführt ist, die in dem Traité élémentaire de Navigation von Caillet auf Seite 194 stehen.

$$\log a = 3{,}1258 \qquad \log b = 3{,}1847$$
$$\log \sin (H' - S) = 9{,}9207 - 10 \qquad \log \cos S = 9{,}9943 - 10$$
$$\log \sin (h' - S) = 9{,}4964 - 10 \qquad \log \cos (d' + S) = 9{,}0214 - 10$$
$$\log \sin (H' + h' + \frac{a}{2}) = 9{,}9992 - 10 \qquad \log (H' - h' + \frac{b}{2}) = 9{,}7928 - 10$$
$$\log p = 2{,}5421 \qquad \log q = 1{,}9932$$
$$p = 348{,}4 \qquad q = 98{,}45$$
$$q = 98{,}45$$
$$p - q = 249{,}95$$

$$\log \cos H' = 9{,}6145 - 10$$
$$\log \cos h' = 9{,}9477 - 10$$
$$\log \sin d' = 9{,}9843 - 10$$
$$0{,}5465 - 1$$
$$\log (p - q) = 2{,}3979$$
$$\log x_1 = 2{,}8514$$
$$x_1 = 710{,}2'' = 11' \, 50{,}2'' \qquad d' - \frac{x_1}{2} = 74^0 \, 36' \, 8''$$

$$\log \sin d' = 9{,}9843 - 10$$
$$\log \sin (d' - \frac{x_1}{2}) = 9{,}9841 - 10$$
$$0{,}0002$$
$$\log x_1 = 2{,}8514$$
$$\log x = 2{,}8516$$

$$x = 710{,}5 = 11'\,50{,}5'' \quad \text{und} \quad d = d' - x = 74^0\,30'\,12{,}5''.$$

Der oben gefundene Werth von d weicht also von dem, nach den Formeln No. 5), 9) und 10) mit siebenstelligen Logarithmen berechneten nur um eine zehntel Secunde ab.

Wenn der in den Formeln 15) und 16) vorkommende Ausdruck $p-q$ negativ wird, dann setze man für x und x_1 auch $-x$ und $-x_1$, es wird alsdann aus No. 17), 18) und 19):

$$20) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{x_1 \sin d'}{\sin(d' + \frac{x_1}{2})},$$

$$21) \ldots \quad \log x = \log x_1 - (\log\sin(d' + \frac{x_1}{2}) - \log\sin d')$$

und

$$22) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad d = d' + x.$$

XX.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von Herrn Dr. O. Böklen in Sulz a. N. in Würtemberg.

1. Bei allen Dreiecken von gleichem Umfange, welche den inneren Berührungskreis gemeinschaftlich haben, ist konstant (r Halbmesser dieses Kreises, $2s$ Umfang):

a) das Produkt der Tangenten der halben Winkel $=\frac{r}{s}$;

b) das Produkt der Cotangenten der halben Winkel $=\frac{s}{r}$;

c) die Summe der Cotangenten der halben Winkel $=\frac{s}{r}$;

d) der Inhalt $=rs$;

e) das Produkt der Halbmesser der drei äusseren Berührungskreise $=rs^2$;

f) das Produkt der Seiten und der Cosinus der halben Winkel $=rs^2$;

g) das Verhältniss des Produkts der Seiten zum Halbmesser des umschriebenen Kreises $=4rs$;

h) das Produkt der drei Höhen und des Halbmessers des umschriebenen Kreises $=2r^2s^2$;

i) das Produkt aus den Ueberschüssen des halben Umfangs über je eine Seite $=r^2s$.

2. Bei allen Dreiecken von gleichem Inhalt, deren Ecken auf Einem Kreise liegen, ist konstant (i Inhalt, R Halbmesser dieses Kreises):

a) das Produkt der Sinus der Winkel $=\frac{i}{2R^2}$;

b) die Summe der Sinus der doppelten Winkel $=\frac{2i}{R^2}$;

c) das Produkt der Seiten $=4Ri$;

d) das Produkt der Höhen $=\frac{2i^2}{R}$;

e) das Produkt der Entfernungen der drei Ecken von den Mittelpunkten der Kreise, welche je eine anliegende Seite berühren (ABC ist das Dreieck und G, H, K sind die Mittelpunkte der Kreise, welche die Seiten BC, AC, AB von aussen berühren):

$$AK.BG.CH=AH.BK.CG=4Ri;$$

f) das Produkt der Entfernungen der drei Ecken von den Mittelpunkten der die Gegenseiten berührenden Kreise und des inneren Berührungskreises (dessen Mittelpunkt J):

$$AJ.BJ.CJ.AG.BH.CK=16R^2i^2;$$

g) das Produkt der Höhen zweier Seiten dividirt durch die dritte Seite $=\frac{i}{R}$;

h) das Produkt einer Höhe und des Sinus des Winkels, durch den sie geht, $=\frac{i}{R}$;

i) das Produkt des Halbmessers des inneren Berührungskreises und der Cosinus der halben Winkel $=\frac{i}{4R}$;

k) der Umfang des durch die Fusspunkte der Höhen gebildeten Dreiecks $=\frac{2i}{R}$.

3. Bei den Dreiecken von gleichem Umfange, deren Ecken auf Einem Kreise liegen, ist konstant (Umfang $=2s$):

a) das Produkt der Cosinus der halben Winkel $=\frac{s}{4R}$;

b) die Summe der Sinus der ganzen Winkel $=\frac{s}{R}$;

c) die durch die Mittelpunkte der äusseren Berührungskreise gebildeten Dreiecke haben alle Eigenschaften der Dreiecke in 2. a) bis i).

4. Betrachtet man die beiden durch die Ecken eines Dreiecks und durch die Fusspunkte der Höhen desselben gehenden Kreise als fest, so gibt es noch unendlich viele Dreiecke, deren Ecken auf dem ersten Kreise und deren Höhen-Fusspunkte auf dem zweiten Kreise liegen. Die Eigenschaften dieser Dreiecke sind zusammengestellt in dem Aufsatze: „Ueber die Dreiecke, welche den ein- und umbeschriebenen Kreis gemein haben" Thl. XXXVIII. S. 145. u), aa) bis nn).

XXI.

Ueber die Normalschnitte des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids mit besonderer Beziehung auf höhere Geodäsie, namentlich auch über neue merkwürdige Ausdrücke der grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser und einen neuen geometrisch merkwürdigen und für Geodäsie wichtigen Satz von diesen Krümmungshalbmessern.

Von

dem Herausgeber.

---

§. 1.

In einer früheren Abhandlung (Archiv. Thl. XXVIII. Nr. I. S. 1.) habe ich die Krümmung der überhaupt von Ebenen gebildeten Schnitte des Ellipsoids, insbesondere auch die Krümmung der Normalschnitte einer ausführlichen Untersuchung unterworfen, und dabei, wie es natürlich ganz in dem Zwecke dieser Abhandlung lag, Alles auf das gewöhnliche rechtwinklige Coordinatensystem bezogen. Hierauf habe ich in der Abhandlung: Archiv. Thl. XXXVI. Nr. VIII. S. 79. gezeigt, was man auf dem allgemeinen dreiaxigen Ellipsoid unter Länge und Breite, reducirter Länge und reducirter Breite zu verstehen hat, und habe die zwischen diesen verschiedenen geographischen Elementen Statt findenden allgemeinen Relationen entwickelt. Mit besonderer Rücksicht auf diese letzteren Entwickelungen werde ich jetzt in der vorliegenden Abhandlung die Normalschnitte des Ellipsoids, namentlich auch deren Krümmung, einer neuen Untersuchung unterziehen, wobei mich insbesondere das Interesse leitet, welches diese Untersuchungen jedenfalls für Geodäsie haben müssen, wenn es namentlich, wie sich immer mehr und mehr herauszustellen scheint, nothwendig werden dürfte, das Erdsphäroid nicht mehr bloss als Rotations-Ellipsoid, sondern vielmehr als ein allgemeines dreiaxiges Ellipsoid zu betrachten. Auch wird in neueren geodätischen Werken nur die Theorie der Normalschnitte des blossen Rotations-Ellipsoids nicht selten in so schwerfälliger und analytisch wenig genügender Weise behandelt, dass ich wohl hoffen

darf, dass die im Folgenden von mir gegebene Theorie der Normalschnitte des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids, von welcher natürlich die Theorie derselben Schnitte auf dem Rotations-Ellipsoid ein sehr einfacher besonderer Fall ist, der Aufmerksamkeit der Mathematiker und Geodäten sich einigermassen empfehlen dürfte, da ja jetzt auch Vorbereitungen zu einer grossen mitteleuropäischen Gradmessung getroffen werden. Vorläufig will ich auch noch darauf aufmerksam machen, dass ich im Folgenden ein von mir gefundenes neues merkwürdiges und interessantes geometrisches Theorem von den Halbmessern der grössten und kleinsten Krümmung auf dem Ellipsoid beweisen werde, dessen Wichtigkeit auch für Geodäsie mir ausser Zweifel zu sein scheint. Noch einige andere, speciell auf Geodäsie Bezug habende Bemerkungen werden sodann den Schluss dieser Abhandlung bilden.

§. 2.

Die Gleichung des zu betrachtenden Ellipsoids sei, wenn die laufenden oder veränderlichen Coordinaten durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden, wie gewöhnlich:

$$1) \ldots\ldots \quad \left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}}{b}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{z}}{c}\right)^2=1,$$

und (xyz) sei ein beliebiger, aber bestimmter Punkt auf diesem Ellipsoid, wo also auch

$$2) \ldots\ldots \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

ist; dann ist bekanntlich die Gleichung der Berührungsebene des Ellipsoids in diesem Punkte oder die Gleichung des Horizonts des Punktes (xyz):

$$3) \ldots \quad \frac{x}{a^2}(\mathfrak{x}-x)+\frac{y}{b^2}(\mathfrak{y}-y)+\frac{z}{c^2}(\mathfrak{z}-z)=0.$$

Von dem Punkte (xyz) aus denken wir uns nun in seinem Horizonte eine beliebige Gerade gezogen und bezeichnen die von derselben mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch α, β, γ, so dass also:

$$4) \ldots\ldots \quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\alpha}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\beta}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\gamma}$$

die Gleichungen dieser Geraden sind, und, weil dieselbe in dem

durch die Gleichung 3) charakterisirten Horizonte des Punktes (xyz) liegt, die Gleichung:

$$5) \ldots \ldots \quad \frac{x}{a^2}\cos\alpha + \frac{y}{b^2}\cos\beta + \frac{z}{c^2}\cos\gamma = 0$$

Statt findet. Diese Gerade wird gewissermassen als eine feste oder unveränderliche, von dem Punkte (xyz) ausgehende Gerade in dessen Horizonte betrachtet.

Nun lassen wir von dem Punkte (xyz) in dessen Horizonte eine zweite Gerade ausgehen, welche mit der vorhergehenden festen Geraden den 180° nicht übersteigenden Winkel Ω einschliesst; die von dieser Geraden mit den positiven Theilen der Axen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien θ, ω, $\overline{\omega}$; so dass also die Gleichungen dieser Geraden:

$$6) \ldots \ldots \ldots \quad \frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta} = \frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega} = \frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}}$$

sind, und die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ der Gleichung.

$$7) \ldots \ldots \quad \frac{x}{a^2}\cos\theta + \frac{y}{b^2}\cos\omega + \frac{z}{c^2}\cos\overline{\omega} = 0$$

entsprechen müssen, weil die in Rede stehende Gerade in dem Horizonte des Punktes (xyz) liegen soll.

Unter diesen Voraussetzungen haben wir nun, wenn wir die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ aus den Coordinaten x, y, z; den Winkeln α, β, γ und dem Winkel Ω zu bestimmen beabsichtigen, zu dieser Bestimmung die Gleichungen:

$$8) \ldots \left\{ \begin{array}{c} \cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\cos\omega + \cos\gamma\cos\overline{\omega} = \cos\Omega, \\ \frac{x}{a^2}\cos\theta + \frac{y}{b^2}\cos\omega + \frac{z}{c^2}\cos\overline{\omega} = 0, \\ \cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2 = 1; \end{array} \right.$$

welche wir also jetzt in Bezug auf $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ als unbekannte Grössen auflösen wollen.

Bei dieser Auflösung bedienen wir uns, wie fast in allen ähnlichen Fällen, bei Weitem am besten und zweckmässigsten des im Archiv. Theil XXXVII. S. 442. von mir entwickelten allgemeinen Verfahrens; und setzen zu dem Ende in den dortigen Formeln in diesem Falle:

$$a_0 = \cos\alpha, \quad b_0 = \cos\beta, \quad c_0 = \cos\gamma; \quad k_0 = \cos\Omega;$$

$$a_1 = \frac{x}{a^2}, \quad b_1 = \frac{y}{b^2}, \quad c_1 = \frac{z}{c^2}; \quad k_1 = 0;$$

also:

$$a_0{}^2 + b_0{}^2 + c_0{}^2 = \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

$$a_1{}^2 + b_1{}^2 + c_1{}^2 = \left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2$$

und nach 5):

$$a_0 a_1 + b_0 b_1 + c_0 c_1 = \frac{x}{a^2}\cos\alpha + \frac{y}{b^2}\cos\beta + \frac{z}{c^2}\cos\gamma = 0;$$

folglich ferner in den a. a. O. gebrauchten Symbolen:

$$\mathfrak{A} = \cos\alpha\cos\Omega,$$

$$\mathfrak{B} = \cos\beta\cos\Omega,$$

$$\mathfrak{C} = \cos\gamma\cos\Omega$$

und:

$$\mathrm{A} = \frac{z}{c^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\gamma,$$

$$\mathrm{B} = \frac{x}{a^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\alpha,$$

$$\mathrm{C} = \frac{y}{b^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\beta;$$

also nach den Formeln 6) a. a. O.:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\Omega + \left(\frac{z}{c^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\gamma\right)G,$$

$$\cos\omega = \cos\beta\cos\Omega + \left(\frac{x}{a^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\alpha\right)G,$$

$$\cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos\Omega + \left(\frac{y}{b^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\beta\right)G.$$

Nun ist offenbar identisch:

$$\left.\begin{array}{l} \left(\frac{z}{c^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\gamma\right)\cos\alpha \\ + \left(\frac{x}{a^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\alpha\right)\cos\beta \\ + \left(\frac{y}{b^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\beta\right)\cos\gamma \end{array}\right\} = 0,$$

und ausserdem nach einer bekannten allgemeinen analytischen Relation:

$$\left(\frac{z}{c^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\gamma\right)^2+\left(\frac{x}{a^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\beta\right)^2$$

$$=\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)^2$$

$$=\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}(\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2)$$

$$-\left(\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma\right)^2$$

$$=\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2;$$

also wegen der dritten der drei aufzulösenden Gleichungen 8) offenbar:

$$\cos\Omega^2+\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}G^2=1$$

oder:

$$\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}G^2=\sin\Omega^2,$$

woraus sich unmittelbar:

$$G=\pm\frac{\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

und daher nach dem Obigen:

$$9)\left\{\begin{aligned}
\cos\theta&=\cos\alpha\cos\Omega\pm\frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\
\cos\omega&=\cos\beta\cos\Omega\pm\frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\
\cos\overline{\omega}&=\cos\gamma\cos\Omega\pm\frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};
\end{aligned}\right.$$

oder:

$$10)\left\{\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos\alpha\cos\Omega \mp \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\
\cos\omega &= \cos\beta\cos\Omega \mp \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\
\cos\varpi &= \cos\gamma\cos\Omega \mp \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}
\end{aligned}\right.$$

ergiebt, wo natürlich überall die oberen und unteren Vorzeichen sich auf einander beziehen.

§. 3.

Das Erscheinen doppelter Vorzeichen in den vorhergehenden Formeln liegt hier ganz in der Natur der Sache, weil ja die zweite der beiden von dem Punkte (xyz) aus in dessen Horizonte gezogenen Geraden mit der ersten dieser beiden Geraden auf zwei verschiedenen Seiten dieser letzteren den 180^0 nicht übersteigenden Winkel Ω einschliessen kann; es kommt nun darauf an, ein Kriterium zu besitzen, mittelst dessen man in jedem Falle sicher entscheiden kann, welches Zeichen man zu nehmen hat, wozu wir auf folgende Art gelangen können.

Die Gleichungen der Normale des Ellipsoids in dem Punkte (xyz) sind bekanntlich:

$$11) \;\ldots\ldots\; \frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{z}{c^2}}.$$

Durch diese Normale und die durch die Winkel α, β, γ bestimmte Gerade, deren Gleichungen nach 4)

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\alpha} = \frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\beta} = \frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\gamma}$$

waren, legen wir eine Ebene, welche durch die Gleichung

$$A(\mathfrak{x}-x) + B(\mathfrak{y}-y) + C(\mathfrak{z}-z) = 0$$

charakterisirt sein möge; so ist:

$$A\frac{x}{a^2}+B\frac{y}{b^2}+C\frac{z}{c^2}=0,$$

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0;$$

und es kann also offenbar:

$$A=\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta,$$

$$B=\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma,$$

$$C=\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha$$

gesetzt werden, so dass also:

$$12) \ldots\ldots \left.\begin{array}{l}\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)(\mathfrak{x}-x)\\ +\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)(\mathfrak{y}-y)\\ +\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)(\mathfrak{z}-z)\end{array}\right\}=0$$

die Gleichung der in Rede stehenden Ebene ist.

Ein beliebiger Punkt in der von dem Punkte (xyz) in dessen Horizonte ausgehenden, durch die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ bestimmten Geraden sei (XYZ), dessen Entfernung von dem Punkte (xyz) wir durch r bezeichnen wollen; so ist in völliger Allgemeinheit:

$$X=x+r\cos\theta,$$
$$Y=y+r\cos\omega,$$
$$Z=z+r\cos\overline{\omega}.$$

Ferner denken wir uns eine von dem Punkte (xyz) ausgehende Gerade, welche mit dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{z}$ parallel und gleich gerichtet ist, und nehmen auch in dieser Geraden, deren 180° nicht übersteigende Bestimmungswinkel 90°, 90°, 0 sind, einen beliebigen Punkt $(X'Y'Z')$ an, dessen Entfernung von dem Punkte (xyz) wir durch r' bezeichnen; so ist in völliger Allgemeinheit:

$$X'=x,$$
$$Y'=y,$$
$$Z'=z+r'.$$

Jenachdem nun die Punkte (XYZ) und $(X'Y'Z')$ auf gleichen

oder ungleichen Seiten der durch die Gleichung 12) charakterisirten Normalebene liegen, haben nach einem bekannten Satze die Grössen:

$$\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)(X-x)+\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)(Y-y)$$
$$+\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)(Z-z),$$

$$\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)(X'-x)+\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)(Y'-y)$$
$$+\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)(Z'-z);$$

also nach dem Vorhergehenden die Grössen:

$$\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\cos\theta+\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\cos\omega$$
$$+\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\cos\overline{\omega},$$

$$\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha$$

gleiche oder ungleiche Vorzeichen. Nun ist aber nach 10):

$$\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\cos\theta+\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\cos\omega$$
$$+\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\cos\overline{\omega}$$

$$=\mp\frac{\left\{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)^2\right\}\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

und die Grösse

$$\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\cos\theta+\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\cos\omega$$
$$+\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\cos\overline{\omega}$$

st also, weil $\sin\Omega$ stets positiv ist, negativ oder positiv, jenachdem in den Formeln 10) die oberen oder unteren Zeichen genommen werden. Liegen also die Punkte (XYZ) und $(X'Y'Z')$ auf derselben Seite der durch die Gleichung 12) charakterisirten Nor-

malebene, so muss man in den Formeln 10) die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha$$

negativ oder positiv ist; liegen dagegen die Punkte (XYZ) und $(X'Y'Z')$ auf entgegengesetzten Seiten der durch die Gleichung 12) charakterisirten Normalebenen, so muss man in den Formeln 10) die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die Grösse

$$\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha$$

positiv oder negativ ist.

Wir wollen nun aber in dem Horizonte des Punktes (xyz) von der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Geraden an die Winkel Ω von 0 bis 360° zählen nach der Seite der durch diese Gerade gelegten Normalebene hin, auf welcher die von dem Punkte (xyz) aus parallel und gleich gerichtet mit dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{z}$ gezogene Gerade liegt. Ist dann $\Omega<180^0$, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\Omega\mp\frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega=\cos\beta\cos\Omega\mp\frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega}=\cos\gamma\cos\Omega\mp\frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};$$

indem man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse

$$\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha$$

negativ oder positiv ist. Wenn dagegen $\Omega>180^0$ ist, so ist nach dem Vorhergehenden offenbar:

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos(360^0-\Omega)\mp\frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin(360^0-\Omega)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega=\cos\beta\cos(360^0-\Omega)\mp\frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin(360^0-\Omega)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\bar{\omega}=\cos\gamma\cos(360^0-\Omega)\mp\frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin(360^0-\Omega)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};$$

also:

$$\cos\theta=\cos\alpha\cos\Omega\pm\frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega=\cos\beta\cos\Omega\pm\frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\bar{\omega}=\cos\gamma\cos\Omega\pm\frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};$$

wenn man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse

$$\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha$$

positiv oder negativ ist. Wenn also nur die Winkel Ω auf die vorher angegebene Weise gezählt werden, so kann man in völliger Allgemeinheit setzen:

$$13)\quad\begin{cases}\cos\theta=\cos\alpha\cos\Omega\pm\dfrac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\[2ex] \cos\omega=\cos\beta\cos\Omega\pm\dfrac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\[2ex] \cos\varpi=\cos\gamma\cos\Omega\pm\dfrac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};\end{cases}$$

indem man die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse $\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha$ positiv oder negativ ist.

Allerdings verliert dieses Kriterium seine Anwendbarkeit, wenn die Grösse $\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha$ verschwindet, wobei aber zu bemerken ist, dass man im Vorhergehenden an die Stelle der Axe der $\mathfrak{z}$ auch jede der beiden anderen Coordinatenaxen setzen kann, wenn man dann, wie sich von selbst versteht, nur die Winkel Ω in entsprechender Weise zählt, woraus sich die beiden folgenden Kriterien ergeben.

Wenn man die Winkel Ω in dem Horizonte des Punktes (xyz) von der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Geraden an von 0 bis 360° zählt nach der Seite der durch diese Gerade gelegten Normalebene hin, auf welcher die von dem Punkte (xyz) aus parallel und gleich gerichtet mit dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{y}$ gezogene Gerade liegt; so ist:

$$13^*)\quad\begin{cases}\cos\theta=\cos\alpha\cos\Omega\pm\dfrac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\[2ex] \cos\omega=\cos\beta\cos\Omega\pm\dfrac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\[2ex] \cos\varpi=\cos\gamma\cos\Omega\pm\dfrac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};\end{cases}$$

indem man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse

$$\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma$$

positiv oder negativ ist.

Wenn man die Winkel Ω in dem Horizonte des Punktes (xyz) von der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Geraden an von 0 bis 360° zählt nach der Seite der durch diese Gerade gelegten Normalebene hin, auf welcher die von dem Punkte (xyz) aus parallel und gleich gerichtet mit dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{x}$ gezogene Gerade liegt; so ist:

$$13^{**})\left\{\begin{aligned}\cos\theta&=\cos\alpha\cos\Omega\pm\frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\ \cos\omega&=\cos\beta\cos\Omega\pm\frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\ \cos\overline{\omega}&=\cos\gamma\cos\Omega\pm\frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}};\end{aligned}\right.$$

indem man in diesen Formeln die oberen oder unteren Zeichen nimmt, jenachdem die Grösse

$$\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta$$

positiv oder negativ ist.

§. 4.

Durch den Punkt (xyz) denken wir uns jetzt die auf der Ebene der xy senkrecht stehende Normalebene gelegt, deren Gleichung

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

sein mag. Da diese Ebene auf der Ebene der xy senkrecht stehen soll, so muss die vorstehende Gleichung für $\mathfrak{x}=x$, $\mathfrak{y}=y$ erfüllt sein, woraus sich $C=0$ ergiebt; also ist die Gleichung unserer Ebene:

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)=0.$$

Weil ferner diese Ebene, als eine Normalebene in dem Punkte (xyz), durch die Normale in diesem Punkte, deren Gleichungen bekanntlich

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{z}{c^2}}$$

sind, gehen muss, so muss $A\frac{x}{a^2}+B\frac{y}{b^2}=0$ sein, und es kann also $A=\frac{y}{b^2}$, $B=-\frac{x}{a^2}$ gesetzt werden. Daher ist

$$14)\quad \ldots\ldots\ldots \frac{y}{b^2}(\mathfrak{x}-x)-\frac{x}{a^2}(\mathfrak{y}-y)=0$$

die Gleichung der auf der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ senkrecht stehenden Normalebene in dem Punkte (xyz).

Soll nun in dieser Normalebene die durch die Winkel α, β, γ bestimmte, durch die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\alpha}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\beta}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\gamma}$$

charakterisirte feste gerade Linie liegen; so hat man zur Bestimmung der Winkel α, β, γ, wobei 5) zu vergleichen, die Gleichungen:

$$\frac{y}{b^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\beta=0,$$

$$\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma=0,$$

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1.$$

Wegen der beiden ersten Gleichungen kann man, wenn G einen gewissen unbestimmten Factor bezeichnet, in bekannter Weise setzen:

$$\cos\alpha=G(-\frac{x}{a^2}\cdot\frac{z}{c^2}-0.\frac{y}{b^2}),$$

$$\cos\beta=G(0.\frac{x}{a^2}-\frac{y}{b^2}\cdot\frac{z}{c^2}),$$

$$\cos\gamma=G\left(\frac{y}{b^2}\cdot\frac{y}{b^2}+\frac{x}{a^2}\cdot\frac{x}{a^2}\right);$$

also:

$$\cos\alpha=-G\frac{xz}{a^2c^2},\quad \cos\beta=-G\frac{yz}{b^2c^2},\quad \cos\gamma=G\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\};$$

woraus sich mittelst der dritten der drei aufzulösenden Gleichungen zur Bestimmung von G die Gleichung:

$$1=G^2\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\},$$

also:

$$G=\pm\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}$$

ergiebt. Folglich ist nach dem Obigen:

15)

$$\cos\alpha=\mp\frac{\frac{x}{a^2}\cdot\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{e^2}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=\mp\frac{\frac{y}{b^2}\cdot\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\pm\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.$$

Bezeichnet nun B die Breite des Punktes (xyz), so ist nach Archiv. Thl. XXXVI. S. 87. Nr. 8), 9), 10), auf welche Abhandlung ich wegen der Begriffe und der hier ganz in gleicher Weise wie dort gebrauchten Bezeichnungen ein für alle Mal verweise:

$$16)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned}\sin B&=\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\ \cos B&=\frac{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\ \operatorname{tang} B&=\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}};\end{aligned}\right.$$

also nach 15):

$$\cos\gamma = \pm \cos B.$$

Nehmen wir nun die von dem Punkte (xyz) ausgehende, in dessen Horizonte und der senkrecht auf der Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ stehenden Normalebene liegende, durch die Winkel α, β, γ bestimmte Gerade, was offenbar verstattet ist, so an, dass, indem das obere und untere Zeichen sich auf die positive und negative Hälfte des Ellipsoids beziehen, $\gamma = \pm B$ ist; so ist $\cos\gamma = \cos B$, folglich nach dem Obigen:

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

und man muss also in den Formeln 15) die oberen Zeichen nehmen, folglich:

17)

$$\cos\alpha = -\frac{\frac{x}{a^2}\cdot\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\beta = -\frac{\frac{y}{b^2}\cdot\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}$$

setzen.

Nach 16) und 17) ist nun ferner:

$$18) \ldots \quad \cos\alpha = -\frac{\frac{x}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}\sin B,$$

$$\cos\beta = -\frac{\frac{y}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}\sin B, \quad \cos\gamma = \cos B;$$

oder, weil

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}=\frac{\operatorname{tang} B}{\frac{z}{c^2}}$$

ist:

$$19)\quad \begin{cases} \cos\alpha=-\dfrac{\frac{x}{a^2}}{\frac{z}{c^2}}\sin B\operatorname{tang} B=-\dfrac{c^2x}{a^2z}\sin B\operatorname{tang} B, \\ \cos\beta=-\dfrac{\frac{y}{b^2}}{\frac{z}{c^2}}\sin B\operatorname{tang} B=-\dfrac{c^2y}{b^2z}\sin B\operatorname{tang} B, \\ \cos\gamma=\cos B. \end{cases}$$

Setzen wir, wo $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$ die bekannten Bezeichnungen der reducirten Länge und reducirten Breite des Punktes (xyz) sind:

$$20)\quad x=a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad y=b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},\quad z=c\sin\mathfrak{B};$$

so ist:

$$21)\ \ldots\quad \begin{cases} \cos\alpha=-\dfrac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}\sin B\operatorname{tang} B, \\ \cos\beta=-\dfrac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\cot\mathfrak{B}\sin B\operatorname{tang} B, \\ \cos\gamma=\cos B. \end{cases}$$

Für das Rotations-Ellipsoid ist:

$$a=b,\quad \mathfrak{L}=L,\quad a\operatorname{tang}\mathfrak{B}=c\operatorname{tang} B,\quad \frac{c}{a}=\frac{c}{b}=\operatorname{tang}\mathfrak{B}\cot B;$$

also:

$$22)\ \ldots\ldots\quad \begin{cases} \cos\alpha=-\cos L\sin B, \\ \cos\beta=-\sin L\sin B, \\ \cos\gamma=\cos B. \end{cases}$$

Leicht findet man mittelst der Formeln 19):

$$23)\ \ldots\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a^2}\cos\beta-\dfrac{y}{b^2}\cos\alpha=0, \\ \dfrac{y}{b^2}\cos\gamma-\dfrac{z}{c^2}\cos\beta=\dfrac{y}{b^2}\sec B, \\ \dfrac{z}{c^2}\cos\alpha-\dfrac{x}{a^2}\cos\gamma=-\dfrac{x}{a^2}\sec B; \end{cases}$$

oder nach 20):

$$24) \ldots \begin{cases} \frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\alpha = 0, \\ \frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta = \frac{\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}\sec B}{b}, \\ \frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma = -\frac{\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}\sec B}{a}. \end{cases}$$

§. 5.

Von der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Geraden an in der Ebene des Horizonts von (xyz) wollen wir jetzt die Winkel Ω in der positiven Hälfte des Ellipsoids in der Richtung von dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{x}$ an nach dem positiven Theile der Axe der $\mathfrak{y}$ hin von 0 bis 360° zählen; in der negativen Hälfte des Ellipsoids sollen dagegen diese Winkel von der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Geraden an in der Ebene des Horizonts von (xyz) nach der entgegengesetzten Richtung hin von 0 bis 360° gezählt werden *). Die in §. 3. durch Ω bezeichneten, von 0 bis 360° gezählten Winkel wollen wir jetzt, jenachdem die Richtung, nach welcher hin sie gezählt werden, auf den positiven Theil der Axe der $\mathfrak{y}$ oder auf den positiven Theil der Axe der $\mathfrak{x}$ bezogen wird, respective durch Ω' und Ω'' bezeichnen.

I. Winkel Ω'.

Wenn x positiv, nach 23) also $\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma$ negativ ist **), so ist nach 13*), indem man in diesem Falle die unteren Zeichen zu nehmen hat:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\Omega' - \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega'}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

---

*) Man hat sich, um bei dieser Bestimmung der Richtung der Zählung der Winkel Ω von 0 bis 360° jede Zweideutigkeit zu vermeiden und derselben völlige Bestimmtheit zu verleihen, die von dem Punkte (xyz) aus in dessen Horizonte gezogene, durch die Winkel α, β, γ bestimmte Gerade, und eben so jede andere in derselben Ebene von (xyz) ausgehende Gerade, auf die Ebene der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$, oder vielmehr auf eine parallel mit derselben durch den Punkt (xyz) gelegte Ebene, projicirt zu denken, wodurch Alles zu völliger Deutlichkeit und Bestimmtheit gebracht werden wird.

**) $\sec B$ ist immer positiv.

$$\cos\omega = \cos\beta\cos\Omega' - \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega'}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos\Omega' - \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega'}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.$$

Offenbar ist in diesem Falle $\Omega' + \Omega = 360^0$, also $\cos\Omega' = \cos\Omega$, $\sin\Omega' = -\sin\Omega$, und folglich:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\Omega + \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega = \cos\beta\cos\Omega + \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos\Omega + \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.$$

Wenn x negativ, nach 23) also $\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma$ positiv ist, so ist nach 13*), indem man in diesem Falle die oberen Zeichen nehmen muss:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\Omega' + \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega'}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega = \cos\beta\cos\Omega' + \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega'}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos\Omega' + \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega'}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.$$

Offenbar ist in diesem Falle $\Omega' = \Omega$, also $\cos\Omega' = \cos\Omega$, $\sin\Omega' = \sin\Omega$, und folglich:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\Omega + \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega = \cos\beta\cos\Omega + \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos\Omega + \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.$$

II. Winkel Ω''.

Wenn y positiv ist, so ist nach 23) auch $\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta$ positiv, und folglich nach 13**), indem man in diesem Falle die oberen Zeichen zu nehmen hat:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\Omega'' + \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega''}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega = \cos\beta\cos\Omega'' + \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega''}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos\Omega'' + \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\sin\alpha\right)\sin\Omega''}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.$$

Offenbar ist in diesem Falle $\Omega'' = \Omega$, $\cos\Omega'' = \cos\Omega$, $\sin\Omega'' = \sin\Omega$; also:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\Omega + \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega = \cos\beta\cos\Omega + \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos\Omega + \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\sin\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.$$

Wenn y negativ ist, so ist nach 23) auch $\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta$ negativ, und folglich nach 13**), indem man in diesem Falle die unteren Zeichen nehmen muss:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\Omega'' - \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega''}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega = \cos\beta\cos\Omega'' - \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega''}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos\Omega'' - \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\sin\alpha\right)\sin\Omega''}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.$$

Offenbar ist in diesem Falle $\Omega'' + \Omega = 360^0$, $\cos\Omega'' = \cos\Omega$. $\sin\Omega'' = -\sin\Omega$; also:

$$\cos\theta = \cos\alpha\cos\Omega + \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\omega = \cos\beta\cos\Omega + \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\overline{\omega} = \cos\gamma\cos\Omega + \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\sin\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},$$

Hiernach haben wir also unter den gemachten Voraussetzungen die folgenden ganz allgemein gültigen Gleichungen:

$$
25)\quad \left\{
\begin{aligned}
\cos\theta &= \cos\alpha\cos\Omega + \frac{\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma - \frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\
\cos\omega &= \cos\beta\cos\Omega + \frac{\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha - \frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}},\\
\cos\overline{\omega} &= \cos\gamma\cos\Omega + \frac{\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta - \frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\sin\Omega}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Den nach den im Obigen gegebenen Bestimmungen genommenen Winkel Ω werden wir im Folgenden das Azimuth der durch die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ bestimmten Geraden nennen.

Nach 16) ist:

$$
26)\quad \left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{c^2}{z}\sin B = c\,\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}},
$$

und mittelst der Formeln 21), 24), 25) erhält man nun für $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\overline{\omega}$ leicht die folgenden merkwürdigen Ausdrücke:

27)

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= -\cot\mathfrak{B}\sin B\left(\frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\tang B\cos\Omega - \frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\sec B\sin\Omega\right),\\
\cos\omega &= -\cot\mathfrak{B}\sin B\left(\frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\sec B\sin\Omega + \frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\tang B\cos\Omega\right),\\
\cos\overline{\omega} &= \quad\cos B\cos\Omega;
\end{aligned}
$$

oder:

28)

$$
\begin{aligned}
\cos\theta &= \quad\cot\mathfrak{B}\tang B\left(\frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\sin\Omega - \frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\sin B\cos\Omega\right),\\
\cos\omega &= -\cot\mathfrak{B}\tang B\left(\frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\sin\Omega + \frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\sin B\cos\Omega\right),\\
\cos\overline{\omega} &= \quad\cos B\cos\Omega.
\end{aligned}
$$

Für das Rotations-Ellipsoid ist:

$$a=b,\quad \mathfrak{L}=L,\quad a\operatorname{tang}\mathfrak{B}=c\operatorname{tang}B,\quad \frac{c}{a}=\frac{c}{b}=\operatorname{tang}\mathfrak{B}\cot B;$$

also nach Vorstehendem:

$$29)\quad \begin{cases} \cos\theta = \quad \sin L\sin\Omega-\cos L\sin B\cos\Omega, \\ \cos\omega=-\cos L\sin\Omega-\sin L\sin B\cos\Omega, \\ \cos\overline{\omega}= \quad \cos B\cos\Omega. \end{cases}$$

§. 6.

Wir wollen jetzt die Gleichung der Normalebene suchen, welche durch die Gerade geht, deren Bestimmungswinkel θ, ω, $\overline{\omega}$ sind. Da diese Ebene, welche durch die Gleichung:

$$30)\ \ldots\ A'(\mathfrak{x}-x)+B'(\mathfrak{y}-y)+C'(\mathfrak{z}-z)=0$$

charakterisirt sein mag, durch die beiden durch die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\cos\theta}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\cos\omega}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\overline{\omega}},$$

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{\frac{x}{a^2}}=\frac{\mathfrak{y}-y}{\frac{y}{b^2}}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\frac{z}{c^2}}$$

charakterisirten Geraden gehen soll; so muss:

$$A'\cos\theta+B'\cos\omega+C'\cos\overline{\omega}=0,$$

$$A'\frac{x}{a^2}+B'\frac{y}{b^2}+C'\frac{z}{c^2}=0$$

sein, woraus sich:

$$A'=\frac{y}{b^2}\cos\overline{\omega}-\frac{z}{c^2}\cos\omega,$$

$$B'=\frac{z}{c^2}\cos\theta-\frac{x}{a^2}\cos\overline{\omega},$$

$$C'=\frac{x}{a^2}\cos\omega-\frac{y}{b^2}\cos\theta$$

ergiebt; und führt man nun in diese Ausdrücke die Formeln 25) ein, so findet man, mit Rücksicht auf die bekannte Relation

$$\frac{x}{a^2}\cos\alpha+\frac{y}{b^2}\cos\beta+\frac{z}{c^2}\cos\gamma=0,$$

die folgenden Ausdrücke:

31)

$$A'=\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)\cos\Omega-\cos\alpha\sin\Omega\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$B'=\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\cos\Omega-\cos\beta\sin\Omega\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2},$$

$$C'=\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\cos\Omega-\cos\gamma\sin\Omega\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}.$$

Hieraus ergiebt sich nach 21), 24), 26) ferner leicht:

32)

$$A'=\quad\cos\mathfrak{B}\left(\frac{\cos\mathfrak{L}\tan B\sin\Omega}{a}+\frac{\sin\mathfrak{L}\sec B\cos\Omega}{b}\right),$$

$$B'=\quad\cos\mathfrak{B}\left(\frac{\sin\mathfrak{L}\tan B\sin\Omega}{b}-\frac{\cos\mathfrak{L}\sec B\cos\Omega}{a}\right),$$

$$C'=-\frac{\sin\mathfrak{B}\cot B\sin\Omega}{c}.$$

Für das Rotations-Ellipsoid ist:

$$33)\quad\left\{\begin{aligned}A'&=\quad\frac{\cos\mathfrak{B}}{a}\cdot\frac{\sin L\cos\Omega+\cos L\sin B\sin\Omega}{\cos B},\\B'&=-\frac{\cos\mathfrak{B}}{a}\cdot\frac{\cos L\cos\Omega-\sin L\sin B\sin\Omega}{\cos B},\\C'&=-\frac{\sin\mathfrak{B}}{c}\cdot\cot B\sin\Omega.\end{aligned}\right.$$

§. 7.

Zunächst wenden wir uns nun zu der Bestimmung des Krümmungskreises des durch die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ bestimmten Normalschnitts in dem Punkte (xyz), indem wir den Halbmesser dieses Kreises durch R und die Coordinaten seines Mittelpunkts durch X, Y, Z bezeichnen.

Nach Archiv. Thl. XXVIII. S. 16. und S. 17. ist:

$$34)\ \ldots\ R=\frac{\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\omega}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\overline{\omega}}{c}\right)^2}$$

und:

$$35)\ldots\quad\left\{\begin{aligned}X&=x-\frac{\frac{x}{a^2}}{\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\omega}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\overline{\omega}}{c}\right)^2},\\Y&=y-\frac{\frac{y}{b^2}}{\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\omega}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\overline{\omega}}{c}\right)^2},\\Z&=z-\frac{\frac{z}{c^2}}{\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\omega}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\overline{\omega}}{c}\right)^2};\end{aligned}\right.$$

an welche Formeln wir also unsere ferneren Betrachtungen anzuschliessen haben.

Weil, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}&\frac{\cos\alpha}{a^2}\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)+\frac{\cos\beta}{b^2}\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)\\&\qquad+\frac{\cos\gamma}{c^2}\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)\\&=-\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{x}{a^2}\cos\beta\cos\gamma-\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{y}{b^2}\cos\gamma\cos\alpha\\&\qquad-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{z}{c^2}\cos\alpha\cos\beta\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2}\left(\frac{y}{b^2}\cos\gamma-\frac{z}{c^2}\cos\beta\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{z}{c^2}\cos\alpha-\frac{x}{a^2}\cos\gamma\right)^2\\&\qquad+\frac{1}{c^2}\left(\frac{x}{a^2}\cos\beta-\frac{y}{b^2}\cos\alpha\right)^2\\&=\frac{1}{b^2c^2}\left\{\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right\}\cos\alpha^2+\frac{1}{c^2a^2}\left\{\left(\frac{z}{c}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2\right\}\cos\beta^2\\&\qquad+\frac{1}{a^2b^2}\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\right\}\cos\gamma^2\\&\quad-\frac{2}{a^2b^2c^2}(xy\cos\alpha\cos\beta+yz\cos\beta\cos\gamma+zx\cos\gamma\cos\alpha)\\&=\frac{\cos\alpha^2}{b^2c^2}+\frac{\cos\beta^2}{c^2a^2}+\frac{\cos\gamma^2}{a^2b^2}-\frac{(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2}{a^2b^2c^2}\\&=\frac{a^2\cos\alpha^2+b^2\cos\beta^2+c^2\cos\gamma^2-(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2}{a^2b^2c^2}\end{aligned}$$

ist; so ist, wenn man der Kürze wegen:

$$36) \ldots N = \left\{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\}\cos\Omega^2$$

$$-\frac{\left\{\begin{array}{l}2\left\{\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)\frac{x}{a^2}\cos\beta\cos\gamma + \left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)\frac{y}{b^2}\cos\gamma\cos\alpha\right.\\ \qquad\qquad\left.+\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\frac{z}{c^2}\cos\alpha\cos\beta\right\}\sin\Omega\cos\Omega\end{array}\right\}}{\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}}$$

$$+\frac{\left\{\left(\frac{\cos\alpha}{bc}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{ca}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{ab}\right)^2-\left(\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{abc}\right)^2\right\}\sin\Omega^2}{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}$$

setzt, nach 25) offenbar:

$$37) \ldots \left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos\omega}{b}\right)^2 + \left(\frac{\cos\overline{\omega}}{c}\right)^2 = N,$$

und folglich nach 34) und 35):

$$38) \ldots R = \frac{\left\{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{N},$$

und:

$$39) \ldots X = x - \frac{\frac{x}{a^2}}{N},\quad Y = y - \frac{\frac{y}{b^2}}{N},\quad Z = z - \frac{\frac{z}{c^2}}{N}.$$

Andere sehr merkwürdige Ausdrücke für diese Grössen ergeben sich aus dem Obigen sehr leicht auf folgende Art. Nach 28) ist:

$$\frac{c}{a}\cos\theta = -\cot\mathfrak{B}\tan B\,.\,\frac{c}{a}\left(\frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\sin B\cos\Omega - \frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\sin\Omega\right),$$

$$\frac{c}{b}\cos\omega = -\cot\mathfrak{B}\tan B\,.\,\frac{c}{b}\left(\frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\sin B\cos\Omega + \frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\sin\Omega\right),$$

$$\frac{c}{c}\cos\overline{\omega} = \quad \cos B\cos\Omega;$$

also, wenn man der Kürze wegen:

$$40) \ldots M = \cos B^2\cos\Omega^2$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\sin B\cos\Omega - \frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\sin\Omega\right)^2\\ +\left(\frac{c}{b}\right)^2\left(\frac{c}{b}\sin\mathfrak{L}\sin B\cos\Omega + \frac{c}{a}\cos\mathfrak{L}\sin\Omega\right)^2\end{array}\right\}\cot\mathfrak{B}^2\tan B^2$$

setzt:

$$41) \ldots \quad c^2\left\{\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\omega}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\overline{\omega}}{c}\right)^2\right\}=M.$$

Weil nun nach 26):

$$\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}=\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B},$$

und nach 34):

$$\frac{1}{R}\sqrt{\left(\frac{x}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z}{c^2}\right)^2}=\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\omega}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\overline{\omega}}{c}\right)^2$$

ist, so ist offenbar:

$$42) \ldots\ldots \quad \frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R}=M.$$

Ferner ist nach 35) und 20), wie man leicht findet:

$$43) \ldots \quad \begin{cases} \frac{X}{c}=\frac{x}{c}-\frac{c}{a}\cdot\frac{\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}}{M}, \\ \frac{Y}{c}=\frac{y}{c}-\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}}{M}, \\ \frac{Z}{c}=\frac{z}{c}-\frac{c}{c}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}}{M}; \end{cases}$$

oder:

$$44) \ldots \quad \begin{cases} \frac{X}{c}=\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\cdot\frac{1}{M}\right)\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\ \frac{Y}{c}=\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\cdot\frac{1}{M}\right)\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\ \frac{Z}{c}=\left(\frac{c}{c}-\frac{c}{c}\cdot\frac{1}{M}\right)\sin\mathfrak{B}; \end{cases}$$

oder nach 42):

$$44^*) \ldots \quad \begin{cases} \frac{X}{c}=\left(\frac{a}{c}-\frac{R}{a}\cdot\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\right)\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\ \frac{Y}{c}=\left(\frac{b}{c}-\frac{R}{b}\cdot\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\right)\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}, \\ \frac{Z}{c}=\left(\frac{c}{c}-\frac{R}{c}\cdot\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\right)\sin\mathfrak{B}\ ^{*}). \end{cases}$$

---

*) Aus diesen Formeln ergiebt sich:

Die Grösse M, von welcher die vorhergehenden Ausdrücke hauptsächlich abhängen, kann man nach 40) offenbar auch auf folgende Art darstellen:

$$X-x=X-a\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}=-\frac{c}{a}R\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\cos\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},$$

$$Y-y=Y-b\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B}=-\frac{c}{b}R\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{B},$$

$$Z-z=Z-c\sin\mathfrak{B}\qquad=-\frac{c}{c}R\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\sin\mathfrak{B};$$

also:

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2$$

$$=c^2R^2\left(\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\right)^2\left(\frac{\cos\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{a^2}+\frac{\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{b^2}+\frac{\sin\mathfrak{B}^2}{c^2}\right).$$

Nach Archiv. Thl. XXXVI. S. 92. Nr. 26) ist:

$$\operatorname{tang} B=\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}}{c\sqrt{\left(\frac{\cos\mathfrak{L}}{a}\right)^2+\left(\frac{\sin\mathfrak{L}}{b}\right)^2}},$$

also:

$$\operatorname{tang} B^2=\frac{\sin\mathfrak{B}^2}{c^2\left(\frac{\cos\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{a^2}+\frac{\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{b^2}\right)},$$

$$1+\operatorname{tang} B^2=\frac{\frac{\cos\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{a^2}+\frac{\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{b^2}+\frac{\sin\mathfrak{B}^2}{c^2}}{\frac{\cos\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{a^2}+\frac{\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{b^2}};$$

folglich:

$$\sin B^2=\frac{1}{c^2}\cdot\frac{\sin\mathfrak{B}^2}{\frac{\cos\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{a^2}+\frac{\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{b^2}+\frac{\sin\mathfrak{B}^2}{c^2}},$$

und daher:

$$c^2\left(\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\right)^2\left(\frac{\cos\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{a^2}+\frac{\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{B}^2}{b^2}+\frac{\sin\mathfrak{B}^2}{c^2}\right)=1;$$

also nach dem Obigen:

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2=R^2,$$

wie es sein muss, was zur Prüfung der Richtigkeit der obigen Formeln dient.

$$45) \quad \ldots \ldots \quad M=\cos B^2\cos\Omega^2$$
$$+\left\{\begin{array}{l}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right]\sin B^2\cos\Omega^2\\ -2\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{L}\sin B\sin\Omega\cos\Omega\\ +\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\Omega^2\end{array}\right\}\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2.$$

§. 8.

Für das Rotations-Ellipsoid ist nach 45):

$$M=\cos B^2\cos\Omega^2+\left(\frac{c}{a}\right)^4(\sin B^2\cos\Omega^2+\sin\Omega^2)\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2$$
$$=\cos B^2\cos\Omega^2+\left(\frac{c}{a}\right)^4(1-\cos B^2\cos\Omega^2)\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2;$$

aber in diesem Falle bekanntlich:

$$\cot\mathfrak{B}\operatorname{tang}B=\frac{a}{c},$$

also:

$$46) \quad \ldots \quad M=\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2\cos\Omega^2.$$

Daher ist nach 42) in diesem Falle:

$$47) \quad \ldots \quad \frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R}=\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2\cos\Omega^2.$$

Weil

$$\cos(\Omega+180^0)=-\cos\Omega,\quad \sin(\Omega+180^0)=-\sin\Omega$$

ist, so sind nach 42) und 45) in den Azimuthen Ω und $\Omega+180^0$ auf jedem Ellipsoid die Krümmungshalbmesser offenbar einander gleich, und nach 44) fallen auch die Mittelpunkte der Krümmungskreise mit einander zusammen, woraus sich ergiebt, dass man bei der Bestimmung der Krümmungskreise die Azimuthe nur von 0 bis 180^0 wachsen zu lassen braucht.

Für $\frac{c}{a}<1$ wird nach 47) auf dem Rotations-Ellipsoid R offenbar ein Minimum und ein Maximum respective für $\Omega=0$ und $\Omega=90^0$; und bezeichnen wir also den kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser respective durch R' und R'', so ist:

48)

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2=1-\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\sin B^2,$$

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=\left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

Für $\frac{c}{a}>1$ wird nach 47), welche Formel man jetzt lieber auf folgende Art:

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R}=\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right\}\cos B^2\cos\Omega^2$$

schreiben mag, auf dem Rotations-Ellipsoid R offenbar ein Minimum und ein Maximum respective für $\Omega=90^0$ und $\Omega=0$; und bezeichnen wir nun wieder den kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser durch R' und R'', so ist:

49)

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=\left(\frac{c}{a}\right)^2,$$

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right\}\cos B^2=1+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right\}\sin B^2.$$

Die Coordinaten der Mittelpunkte der Kreise der kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser kann man nun nach den Formeln des vorhergehenden Paragraphen natürlich auch leicht bestimmen.

Anmerkung.

Für den Fall des Rotations-Ellipsoids, wenn $\frac{c}{a}<1$ ist, wollen wir noch einige bemerkenswerthe Formeln entwickeln, ohne der Kürze wegen uns auf eine ähnliche Betrachtung des Falls, wenn $\frac{c}{a}>1$ ist, weiter einzulassen.

Man setze:

$$1-\left(\frac{c}{a}\right)^2=e^2,\quad \left(\frac{c}{a}\right)^2=1-e^2;$$

so ist:

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R}=1-e^2(1-\cos B^2\cos\Omega^2)$$

$$=1-e^2(\sin B^2+\cos B^2\sin\Omega^2).$$

Nun ist:

$$1-e^2\sin B^2 = 1-(1-\frac{c^2}{a^2})\sin B^2$$

$$= \cos B^2 + \frac{c^2}{a^2}\sin B^2$$

$$= \cos B^2 + \operatorname{tang}\mathfrak{B}^2 \cot B^2 \sin B^2$$

$$= (1+\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2)\cos B^2$$

$$= \frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}$$

$$= \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}$$

$$= \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\operatorname{tang}B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}\cdot\frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}$$

$$= \frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{\cot B^2}{\cot\mathfrak{B}^2}\cdot\frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}$$

$$= \frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{\sin B^2}{\sin\mathfrak{B}^2}$$

$$= \frac{a^2}{c^2}\cdot\frac{\cos B^4 \sin\mathfrak{B}^2}{\cos\mathfrak{B}^4 \sin B^2}.$$

Also ist:

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R} = \frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2} - e^2\cos B^2 \sin\Omega^2$$

$$= \frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2} - (1-\frac{c^2}{a^2})\cos B^2 \sin\Omega^2$$

$$= \frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2} - (1-\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}{\operatorname{tang}B^2})\cos B^2 \sin\Omega^2$$

$$= \frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2} - \frac{\operatorname{tang}B^2-\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}{\operatorname{tang}B^2}.\cos B^2\sin\Omega^2$$

$$= \frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2} - \frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}\cdot\frac{\sin B^2\cos\mathfrak{B}^2-\cos B^2\sin\mathfrak{B}^2}{\sin B^2}\sin\Omega^2$$

$$= \frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}\left\{1-\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin B^2}\sin\Omega^2\right\},$$

folglich:

$$\frac{c}{R} = \frac{\sin B\cos B^2}{\sin\mathfrak{B}\cos\mathfrak{B}^2}\left\{1-\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin B^2}\sin\Omega^2\right\}$$

$$= \frac{\sin 2B\cos B}{\sin 2\mathfrak{B}\cos\mathfrak{B}}\left\{1-\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin B^2}\sin\Omega^2\right\}.$$

Ferner ist:

$$\frac{c}{R'}=\frac{\sin B}{\sin \mathfrak{B}}(1-e^2\sin B^2)=\frac{\sin B\cos B^2}{\sin\mathfrak{B}\cos\mathfrak{B}^2}=\frac{\sin 2B\cos B}{\sin 2\mathfrak{B}\cos\mathfrak{B}},$$

$$\frac{c}{R''}=\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}=\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}{\operatorname{tang}B^2}\cdot\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}=\frac{\sin\mathfrak{B}\cos B^2}{\sin B\cos\mathfrak{B}^2};$$

wo die beiden Formeln:

$$\frac{c}{R'}=\frac{\sin B\cos B^2}{\sin\mathfrak{B}\cos\mathfrak{B}^2},\quad \frac{c}{R''}=\frac{\sin\mathfrak{B}\cos B^2}{\sin B\cos\mathfrak{B}^2};$$

aus denen sich auch

$$\frac{c}{R'}\cdot\frac{c}{R''}=\left(\frac{\cos B}{\cos\mathfrak{B}}\right)^4$$

ergiebt, jedenfalls sehr bemerkenswerth sind.

Nach dem Obigen hat man nun auch die folgende Formel:

$$\frac{c}{R}=\frac{c}{R'}\{1-\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin B^2}\sin\Omega^2\}.$$

Es ist ferner:

$$1-\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin B^2}=1-\frac{\sin B^2\cos\mathfrak{B}^2-\cos B^2\sin\mathfrak{B}^2}{\sin B^2}$$

$$=\frac{(\sin B^2+\cos B^2)\sin\mathfrak{B}^2}{\sin B^2}=\frac{\sin\mathfrak{B}^2}{\sin B^2},$$

also nach dem Obigen:

$$\frac{c}{R}=\frac{\sin B\cos B^2}{\sin\mathfrak{B}\cos\mathfrak{B}^2}\left\{\frac{\sin\mathfrak{B}^2}{\sin B^2}+\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin B^2}\cos\Omega^2\right\}$$

$$=\frac{\sin\mathfrak{B}\cos B^2}{\sin B\cos\mathfrak{B}^2}\{1+\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin\mathfrak{B}^2}\cos\Omega^2\},$$

und folglich:

$$\frac{c}{R}=\frac{c}{R''}\{1+\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin\mathfrak{B}^2}\cos\Omega^2\}.$$

Multiplicirt man die beiden Gleichungen:

$$\frac{c}{R}=\frac{c}{R'}\{1-\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin B^2}\sin\Omega^2\},$$

$$\frac{c}{R}=\frac{c}{R''}\{1+\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin\mathfrak{B}^2}\cos\Omega^2\}$$

respective mit $\cos \Omega^2$, $\sin \Omega^2$, und addirt sie dann zu einander, so erhält man:

$$\frac{c}{R} = \frac{c}{R'} \cos \Omega^2 + \frac{c}{R''} \sin \Omega^2$$

$$-\frac{\sin(B+\mathfrak{B})\sin(B-\mathfrak{B})}{\sin B^2 \sin \mathfrak{B}^2}\left(\frac{c}{R'}\sin \mathfrak{B}^2 - \frac{c}{R''}\sin B^2\right)\sin \Omega^2 \cos \Omega^2;$$

nach dem Obigen ist aber:

$$\frac{c}{R'}\sin \mathfrak{B}^2 = \frac{\sin \mathfrak{B} \sin B \cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2},$$

$$\frac{c}{R''}\sin B^2 = \frac{\sin \mathfrak{B} \sin B \cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2};$$

also:

$$\frac{c}{R'}\sin \mathfrak{B}^2 - \frac{c}{R''}\sin B^2 = 0,$$

und folglich:

$$\frac{c}{R} = \frac{c}{R'}\cos \Omega^2 + \frac{c}{R''}\sin \Omega^2$$

oder:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos \Omega^2}{R'} + \frac{\sin \Omega^2}{R''},$$

wie bekannt.

§. 9.

Wir wollen nun den kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser R' und R'' auch für das allgemeine dreiaxige Ellipsoid bestimmen, wobei wir von der Formel 42), nämlich von der Formel:

$$c\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B} \cdot R^{-1} = M$$

ausgehen müssen, aus welcher sich unmittelbar:

$$c\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B} \cdot \frac{\partial . R^{-1}}{\partial \Omega} = \frac{\partial M}{\partial \Omega}, \quad c\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B} \cdot \frac{\partial^2 . R^{-1}}{\partial \Omega^2} = \frac{\partial^2 M}{\partial \Omega^2}$$

ergiebt.

Nach einigen leichten Reductionen erhält man aus 40) durch Differentiation nach Ω, wenn der Kürze wegen:

50)

$$P=2\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right\}\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{L}\sin B\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2,$$

$$Q=\cos B^2$$

$$+\left\{\left[\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right]\sin B^2-\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2\right\}\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2$$

$$=\cos B^2+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]\cos\mathfrak{L}^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{c}{b}\right)^2\left[\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin B^2-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right]\sin\mathfrak{L}^2\right\}\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2$$

$$=\cos B^2-\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left[\left(\frac{c}{b}\right)^2-\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2\right]\cos\mathfrak{L}^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{c}{b}\right)^2\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin B^2\right]\sin\mathfrak{L}^2\right\}\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial M}{\partial\Omega}=-P\cos2\Omega-Q\sin2\Omega,$$

$$\frac{\partial^2M}{\partial\Omega^2}=2(P\sin2\Omega-Q\cos2\Omega).$$

Nun ist aber:

$$P\cos2\Omega+Q\sin2\Omega=0$$

zu setzen, woraus sich zur Bestimmung von Ω die Formel:

$$51)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \operatorname{tang}2\Omega=-\frac{P}{Q}$$

ergiebt; und da nun

$$\frac{\partial^2M}{\partial\Omega^2}=2\cos2\Omega(P\operatorname{tang}2\Omega-Q)=-2\cos2\Omega\left(\frac{P^2}{Q}+Q\right)$$

$$=2\sin2\Omega(P-Q\cot2\Omega)=\quad 2\sin2\Omega\left(P+\frac{Q^2}{P}\right)$$

ist, so ist:

$$52)\;.\;.\quad \frac{\partial^2M}{\partial\Omega^2}=-2\frac{P^2+Q^2}{Q}\cos2\Omega=2\frac{P^2+Q^2}{P}\sin2\Omega.$$

Den zwischen 0 und 180° liegenden Werth von 2Ω, welcher der Gleichung 51) genügt, wollen wir durch $2\Omega'$ bezeichnen;

dann kann das zwischen 0 und 2.360° liegende 2Ω die vier folgenden Werthe haben:

$$2\Omega', \quad 2\Omega'+1.180^0, \quad 2\Omega'+2.180^0, \quad 2\Omega'+3.180^0;$$

also Ω die vier folgenden Werthe:

$$\Omega', \quad \Omega'+1.90^0, \quad \Omega'+2.90^0, \quad \Omega'+3.90^0.$$

Für $\Omega=\Omega'$, $\Omega=\Omega'+2.90^0$ und eben so für $\Omega=\Omega'+1.90^0$, $\Omega=\Omega'+3.90^0$ sind aber die Krümmungshalbmesser einander gleich, woraus sich ergiebt, dass man bloss $\Omega=\Omega'$ und $\Omega=\Omega'+90^0$, also bloss $2\Omega=2\Omega'$ und $2\Omega=2\Omega'+180^0$ zu setzen braucht.

Für das Rotations-Ellipsoid, welches wir zuerst betrachten wollen, um die aus den hier entwickelten allgemeinen Formeln sich ergebenden Resultate mit den im vorhergehenden Paragraphen auf anderem Wege erhaltenen Resultaten vergleichen zu können, ist nach 50):

$$P=0, \quad Q=\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^4 \cot\mathfrak{B}^2 \tang B^2\}\cos B^2;$$

also:

$$P=0, \quad Q=\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\}\cos B^2.$$

Folglich ist nach 51):

$$\tang 2\Omega=0,$$

und daher $\Omega=0$, $\Omega=90^0$; $2\Omega=0$, $2\Omega=180^0$ zu setzen; respective also $\cos 2\Omega=+1$, $\cos 2\Omega=-1$. Ist nun $\frac{c}{a}<1$, so ist für $\Omega=0$, $\Omega=90^0$ nach 52) der zweite Differentialquotient von M, und folglich auch von R^{-1}, respective negativ und positiv, folglich R^{-1} respective ein Maximum und Minimum, also R respective ein Minimum und Maximum. Ist dagegen $\frac{c}{a}>1$, so ist für $\Omega=0$, $\Omega=90^0$ nach 52) der zweite Differentialquotient von M, und folglich auch von R^{-1}, respective positiv und negativ, folglich R^{-1} respective ein Minimum und Maximum, also R respective ein Maximum und Minimum. Dies stimmt ganz mit den im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Resultaten überein.

Um nun auch das allgemeine dreiaxige Ellipsoid zu betrachten, wollen wir grösserer Bestimmtheit wegen annehmen, dass $a>b$, also $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$ sei. Nach 50) ist:

$$P=\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right\}\sin 2\mathfrak{L}\sin B\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2,$$

und diese Grösse ist folglich unter der so eben gemachten Voraussetzung negativ oder positiv, jenachdem $\sin 2\mathfrak{L}\sin B$ positiv oder negativ ist. Berücksichtigt man dies, so wird man sich mittelst der im Obigen entwickelten allgemeinen Formeln leicht von der Richtigkeit der folgenden Regeln überzeugen:

I. $\sin 2\mathfrak{L}\sin B$ positiv.

1) $\Omega=\Omega'$, R^{-1} ein Maximum, R ein Minimum;
2) $\Omega=\Omega'+90^0$, R^{-1} ein Minimum, R ein Maximum.

II. $\sin 2\mathfrak{L}\sin B$ negativ.

1) $\Omega=\Omega'$, R^{-1} ein Minimum, R ein Maximum;
2) $\Omega=\Omega'+90^0$, R^{-1} ein Maximum, R ein Minimum.

§. 10.

Wir wollen nun auch analytische Ausdrücke für den kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser auf dem allgemeinen dreiaxigen Ellipsoid zu finden suchen.

Die Gleichung 45) kann man offenbar auf die folgende Form bringen:

$$2M=\cos B^2$$

$$+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left(\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right)\sin B^2\right]\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2$$

$$+\left\{\cos B^2-\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right)\sin B^2\right]\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2\right\}\cos 2\Omega$$

$$-2\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{L}\sin B\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2\sin 2\Omega.$$

Bezeichnen wir nun überhaupt zwei Krümmungshalbmesser, deren Azimuthe um 90^0 unterschieden sind, durch R' und R'', und die entsprechenden Werthe von M durch M' und M''; so sind diese letzteren Werthe nach der vorstehenden Gleichung offenbar von der Form:

$$2M' = \cos B^2$$

$$+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left(\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right)\sin B^2\right]\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2$$

$$+\Big\{\cos B^2-\Big[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2$$

$$-\left(\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right)\sin B^2\Big]\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2\Big\}\cos 2\Omega$$

$$-2\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{L}\sin B\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2\sin 2\Omega$$

und:

$$2M'' = \cos B^2$$

$$+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left(\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right)\sin B^2\right]\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2$$

$$-\Big\{\cos B^2-\Big[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2$$

$$-\left(\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right)\sin B^2\Big]\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2\Big\}\cos 2\Omega$$

$$+2\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{L}\sin B\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2\sin 2\Omega;$$

und es ist folglich:

$$M'+M'' = \cos B^2$$

$$+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right]\sin B^2\right\}\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2.$$

Nach 42) ist aber:

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=M',\quad \frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=M'';$$

also:

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\left(\frac{c}{R'}+\frac{c}{R''}\right)=M'+M'',$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$53)\quad\ldots\ldots\ \frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\left(\frac{c}{R'}+\frac{c}{R''}\right)=\cos B^2$$

$$+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right]\sin B^2\right\}\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2.$$

Setzen wir:

$$54) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad S = \cos B^2$$

$$+ \left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left[\left(\frac{c}{a}\right)^4 \cos \mathfrak{L}^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^4 \sin \mathfrak{L}^2\right] \sin B^2\right\} \cot \mathfrak{B}^2 \operatorname{tang} B^2,$$

so ist nach dem obigen Ausdrucke von $2M$ und nach 50) offenbar:

$$2M = S + Q\cos 2\Omega - P\sin 2\Omega$$

oder

$$2M = S + \cos 2\Omega (Q - P\operatorname{tang} 2\Omega).$$

Bezieht sich aber jetzt das Azimuth Ω auf den kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser, so ist nach 51):

$$\operatorname{tang} 2\Omega = -\frac{P}{Q},$$

und folglich:

$$2M = S + \frac{P^2 + Q^2}{Q} \cos 2\Omega.$$

Sind nun R' und R'' ohne Beziehung der kleinste und grösste Krümmungshalbmesser, so haben die entsprechenden M' und M'' offenbar im Allgemeinen die Form:

$$2M' = S + \frac{P^2 + Q^2}{Q} \cos 2\Omega,$$

$$2M'' = S - \frac{P^2 + Q^2}{Q} \cos 2\Omega;$$

woraus sich durch Multiplication:

$$4M'M'' = S^2 - \frac{(P^2 + Q^2)^2}{Q^2} \cos 2\Omega^2$$

ergiebt. Es ist aber bekanntlich:

$$\cos 2\Omega^2 = \frac{1}{1 + \operatorname{tang} 2\Omega^2} = \frac{Q^2}{P^2 + Q^2},$$

also nach vorstehender Gleichung:

$$4M'M'' = S^2 - (P^2 + Q^2);$$

und weil nun nach dem Obigen:

$$\left(\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2 \cdot \frac{c}{R'} \cdot \frac{c}{R''} = M'M''$$

ist, so ist:

$$55) \ldots . \; 4\left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2 \cdot \frac{c}{R'} \cdot \frac{c}{R''} = S^2 - (P^2 + Q^2).$$

Mittelst leichter Rechnung findet man aber aus 50) und 54):

$$\frac{S^2 - (P^2 + Q^2)}{4}$$

$$= \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cot\mathfrak{B}^2 \sin B^2$$

$$-\left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left\{\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2 - \left(\frac{c}{b}\right)^2\right]^2 \sin\mathfrak{L}^2 \cos\mathfrak{L}^2\right.$$

$$\left. - \left[\left(\frac{c}{a}\right)^4 \cos\mathfrak{L}^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^4 \sin\mathfrak{L}^2\right]\right\} \cot\mathfrak{B}^4 \operatorname{tang} B^4 \sin B^2$$

oder, wie man sogleich übersieht:

$$\frac{S^2 - (P^2 + Q^2)}{4}$$

$$= \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \cot\mathfrak{B}^2 \sin B^2$$

$$+ \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos\mathfrak{L}^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 \sin\mathfrak{L}^2\right\}^2 \cot\mathfrak{B}^4 \operatorname{tang} B^4 \sin B^2$$

$$= \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{\operatorname{tang} B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2} \Big\{\cos B^2$$

$$+ \left[\left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos\mathfrak{L}^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 \sin\mathfrak{L}^2\right]^2 \sin B^2 \frac{\operatorname{tang} B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}\Big\},$$

also ist nach 55):

$$56) \ldots . \; \left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2 \cdot \frac{c}{R'} \cdot \frac{c}{R''} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{\operatorname{tang} B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}$$

$$\times \Big\{\cos B^2 + \left[\left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos\mathfrak{L}^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 \sin\mathfrak{L}^2\right]^2 \sin B^2 \frac{\operatorname{tang} B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}\Big\},$$

welche Gleichung natürlich nur für den kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser gilt; man kann dieselbe auch auf folgende Art schreiben:

$$57) \ldots . \; \left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2 \cdot \frac{c}{R'} \cdot \frac{c}{R''} = \left(\frac{c}{a}\right)^2 \left(\frac{c}{b}\right)^2 \Big\{\cos B^2$$

$$+ \left[\left(\frac{c}{a}\right)^2 \cos\mathfrak{L}^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 \sin\mathfrak{L}^2\right]^2 \sin B^2 \cot\mathfrak{B}^2 \operatorname{tang} B^2\Big\} \cot\mathfrak{B}^2 \operatorname{tang} B^2.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

58)

$$U=\cos B^2$$

$$+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right]\sin B^2\right\}\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2,$$

$$V=\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\left\{\cos B^2\right.$$

$$\left.+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2\right]^2\sin B^2\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2\right\}\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2;$$

so haben wir nach 53) und 57) die beiden folgenden Gleichungen:

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\left(\frac{c}{R'}+\frac{c}{R''}\right)=U,\quad\left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2\cdot\frac{c}{R'}\cdot\frac{c}{R''}=V;$$

durch deren Auflösung sich auf bekannte Weise:

$$59)\ldots\left\{\begin{array}{l}2\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\dfrac{c}{R'}=U\pm\sqrt{U^2-4V},\\[2ex]2\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\dfrac{c}{R''}=U\mp\sqrt{U^2-4V}\end{array}\right.$$

ergiebt.

Nach Archiv. Thl. XXXVI. S. 92. 26) ist:

$$\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang}B^2=\frac{\operatorname{tang}B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}=\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2},$$

also nach 58):

$$U=\cos B^2+\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right\}\sin B^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2},$$

$$V=\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\left\{\cos B^2+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2\right]\sin B^2\right\}\frac{\operatorname{tang}B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2};$$

folglich:

$$\frac{V}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\frac{\operatorname{tang}B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}}=\cos B^2+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2\right\}\sin B^2,$$

und daher, wie man leicht findet:

$$U-\frac{V}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\frac{\tan B^2}{\tan \mathfrak{B}^2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right\}^2\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{L}^2\sin B^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2},$$

also:

$$U=\frac{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right\}^2\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{L}^2\sin B^2}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2}$$

$$+\frac{V}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\frac{\tan B^2}{\tan \mathfrak{B}^2}},$$

oder:

$$U=\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]^2\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{L}^2\sin B^2\right\}\frac{\tan B^2}{\tan \mathfrak{B}^2}$$

$$+\frac{V}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\frac{\tan B^2}{\tan \mathfrak{B}^2}}.$$

Nun ist aber nach dem Obigen auch:

$$\frac{V}{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\frac{\tan B^2}{\tan \mathfrak{B}^2}}=\cos B^2+\frac{\tan \mathfrak{B}^2}{\tan B^2}\sin B^2=\frac{\cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2},$$

also:

60)

$$U=\frac{\cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2}+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]^2\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{L}^2\sin B^2\right\}\frac{\tan B^2}{\tan \mathfrak{B}^2}$$

und:

$$61) \quad V=\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2}.$$

Setzen wir der Kürze wegen:

$$62) \quad \alpha=\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2, \quad \beta=\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]^2\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{L}^2\sin B^2;$$

so ist:

$$U=\frac{\cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2}+(\alpha+\beta)\frac{\tang B^2}{\tang \mathfrak{B}^2},\quad V=\alpha\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2};$$

also:

$$U^2-4V=\frac{\cos B^4}{\cos \mathfrak{B}^4}+2(\alpha+\beta)\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2}+(\alpha+\beta)^2\frac{\tang B^4}{\tang \mathfrak{B}^4}-4\alpha\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2}$$
$$=\frac{\cos B^4}{\cos \mathfrak{B}^4}-2(\alpha+\beta)\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2}+(\alpha+\beta)^2\frac{\tang B^4}{\tang \mathfrak{B}^4}+4\beta\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2}$$
$$=\frac{\cos B^4}{\cos \mathfrak{B}^4}-2(\alpha-\beta)\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2}+(\alpha-\beta)^2\frac{\tang B^4}{\tang \mathfrak{B}^4}+4\alpha\beta\frac{\tang B^4}{\tang \mathfrak{B}^4},$$

folglich:

$$63)\quad U^2-4V=\left\{\frac{\cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2}-(\alpha+\beta)\frac{\tang B^2}{\tang \mathfrak{B}^2}\right\}^2+4\beta\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2}$$
$$=\left\{\frac{\cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2}-(\alpha-\beta)\frac{\tang B^2}{\tang \mathfrak{B}^2}\right\}^2+4\alpha\beta\frac{\tang B^4}{\tang \mathfrak{B}^4};$$

woraus erhellet, dass U^2-4V jederzeit eine positive Grösse, und natürlich, weil V eine positive Grösse ist, — eben so wie auch U, — immer kleiner als U^2, also $\sqrt{U^2-4V}$ kleiner als U ist.

Bezeichnen wir jetzt den kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser respective durch R' und R'', so ist nach 59) offenbar:

$$64)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned} 2\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}&=U+\sqrt{U^2-4V},\\ 2\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}&=U-\sqrt{U^2-4V};\end{aligned}\right.$$

wo man nun die Werthe von α, β und U, U^2-4V aus dem Obigen leicht einführen kann.

Man erhält nämlich sogleich die beiden folgenden sehr merkwürdigen Ausdrücke:

65)

$$2\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=\frac{\cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2}+(\alpha+\beta)\frac{\tang B^2}{\tang \mathfrak{B}^2}$$
$$+\sqrt{\left\{\frac{\cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2}-(\alpha+\beta)\frac{\tang B^2}{\tang \mathfrak{B}^2}\right\}^2+4\beta\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2}},$$

$$2\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=\frac{\cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2}+(\alpha+\beta)\frac{\tang B^2}{\tang \mathfrak{B}^2}$$
$$-\sqrt{\left\{\frac{\cos B^2}{\cos \mathfrak{B}^2}-(\alpha+\beta)\frac{\tang B^2}{\tang \mathfrak{B}^2}\right\}^2+4\beta\frac{\sin B^2}{\sin \mathfrak{B}^2}};$$

welche also ganz allgemein und für jedes Ellipsoid gültig sind.

Im Falle des Rotations-Ellipsoids ist

$$\alpha=\left(\frac{c}{a}\right)^4,\quad \beta=0,\quad \frac{\operatorname{tang} B}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}}=\frac{a}{c};$$

also:

$$U=\frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}+\left(\frac{c}{a}\right)^4\cdot\frac{\operatorname{tang} B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}=\frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}+\left(\frac{c}{a}\right)^2,$$

$$U^2-4V=\left\{\frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}-\left(\frac{c}{a}\right)^4\cdot\frac{\operatorname{tang} B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}\right\}^2=\left\{\frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}^2;$$

aber:

$$\cos\mathfrak{B}^2=\frac{1}{1+\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{c}{a}\right)^2\operatorname{tang} B^2}=\frac{\cos B^2}{\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2},$$

folglich:

$$\frac{\cos B^2}{\cos\mathfrak{B}^2}=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2,$$

und daher:

$$U=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2(1+\sin B^2),$$

$$U^2-4V=\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}^2\cos B^4;$$

also nach 64):

$$2\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2(1+\sin B^2)+\sqrt{\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}^2\cos B^4},$$

$$2\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2(1+\sin B^2)-\sqrt{\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}^2\cos B^4}.$$

Wenn nun $\frac{c}{a}<1$ ist, so ist:

$$2\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2(1+\sin B^2)+\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2,$$

$$2\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2(1+\sin B^2)-\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2;$$

also:

$$2\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=2\left\{\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2\right\}=2\left\{1-\left[1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right]\sin B^2\right\},$$

$$2\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=2\left(\frac{c}{a}\right)^2;$$

folglich:

$$\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=1-\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\sin B^2,\quad \frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=\left(\frac{c}{a}\right)^2.$$

Wenn $\frac{c}{a}>1$ ist, so ist:

$$2\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2(1+\sin B^2)+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right\}\cos B^2,$$

$$2\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2(1+\sin B^2)-\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right\}\cos B^2;$$

also:

$$2\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=2\left(\frac{c}{a}\right)^2,$$

$$2\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=2\left\{\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2\right\}=2\left\{1+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right]\sin B^2\right\};$$

folglich:

$$\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=\left(\frac{c}{a}\right)^2,\quad \frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=1+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1\right\}\sin B^2.$$

Diese Resultate stimmen mit den in §. 8. gefundenen Resultaten genau überein.

Für die Kugel ist $a=c$ und demzufolge auch $B=\mathfrak{B}$, also nach dem Obigen:

$$\frac{c}{R'}=1,\quad \frac{c}{R''}=1;$$

wie es sein muss.

§. 11.

Wenn $f(x)$ eine zwischen den Gränzen $x=a$ und $x=b$ oder von $x=a$ bis $x=b$ stetige Function bezeichnet, und man x sich von a bis b stetig verändern lässt; so wird sich $f(x)$ von $f(a)$ bis $f(b)$ stetig verändern oder eine Reihe sich von $f(a)$ bis $f(b)$ stetig verändernder Werthe durchlaufen. Das arithmetische Mittel zwischen allen diesen Werthen der Function $f(x)$ wollen wir das arithmetische Mittel von $f(x)$ zwischen den Gränzen a und b, oder für die Gränzen a und b, nennen, durch

$$\underset{a}{\overset{b}{\mathrm{M}}}\{f(x)\}$$

bezeichnen und nun im Allgemeinen bestimmen.

Denken wir uns zu dem Ende das Intervall $b-a$ in n gleiche Theile getheilt und setzen

$$\frac{b-a}{n}=i;$$

so ist offenbar, indem wir annehmen, dass n in's Unendliche wächst, im Allgemeinen

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{M}}}\{f(x)\}=\mathrm{Lim}\frac{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots.+f(a+ni)}{n+1}$$

zu setzen. Nun ist aber:

$$n=\frac{b-a}{i},\quad n+1=\frac{b-a+i}{i},\quad \frac{1}{n+1}=\frac{i}{b-a+i};$$

also:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{M}}}\{f(x)\}=\mathrm{Lim}\frac{i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots.+f(a+ni)\}}{b-a+i}$$

oder:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{M}}}\{f(x)\}=\frac{\mathrm{Lim}.i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots.+f(a+ni)\}}{\mathrm{Lim}.(b-a+i)},$$

und folglich, weil nach dem Fundamentalsatze der Theorie der bestimmten Integrale bekanntlich:

$$\int_a^b f(x)\partial x=\mathrm{Lim}.i\{f(a)+f(a+i)+f(a+2i)+\ldots.+f(a+ni)\}$$

und offenbar:

$$\mathrm{Lim}.(b-a+i)=b-a$$

ist:

$$66)\ \ldots\ldots\quad \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{M}}}\{f(x)\}=\frac{\int_a^b f(x)\partial x}{b-a}.$$

Diese allgemeine Formel wollen wir in den nächstfolgenden Paragraphen auf die Bestimmung der arithmetischen Mittel der reciproken Krümmungshalbmesser und der Krümmungshalbmesser selbst der Normalschnitte des Rotations-Ellipsoids in dem im Vorhergehenden immer betrachteten Punkte desselben anwenden, indem wir uns denken, dass das Azimuth Ω alle Werthe von $\Omega=0$ bis $\Omega=2\pi$ stetig durchlaufe, wobei wir natürlich alle im Vorhergehenden gebrauchten Bezeichnungen auch jetzt beibehalten.

§. 12.

Zuerst wollen wir für das Rotations-Ellipsoid

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Omega}{R}$$

bestimmen.

Nach 47) ist allgemein:

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R}=\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2\cos\Omega^2,$$

also:

$$c\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Omega}{R}=\left(\frac{c}{a}\right)^2\int_0^{2\pi}\partial\Omega+\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2\int_0^{2\pi}\cos\Omega^2\partial\Omega,$$

wo

$$\int_0^{2\pi}\partial\Omega=2\pi$$

ist. Ferner ist bekanntlich:

$$\int\cos\Omega^2\partial\Omega=\tfrac{1}{2}\sin\Omega\cos\Omega+\tfrac{1}{2}\int\partial\Omega,$$

also offenbar:

$$\int_0^{2\pi}\cos\Omega^2\partial\Omega=\tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\partial\Omega=\pi;$$

und daher nach dem Vorhergehenden:

$$c\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Omega}{R}=2\pi\left(\frac{c}{a}\right)^2+\pi\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2,$$

folglich:

$$67)\ .\ .\ c\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=\left(\frac{c}{a}\right)^2+\tfrac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2.$$

Nach §. 10. ist:

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2,\quad\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=\left(\frac{c}{a}\right)^2$$

oder

$$\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'}=\left(\frac{c}{a}\right)^2,\quad\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''}=\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2;$$

jenachdem

$$\frac{c}{a} < 1 \quad \text{oder} \quad \frac{c}{a} > 1$$

ist; also ist in beiden Fällen:

$$c\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right)=\left(\frac{c}{a}\right)^2+\{\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2\}$$

$$=2\left(\frac{c}{a}\right)^2+\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\}\cos B^2,$$

$$c\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right)=\left(\frac{c}{a}\right)^2+\tfrac{1}{2}\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\}\cos B^2,$$

und folglich nach 67):

$$68) \quad \ldots\ldots \quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right),$$

worin ein merkwürdiger, leicht in Worten auszusprechender Satz enthalten ist.

§. 13.

Für das Rotations-Ellipsoid wollen wir nun auch

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R\partial\Omega$$

zu entwickeln suchen, wozu zuvörderst die Bestimmung des Integrals

$$\int\frac{\partial x}{1+a\cos x^2}$$

erforderlich ist, welche sich unter der Voraussetzung, dass $1+a$ positiv ist, auf folgende Art geben lässt.

Es ist:

$$\frac{\partial x}{1+a\cos x^2}=\frac{\frac{\partial x}{\cos x^2}}{a+\sec x^2}=\frac{\partial\tan x}{1+a+\tan x^2},$$

und folglich:

$$\frac{\partial x}{1+a\cos x^2}=\frac{\partial\tan x}{(1+a)\left(1+\frac{\tan x^2}{1+a}\right)}.$$

Setzen wir nun:

$$\frac{\operatorname{tang} x}{\sqrt{1+a}} = u, \quad \partial \operatorname{tang} x = \sqrt{1+a} . \partial u;$$

so ist:

$$\frac{\partial x}{1+a\cos x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\partial u}{1+u^2},$$

und folglich:

$$\int \frac{\partial x}{1+a\cos x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+a}} \int \frac{\partial u}{1+u^2} = \frac{\operatorname{Arctang} u}{\sqrt{1+a}},$$

also:

$$69) \quad \ldots \quad \int \frac{\partial x}{1+a\cos x^2} = \frac{\operatorname{Arctang}\left(\frac{\operatorname{tang} x}{\sqrt{1+a}}\right)}{\sqrt{1+a}}.$$

Man kann dieses Integral auch auf folgende Art finden. Wenn man

$$1 = \sin x^2 + \cos x^2$$

setzt, so erhält man:

$$\frac{1}{1+a\cos x^2} = \frac{1}{\sin x^2 + (1+a)\cos x^2} = \frac{\frac{1}{\sin x^2}}{1+(1+a)\cot x^2},$$

also:

$$\frac{\partial x}{1+a\cos x^2} = \frac{\frac{\partial x}{\sin x^2}}{1+(1+a)\cot x^2} = -\frac{\partial \cot x}{1+(1+a)\cot x^2},$$

und folglich, wenn man

$$\cot x \sqrt{1+a} = v, \quad \partial \cot x = \frac{\partial v}{\sqrt{1+a}}$$

setzt:

$$\frac{\partial x}{1+a\cos x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1+a}} \cdot \frac{\partial v}{1+v^2},$$

also:

$$\int \frac{\partial x}{1+a\cos x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1+a}} \int \frac{\partial v}{1+v^2} = -\frac{\operatorname{Arctang} v}{\sqrt{1+a}},$$

folglich:

$$70) \quad \ldots \quad \int \frac{\partial x}{1+a\cos x^2} = -\frac{\operatorname{Arctang}(\cot x \sqrt{1+a})}{\sqrt{1+a}}.$$

Dass beide Ausdrücke in 69) und 70) dasselbe Integral repräsentiren, ist leicht zu übersehen.

Also ist nach 70):

$$\int_0^{\pi} \frac{\partial x}{1+a\cos x^2}$$

$$=-\frac{\operatorname{Arctang}(\cot\pi.\sqrt{1+a})}{\sqrt{1+a}}-\left\{-\frac{\operatorname{Arctang}(\cot 0.\sqrt{1+a})}{\sqrt{1+a}}\right\}$$

$$=\frac{\operatorname{Arctang}(\cot 0.\sqrt{1+a})}{\sqrt{1+a}}-\frac{\operatorname{Arctang}(\cot\pi.\sqrt{1+a})}{\sqrt{1+a}}$$

$$=\frac{\operatorname{Arctang}(+\infty)}{\sqrt{1+a}}-\frac{\operatorname{Arctang}(-\infty)}{\sqrt{1+a}}$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}+\frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}=\frac{\pi}{\sqrt{1+a}},$$

so dass man folglich die Gleichung:

$$71) \ldots\ldots \int_0^{\pi} \frac{\partial x}{1+a\cos x^2}=\frac{\pi}{\sqrt{1+a}}$$

hat.

Offenbar ist:

$$72) \ldots\ldots \int_0^{2\pi} \frac{\partial x}{1+a\cos x^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{1+a}}.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist:

$$\frac{\sin B}{\sin \mathfrak{B}}\cdot\frac{R}{c}=\frac{1}{\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2\cos\Omega^2}$$

oder:

$$\frac{\sin B}{\sin \mathfrak{B}}\cdot\frac{R}{c}=\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2\cos\Omega^2},$$

also:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin B}{\sin \mathfrak{B}}\int_0^{2\pi} R\partial\Omega=\left(\frac{a}{c}\right)^2\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Omega}{1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\left\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right\}\cos B^2\cos\Omega^2};$$

und da nun

$$1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\}\cos B^2=\sin B^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\cos B^2$$

ist, so ist nach 72):

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin B}{\sin \mathfrak{B}}\int_0^{2\pi}R\partial\Omega=\left(\frac{a}{c}\right)^2\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\sin B^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\cos B^2}},$$

folglich:

$$73)\ \ldots\ \frac{1}{c}\cdot\frac{\sin B}{\sin \mathfrak{B}}\cdot\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)=\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{\sqrt{\sin B^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\cos B^2}}$$

oder:

$$74)\ \ldots\ \frac{1}{c}\cdot\frac{\sin B}{\sin \mathfrak{B}}\cdot\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)=\frac{\left(\frac{a}{c}\right)^2}{\sqrt{1-\{1-\left(\frac{a}{c}\right)^2\}\cos B^2}}.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist allgemein:

$$\frac{\sin \mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{\sqrt{R'R''}}=\frac{c}{a}\sqrt{\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2},$$

also nach 73), wenn man multiplicirt:

$$\frac{\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)}{\sqrt{R'R''}}=\frac{a}{c}\cdot\frac{\sqrt{\cos B^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2\sin B^2}}{\sqrt{\sin B^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\cos B^2}}=\frac{\sqrt{\sin B^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\cos B^2}}{\sqrt{\sin B^2+\left(\frac{a}{c}\right)^2\cos B^2}}$$

$$=1,$$

folglich:

$$75)\ \ldots\ldots\ldots\ \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)=\sqrt{R'R''},$$

worin wiederum ein merkwürdiger, leicht in Worten auszusprechender Satz enthalten ist.

§. 14.

Es liegt nahe, zu untersuchen, ob die beiden in §. 12. und §. 13. für das Rotations-Ellipsoid bewiesenen Sätze für jedes beliebige dreiaxige Ellipsoid gelten, zu welcher Untersuchung wir daher jetzt übergehen wollen.

Bekanntlich ist:

$$\int \cos\Omega^2 \partial\Omega = \tfrac{1}{2}\sin\Omega\cos\Omega + \tfrac{1}{2}\int\partial\Omega,$$

$$\int \sin\Omega^2 \partial\Omega = -\tfrac{1}{2}\sin\Omega\cos\Omega + \tfrac{1}{2}\int\partial\Omega,$$

$$2\int \sin\Omega\cos\Omega\partial\Omega = \int \sin 2\Omega\partial\Omega = -\tfrac{1}{2}\cos 2\Omega;$$

also:

$$\int_0^{2\pi} \cos\Omega^2 \partial\Omega = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\partial\Omega = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin\Omega^2 \partial\Omega = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\partial\Omega = \pi,$$

$$2\int_0^{2\pi} \sin\Omega\cos\Omega\partial\Omega = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = 0;$$

folglich nach 45) offenbar:

$$\int_0^{2\pi} M\partial\Omega$$

$$= \pi\{\cos B^2 + \left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right)\sin B^2\right] \times \cot\mathfrak{B}^2\tang B^2\},$$

und daher nach 42):

$$c\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Omega}{\partial R}$$

$$= \pi\{\cos B^2 + \left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right)\sin B^2\right] \times \cot\mathfrak{B}^2\tang B^2\},$$

also nach 66):

$$76) \quad c\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\{\cos B^2 + \left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2 + \left(\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right)\sin B^2\right] \times \cot\mathfrak{B}^2\tang B^2\},$$

oder nach 58):

$$c\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right) = \tfrac{1}{2}U.$$

Nach 64) ist aber:

$$c\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right) = U,$$

also:

$$77) \quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R''}\right),$$

woraus sich demnach ergiebt, dass der in §. 12. für das Rotations-Ellipsoid bewiesene Satz in der That ganz allgemein für jedes beliebige Ellipsoid gilt.

§. 15.

Wenn wir der Kürze wegen:

$$F=\cos B^2+\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right\}\sin B^2\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang} B^2,$$

$$G=-2\frac{c}{a}\cdot\frac{c}{b}\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right\}\sin\mathfrak{L}\cos\mathfrak{L}\sin B\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang} B^2,$$

$$H=\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^2\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang} B^2$$

setzen, so ist nach 45):

$$M=F\cos\Omega^2+G\sin\Omega\cos\Omega+H\sin\Omega^2,$$

also nach 42):

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}R\partial\Omega=\frac{\partial\Omega}{F\cos\Omega^2+G\sin\Omega\cos\Omega+H\sin\Omega^2}$$

$$=\frac{\frac{\partial\Omega}{\cos\Omega^2}}{F+G\operatorname{tang}\Omega+H\operatorname{tang}\Omega^2}$$

$$=\frac{\partial\operatorname{tang}\Omega}{F+G\operatorname{tang}\Omega+H\operatorname{tang}\Omega^2}.$$

Nun ist aber:

$$\frac{4FH-G^2}{4}$$

$$=\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\left\{\cos B^2+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2\right]\sin B^2\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang} B^2\right\}$$
$$\times\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang} B^2$$

$$-\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right\}^2\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{L}^2\sin B^2\cot\mathfrak{B}^4\operatorname{tang} B^4$$

$$=\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\cos B^2\cot\mathfrak{B}^2\operatorname{tang} B^2$$

$$+\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\left\{\left(\frac{c}{a}\right)^4\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\sin\mathfrak{L}^2-\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2-\left(\frac{c}{b}\right)^2\right]^2\sin\mathfrak{L}^2\cos\mathfrak{L}^2\right\}$$
$$\times\sin B^2\cot\mathfrak{B}^4\operatorname{tang} B^4$$

$$=\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\frac{\operatorname{tang} B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}\left\{\cos B^2\right.$$
$$\left.+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2\right]^2\sin B^2\frac{\operatorname{tang} B^2}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}^2}\right\},$$

also $4FH-G^2$ eine positive Grösse, folglich nach einer sehr bekannten Integralformel *):

$$\int\frac{\partial\operatorname{tang}\Omega}{F+G\operatorname{tang}\Omega+H\operatorname{tang}\Omega^2}=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\Omega}{\sqrt{4FH-G^2}},$$

und daher nach dem Obigen auch:

$$\int\frac{\partial\Omega}{F\cos\Omega^2+G\sin\Omega\cos\Omega+H\sin\Omega^2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\Omega}{\sqrt{4FH-G^2}}.$$

Folglich ist, wenn wir uns alle Bogen zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ genommen denken:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\partial\Omega}{F\cos\Omega^2+G\sin\Omega\cos\Omega+H\sin\Omega^2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}}-\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}0}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}(+\infty)-\operatorname{Arctang}\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\tfrac{1}{2}\pi-\operatorname{Arctang}\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$

und

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\frac{\partial\Omega}{F\cos\Omega^2+G\sin\Omega\cos\Omega+H\sin\Omega^2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}}-\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}}\right\}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}}-\operatorname{Arctang}(-\infty)\right\}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}}\left\{\operatorname{Arctang}\frac{G}{\sqrt{4FH-G^2}}+\tfrac{1}{2}\pi\right\}\ **);$$

---

*) M. s. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. Leipzig. 1838. S. 164.

**) Warum bei der ersten und zweiten Integration respective

$$\operatorname{Arctang}\frac{G+2H\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}}=\operatorname{Arctang}(+\infty)$$

und

also nach einem bekannten Satze von den bestimmten Integralen:

$$\int_0^\pi \frac{\partial\Omega}{F\cos\Omega^2+G\sin\Omega\cos\Omega+H\sin\Omega^2}=\frac{2\pi}{\sqrt{4FH-G^2}}.$$

Folglich ist nach dem Obigen:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\int_0^\pi R\partial\Omega=\frac{2\pi}{\sqrt{4FH-G^2}},$$

und, weil offenbar:

$$\int_0^{2\pi} R\partial\Omega=2\int_0^\pi R\partial\Omega$$

ist:

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\int_0^{2\pi} R\partial\Omega=\frac{4\pi}{\sqrt{4FH-G^2}},$$

also nach 66):

$$\frac{1}{c}\cdot\frac{\sin B}{\sin\mathfrak{B}}\cdot\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)=\frac{2}{\sqrt{4FH-G^2}},$$

oder:

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)=\frac{2c\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}}{\sqrt{4FH-G^2}},$$

und wenn man nun für den Nenner seinen aus dem Obigen bekannten Ausdruck einführt:

$$78)\;\ldots\ldots\ldots\;\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R)$$

$$=\frac{c\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}}{\dfrac{c}{a}\cdot\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{\tang B}{\tang\mathfrak{B}}\sqrt{\cos B^2+\left\{\left(\dfrac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\dfrac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2\right\}^2\sin B^2\dfrac{\tang B^2}{\tang\mathfrak{B}^2}}}.$$

Nach 58) ist aber:

$$V=$$

$$\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{c}{b}\right)^2\frac{\tang B^2}{\tang\mathfrak{B}^2}\left\{\cos B^2+\left[\left(\frac{c}{a}\right)^2\cos\mathfrak{L}^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\sin\mathfrak{L}^2\right]^2\sin B^2\frac{\tang B^2}{\tang\mathfrak{B}^2}\right\},$$

$$\mathrm{Arctang}\frac{G+2H\tang\frac{1}{2}\pi}{\sqrt{4FH-G^2}}=\mathrm{Arctang}(-\infty)$$

gesetzt worden ist, wird einer Erläuterung nicht bedürfen, wenn man nur bedenkt, dass man immer das Gesetz der Stetigkeit festzuhalten hat.

also nach 78):

$$79) \ldots\ldots \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R) = \frac{c\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}}{\sqrt{V}},$$

und daher nach 61):

$$80) \ldots\ldots \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R) = c\cdot\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\cdot\left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2.$$

Nach 64) ist nun:

$$2\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R'} = U + \sqrt{U^2-4V},\quad 2\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\cdot\frac{c}{R''} = U - \sqrt{U^2-4V};$$

also:

$$\left(\frac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}\right)^2\cdot\frac{c}{R'}\cdot\frac{c}{R''} = V,\quad \sqrt{R'R''} = \frac{c\dfrac{\sin\mathfrak{B}}{\sin B}}{\sqrt{V}};$$

folglich nach 79):

$$81) \ldots\ldots \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R) = \sqrt{R'R''},$$

welche Formel wieder mit der früher für das Rotations-Ellipsoid gefundenen Formel 75) genau übereinstimmt.

§. 16.

In den in den beiden vorhergehenden Paragraphen für jedes beliebige dreiaxige Ellipsoid bewiesenen Gleichungen:

$$\overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right),\quad \overset{2\pi}{\underset{0}{\mathrm{M}}}(R) = \sqrt{R'R''}$$

ist der folgende merkwürdige Satz enthalten:

Lehrsatz.

Das arithmetische Mittel der reciproken Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte in einem beliebigen Punkte eines jeden Ellipsoids ist das arithmetische Mittel zwischen dem reciproken kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser in diesem Punkte.

Das arithmetische Mittel der Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte in einem beliebigen Punkte eines jeden

Ellipsoids ist das geometrische Mittel zwischen dem kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser in diesem Punkte.

Setzen wir

$$\frac{1}{\mathfrak{R}}=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right), \quad \mathrm{R}=\sqrt{R'R''};$$

so ist:

$$\mathfrak{R}=\frac{2R'R''}{R'+R''},$$

also:

$$\mathrm{R}-\mathfrak{R}=\sqrt{R'R''}-\frac{2R'R''}{R'+R''}=\frac{(R'+R''-2\sqrt{R'R''})\sqrt{R'R''}}{R'+R''},$$

folglich:

$$\mathrm{R}-\mathfrak{R}=\frac{\sqrt{R'R''}}{R'+R''}.(\sqrt{R'}-\sqrt{R''})^2,$$

und daher offenbar immer:

$$\mathrm{R}>\mathfrak{R}.$$

Weil ferner

$$4R'R''=(R'+R'')^2-(R'-R'')^2,$$

folglich

$$4R'R''<(R'+R'')^2, \quad \sqrt{R'R''}<\tfrac{1}{2}(R'+R''), \quad \frac{\sqrt{R'R''}}{R'+R''}<\tfrac{1}{2}$$

ist; so ist:

$$\mathrm{R}-\mathfrak{R}<\tfrac{1}{2}.(\sqrt{R'}-\sqrt{R''})^2.$$

Weitere Untersuchungen über das obige Theorem, welches ich für sehr merkwürdig halte und das zu manchen Anwendungen Gelegenheit geben kann, namentlich auch über seine vielleicht mögliche noch grössere Verallgemeinerung, behalte ich mir vor, da die vorliegende Abhandlung nur dem Ellipsoid gewidmet sein sollte, insbesondere auch wegen dessen grosser Wichtigkeit für die höhere Geodäsie, wenn es, wie ich schon früher bemerkt habe, namentlich sich immer mehr als nothwendig herausstellen sollte, die Erde vielleicht als ein allgemeines dreiaxiges Ellipsoid zu betrachten.

§. 17.

Nach diesen Untersuchungen über die Krümmung des Ellipsoids wollen wir jetzt zu anderen, in noch unmittelbarerer Bezie-

hung zur höheren Geodäsie stehenden Betrachtungen übergehen, indem wir uns zunächst die folgende, die Bestimmung des Azimuths betreffende Aufgabe vorlegen.

Von der Normale des durch die Coordinaten:

$$82) \ldots\ldots \begin{cases} x_0 = a\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0, \\ y_0 = b\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0, \\ z_0 = c\sin\mathfrak{B}_0 \end{cases}$$

bestimmten Punkte des Ellipsoids denken wir uns eine Ebene ausgehend, welche durch einen zweiten, durch die Coordinaten:

$$83) \ldots\ldots \begin{cases} x_1 = a\cos\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1, \\ y_1 = b\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1, \\ z_1 = c\sin\mathfrak{B}_1 \end{cases}$$

bestimmten Punkt geht, und wollen nun das Azimuth dieser Ebene, oder vielmehr der Geraden, in welcher von derselben der Horizont des Punktes $(x_0y_0z_0)$ geschnitten wird, welches durch Ω_{01} bezeichnet werden mag, zu bestimmen suchen.

Bezeichnen wir die Gleichung der in Rede stehenden Ebene durch:

$$84) \ldots A_0'(\mathfrak{x}-x_0)+B_0'(\mathfrak{y}-y_0)+C_0'(\mathfrak{z}-z_0)=0,$$

so ist unter den gemachten Voraussetzungen auch:

$$85) \ldots A_0'(x_1-x_0)+B_0'(y_1-y_0)+C_0'(z_1-z_0)=0,$$

und nach 32) ist:

$$86) \quad \begin{aligned} A_0' &= \cos\mathfrak{B}_0\left(\frac{\cos\mathfrak{L}_0\tang B_0\sin\Omega_{01}}{a}+\frac{\sin\mathfrak{L}_0\sec\mathfrak{B}_0\cos\Omega_{01}}{b}\right), \\ B_0' &= \cos\mathfrak{B}_0\left(\frac{\sin\mathfrak{L}_0\tang B_0\sin\Omega_{01}}{b}-\frac{\cos\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\Omega_{01}}{a}\right), \\ C_0' &= -\frac{\sin\mathfrak{B}_0\cot B_0\sin\Omega_{01}}{c}. \end{aligned}$$

Aus 82), 83), 85) erhält man die Gleichung:

$$\begin{aligned} &aA_0'\cos\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1+bB_0'\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1+cC_0'\sin\mathfrak{B}_1 \\ &=aA_0'\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0+bB_0'\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0+cC_0'\sin\mathfrak{B}_0, \end{aligned}$$

und muss nun zuvörderst die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens weiter entwickeln. Nach 86) ist aber:

$$aA_0'\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0+bB_0'\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0+cC_0'\sin\mathfrak{B}_0$$

$$=\cos\mathfrak{B}_0{}^2(\cos\mathfrak{L}_0{}^2\operatorname{tang}B_0\sin\Omega_{01}+\frac{a}{b}\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\Omega_{01})$$

$$+\cos\mathfrak{B}_0{}^2(\sin\mathfrak{L}_0{}^2\operatorname{tang}B_0\sin\Omega_{01}-\frac{b}{a}\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\Omega_{01})$$

$$-\sin\mathfrak{B}_0{}^2\cot B_0\sin\Omega_{01}$$

$$=(\cos\mathfrak{B}_0{}^2\operatorname{tang}B_0-\sin\mathfrak{B}_0{}^2\cot B_0)\sin\Omega_{01}$$

$$+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\mathfrak{B}_0{}^2\cos\Omega_{01}$$

$$=\frac{\cos\mathfrak{B}_0{}^2\sin B_0{}^2-\sin\mathfrak{B}_0{}^2\cos B_0{}^2}{\sin B_0\cos B_0}\sin\Omega_{01}$$

$$+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\mathfrak{B}_0{}^2\cos\Omega_{01}$$

$$=\frac{\sin(B_0+\mathfrak{B}_0)\sin(B_0-\mathfrak{B}_0)}{\sin B_0\cos B_0}\sin\Omega_{01}$$

$$+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\mathfrak{B}_0{}^2\cos\Omega_{01}$$

$$=\frac{2\sin(B_0+\mathfrak{B}_0)\sin(B_0-\mathfrak{B}_0)}{\sin 2B_0}\sin\Omega_{01}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin 2\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\mathfrak{B}_0{}^2\cos\Omega_{01},$$

und man hat also nach dem Obigen die folgende Gleichung:

$$\cos\mathfrak{B}_0(\cos\mathfrak{L}_0\operatorname{tang}B_0\sin\Omega_{01}+\frac{a}{b}\sin\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\Omega_{01})\cos\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1$$

$$+\cos\mathfrak{B}_0(\sin\mathfrak{L}_0\operatorname{tang}B_0\sin\Omega_{01}-\frac{b}{a}\cos\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\Omega_{01})\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1$$

$$-\sin\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\cot B_0\sin\Omega_{01}$$

$$=\frac{\sin(B_0+\mathfrak{B}_0)\sin(B_0-\mathfrak{B}_0)}{\sin B_0\cos B_0}\sin\Omega_{01}$$

$$+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\mathfrak{B}_0{}^2\cos\Omega_{01},$$

oder:

$$\cos\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\left\{\begin{array}{c}\cos(\mathfrak{L}_0-\mathfrak{L}_1)\tang B_0\sin\Omega_{01}\\+\left(\frac{a}{b}\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1-\frac{b}{a}\cos\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1\right)\sec B_0\cos\Omega_{01}\end{array}\right\}$$

$$-\sin\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\cot B_0\sin\Omega_{01}$$

$$=\frac{\sin(B_0+\mathfrak{B}_0)\sin(B_0-\mathfrak{B}_0)}{\sin B_0\cos B_0}\sin\Omega_{01}$$

$$+\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0\sec B_0\cos\mathfrak{B}_0{}^2\cos\Omega_{01},$$

woraus man mittelst leichter Rechnung die folgende ganz allgemeine Formel zur Bestimmung des Azimuths Ω_{01} erhält:

$$87)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;\tang\Omega_{01}$$

$$=-\frac{\frac{a}{b}\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1-\frac{b}{a}\cos\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1-\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\frac{\cos\mathfrak{B}_0}{\cos\mathfrak{B}_1}\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0}{\left\{\begin{array}{c}\cos(\mathfrak{L}_0-\mathfrak{L}_1)\sin B_0\\-\frac{\cos B_0}{\cos\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1}\{\sin\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\cot B_0+\frac{\sin(B_0+\mathfrak{B}_0)\sin(B_0-\mathfrak{B}_0)}{\sin B_0\cos B_0}\}\end{array}\right\}}.$$

Bekanntlich ist:

$$a\tang L_0=b\tang\mathfrak{L}_0,\quad a\tang L_1=b\tang\mathfrak{L}_1.$$

Für das Rotations-Ellipsoid ist:

$$88)\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;\tang\Omega_{01}$$

$$=-\frac{\sin(L_0-L_1)}{\left\{\begin{array}{c}\cos(L_0-L_1)\sin B_0\\-\frac{\cos B_0}{\cos\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1}\{\sin\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1\cot B_0+\frac{\sin(B_0+\mathfrak{B}_0)\sin(B_0-\mathfrak{B}_0)}{\sin B_0\cos B_0}\}\end{array}\right\}}.$$

§. 18.

Man kann noch einen anderen bemerkenswerthen Ausdruck für das Azimuth entwickeln, wozu wir aber zunächst die folgende allgemeine analytisch-geometrische Betrachtung vorausschicken müssen.

Die Gleichungen einer Geraden seien:

$$\frac{\mathfrak{x}-a}{\cos\alpha}=\frac{\mathfrak{y}-b}{\cos\beta}=\frac{\mathfrak{z}-c}{\cos\gamma}.$$

Durch diese Gerade sei eine Ebene gelegt, deren Gleichung

$$A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$$

sein mag, so ist:

$$A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma=0.$$

Geht nun diese Ebene durch einen zweiten Punkt $(a_1b_1c_1)$, so ist:

$$A(a_1-a)+B(b_1-b)+C(c_1-c)=0,$$

und es kann also:

$$A=(b_1-b)\cos\gamma-(c_1-c)\cos\beta,$$
$$B=(c_1-c)\cos\alpha-(a_1-a)\cos\gamma,$$
$$C=(a_1-a)\cos\beta-(b_1-b)\cos\alpha$$

gesetzt werden. Durch den Punkt (abc) sei eine zweite, auf der ersten Geraden senkrecht stehende und in der vorhergehenden Ebene liegende Gerade gelegt, deren Gleichungen:

$$\frac{x-a}{\cos\theta}=\frac{y-b}{\cos\omega}=\frac{z-c}{\cos\overline{\omega}}$$

sein mögen, so ist:

$$\cos\alpha\cos\theta+\cos\beta\cos\omega+\cos\gamma\cos\overline{\omega}=0,$$
$$A\cos\theta+B\cos\omega+C\cos\overline{\omega}=0;$$

also:

$$\cos\theta=G(B\cos\gamma-C\cos\beta),$$
$$\cos\omega=G(C\cos\alpha-A\cos\gamma),$$
$$\cos\overline{\omega}=G(A\cos\beta-B\cos\alpha);$$

folglich:

$$\frac{1}{G}=\pm\sqrt{(A\cos\beta-B\cos\alpha)^2+(B\cos\gamma-C\cos\beta)^2+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)^2}$$
$$=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2-(A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma)^2}$$
$$=\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2};$$

und daher:

$$\cos\theta=\pm\frac{B\cos\gamma-C\cos\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\omega=\pm\frac{C\cos\alpha-A\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\overline{\omega}=\pm\frac{A\cos\beta-B\cos\alpha}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

wo nach dem Vorhergehenden:

$$A^2+B^2+C^2=(a-a_1)^2+(b-b_1)^2+(c-c_1)^2$$
$$-\{(a-a_1)\cos\alpha+(b-b_1)\cos\beta+(c-c_1)\cos\gamma\}^2$$

ist. Durch die erste Gerade sei eine zweite, auf der vorhergehenden durch dieselbe gelegten ersten Ebene senkrecht stehende Ebene gelegt, deren Gleichung:

$$A_0(\mathfrak{x}-a)+B_0(\mathfrak{y}-b)+C_0(\mathfrak{z}-c)=0$$

sein mag; so ist:

$$AA_0+BB_0+CC_0=0,$$
$$A_0\cos\alpha+B_0\cos\beta+C_0\cos\gamma=0;$$

also:

$$A_0=B\cos\gamma-C\cos\beta,$$
$$B_0=C\cos\alpha-A\cos\gamma,$$
$$C_0=A\cos\beta-B\cos\alpha;$$

wo nach dem Obigen, wie man leicht findet:

$$A\cos\beta-B\cos\alpha$$
$$=\{(a_1-a)\cos\alpha+(b_1-b)\cos\beta+(c_1-c)\cos\gamma\}\cos\gamma-(c_1-c),$$
$$B\cos\gamma-C\cos\beta$$
$$=\{(a_1-a)\cos\alpha+(b_1-b)\cos\beta+(c_1-c)\cos\gamma\}\cos\alpha-(a_1-a),$$
$$C\cos\alpha-A\cos\gamma$$
$$=\{(a_1-a)\cos\alpha+(b_1-b)\cos\beta+(c_1-c)\cos\gamma\}\cos\beta-(b_1-b)$$

ist. Die Gleichung der zweiten Ebene ist:

$$\left.\begin{array}{r}(B\cos\gamma-C\cos\beta)(\mathfrak{x}-a)\\+(C\cos\alpha-A\cos\gamma)(\mathfrak{y}-b)\\+(A\cos\beta-B\cos\alpha)(\mathfrak{z}-c)\end{array}\right\}=0.$$

Die Coordinaten eines beliebigen Punktes in dem durch die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ bestimmten Theile der durch die Gleichungen:

$$\frac{\mathfrak{x}-a}{\cos\theta}=\frac{\mathfrak{y}-b}{\cos\omega}=\frac{\mathfrak{z}-c}{\cos\overline{\omega}}$$

charakterisirten Geraden seien:

$$a+\varrho\cos\theta,$$
$$b+\varrho\cos\omega,$$
$$c+\varrho\cos\overline{\omega};$$

so erhält für dieselben, indem man sie für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ setzt, die Grösse auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung den Werth:

$$\varrho\left\{\begin{array}{c}(B\cos\gamma - C\cos\beta)\cos\theta \\ +(C\cos\alpha - A\cos\gamma)\cos\omega \\ +(A\cos\beta - B\cos\alpha)\cos\overline{\omega}\end{array}\right\},$$

also nach dem Obigen den Werth:

$$\pm\varrho\frac{(A\cos\beta - B\cos\alpha)^2 + (B\cos\gamma - C\cos\beta)^2 + (C\cos\alpha - A\cos\gamma)^2}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

oder:

$$\pm\varrho\sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

Für die Coordinaten a_1, b_1, c_1 erhält dieselbe Grösse den Werth:

$$(B\cos\gamma - C\cos\beta)(a_1 - a)$$

$$+(C\cos\alpha - A\cos\gamma)(b_1 - b)$$

$$+(A\cos\beta - B\cos\alpha)(a_1 - a)$$

$$= \{[(a_1-a)\cos\alpha+(b_1-b)\cos\beta+(c_1-c)\cos\gamma]\cos\alpha-(a_1-a)\}(a_1-a)$$

$$+\{[(a_1-a)\cos\alpha+(b_1-b)\cos\beta+(c_1-c)\cos\gamma]\cos\beta-(b_1-b)\}(b_1-b)$$

$$+\{[(a_1-a)\cos\alpha+(b_1-b)\cos\beta+(c_1-c)\cos\gamma]\cos\gamma-(c_1-c)\}(c_1-c)$$

$$=\{(a_1-a)\cos\alpha+(b_1-b)\cos\beta+(c_1-c)\cos\gamma\}^2-\{(a_1-a)^2+(b_1-b)^2+(c_1-c)^2\}$$

$$=-(a_1-a)^2\sin\alpha^2-(b_1-b)^2\sin\beta^2-(c_1-c)^2\sin\gamma^2$$

$$+2(a_1-a)(b_1-b)\cos\alpha\cos\beta$$

$$+2(b_1-b)(c_1-c)\cos\beta\cos\gamma$$

$$+2(c_1-c)(a_1-a)\cos\gamma\cos\alpha.$$

Man muss also nach einem bekannten Satze, wenn der Punkt $(a_1b_1c_1)$ und der durch die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ bestimmte Theil der durch die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{x}-a}{\cos\theta}=\frac{\mathfrak{y}-b}{\cos\omega}=\frac{\mathfrak{z}-c}{\cos\overline{\omega}}$$

charakterisirten Geraden auf einer Seite der Ebene liegen sollen, welche durch die erste, durch die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{x}-a}{\cos\alpha}=\frac{\mathfrak{y}-b}{\cos\beta}=\frac{\mathfrak{z}-c}{\cos\gamma}$$

charakterisirte Gerade senkrecht gegen die durch diese Gerade und den Punkt $(a_1 b_1 c_1)$ gelegte Ebene gelegt worden ist, in den obigen Formeln für $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\varpi$ die oberen oder unteren Zeichen nehmen, jenachdem die vorstehende Grösse positiv oder negativ ist. Nach dem Obigen ist aber:

$$-(A^2+B^2+C^2) = \{(a_1-a)\cos\alpha+(b_1-b)\cos\beta+(c_1-c)\cos\gamma\}^2 \\ -\{(a_1-a)^2+(b_1-b)^2+(c_1-c)^2\},$$

folglich letztere Grösse negativ; daher muss man in den obigen Ausdrücken von $\cos\theta$, $\cos\omega$, $\cos\varpi$ die unteren Zeichen nehmen, und hat also:

$$\cos\theta = -\frac{B\cos\gamma - C\cos\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{C\cos\beta - B\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\omega = -\frac{C\cos\alpha - A\cos\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{A\cos\gamma - C\cos\alpha}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\varpi = -\frac{A\cos\beta - B\cos\alpha}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{B\cos\alpha - A\cos\beta}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

zu setzen.

§. 19.

Die Gleichungen der Normale des Ellipsoids in dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ seien

$$\frac{\mathfrak{x}-x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{\mathfrak{y}-y_0}{\cos\beta_0} = \frac{\mathfrak{z}-z_0}{\cos\gamma_0},$$

wo bekanntlich:

$$\cos\alpha_0 = \frac{\frac{x_0}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\beta_0 = \frac{\frac{y_0}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_0 = \frac{\frac{z_0}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}$$

zu setzen ist (Archiv. Thl. XXXVI. S. 83). Durch diese Normale und den Punkt $(x_1y_1z_1)$ des Ellipsoids legen wir eine durch die Gleichung

$$A_{01}(\mathfrak{x}-x_0)+B_{01}(\mathfrak{y}-y_0)+C_{01}(\mathfrak{z}-z_0)=0$$

charakterisirte Ebene, und bezeichnen durch θ_{01}, ω_{01}, $\overline{\omega}_{01}$ die Bestimmungswinkel des Theils der Durchschnittslinie dieser Ebene mit dem Horizont des Punktes $(x_0y_0z_0)$, welcher mit dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ auf einer Seite der durch die Normale senkrecht gegen die vorhergehende Ebene gelegten Ebene liegt; so ist nach den im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Formeln:

$$\cos\theta_{01}=\frac{C_{01}\cos\beta_0-B_{01}\cos\gamma_0}{\sqrt{A_{01}{}^2+B_{01}{}^2+C_{01}{}^2}},$$

$$\cos\omega_{01}=\frac{A_{01}\cos\gamma_0-C_{01}\cos\alpha_0}{\sqrt{A_{01}{}^2+B_{01}{}^2+C_{01}{}^2}},$$

$$\cos\overline{\omega}_{01}=\frac{B_{01}\cos\alpha_0-A_{01}\cos\beta_0}{\sqrt{A_{01}{}^2+B_{01}{}^2+C_{01}{}^2}}.$$

Nach dem vorhergehenden Paragraphen ist aber:

$$C_{01}\cos\beta_0-B_{01}\cos\gamma_0$$
$$=(x_1-x_0)-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}\cos\alpha_0,$$
$$A_{01}\cos\gamma_0-C_{01}\cos\alpha_0$$
$$=(y_1-y_0)-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}\cos\beta_0,$$
$$B_{01}\cos\alpha_0-A_{01}\cos\beta_0$$
$$=(z_1-z_0)-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}\cos\gamma_0$$

und:

$$A_{01}{}^2+B_{01}{}^2+C_{01}{}^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2$$
$$-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}^2,$$

oder, wenn wir:

$$89)\ \ldots\ E_{01}=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2}$$

setzen:

$$A_{01}{}^2+B_{01}{}^2+C_{01}{}^2$$
$$=E_{01}{}^2-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}^2;$$

also ist nach dem Obigen:

90)

$$\cos\theta_{01}=\frac{(x_1-x_0)-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}\cos\alpha_0}{\sqrt{E_{01}{}^2-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}^2}},$$

$$\cos\omega_{01}=\frac{(y_1-y_0)-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}\cos\beta_0}{\sqrt{E_{01}{}^2-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}^2}},$$

$$\cos\overline{\omega}_{01}=\frac{(z_1-z_0)-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}\cos\gamma_0}{\sqrt{E_{01}{}^2-\{(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0\}^2}}.$$

Setzt man nun in den Formeln 17) für x, y, z respective x_0, y_0, z_0, wodurch man:

$$\cos\alpha=-\frac{\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{z_0}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\beta=-\frac{\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{z_0}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}$$

erhält, so ist offenbar allgemein *):

$$\cos\Omega_{01}=\cos\alpha\cos\theta_{01}+\cos\beta\cos\omega_{01}+\cos\gamma\cos\overline{\omega}_{01}.$$

Nach gehöriger Substitution findet man als Zähler von $\cos\Omega_{01}$, wenn der Kürze wegen:

$$K_{01}=(x_1-x_0)\cos\alpha_0+(y_1-y_0)\cos\beta_0+(z_1-z_0)\cos\gamma_0$$

gesetzt wird, die Grösse:

$$\begin{aligned}
&-(x_1-x_0)\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{z_0}{c^2} &&+K_{01}\cos\alpha_0\cdot\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{z_0}{c^2}\\
&-(y_1-y_0)\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{z_0}{c^2} &&+K_{01}\cos\beta_0\cdot\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{z_0}{c^2}\\
&+(z_1-z_0)\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right\} &&-K_{01}\cos\gamma_0\cdot\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

*) Es mag $0<\Omega_{01}<180^0$ oder $180^0<\Omega_{01}<360^0$ sein.

$$=-\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}\right\}\frac{z_0}{c^2}$$

$$+K_{01}\left(\frac{x_0}{a^2}\cos\alpha_0+\frac{y_0}{b^2}\cos\beta_0+\frac{z_0}{c^2}\cos\gamma_0\right)\frac{z_0}{c^2}$$

$$+\{(z_1-z_0)-K_{01}\cos\gamma_0\}\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}.$$

Auf der Stelle überzeugt man sich aber, dass die Grösse

$$-\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}\right\}\frac{z_0}{c^2}$$

$$+K_{01}\left(\frac{x_0}{a^2}\cos\alpha_0+\frac{y_0}{b^2}\cos\beta_0+\frac{z_0}{c^2}\cos\gamma_0\right)\frac{z_0}{c^2}$$

verschwindet, so dass also der obige Zähler die Grösse

$$\{(z_1-z_0)-K_{01}\cos\gamma_0\}\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\},$$

und folglich offenbar:

$$\cos\Omega_{01}=\frac{(z_1-z_0)-K_{01}\cos\gamma_0}{\sqrt{E_{01}{}^2-K_{01}{}^2}}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}},$$

also nach dem Obigen:

$$\cos\Omega_{01}=\cos\overline{\omega}_{01}\cdot\frac{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}$$

ist. Nach 16) ist aber:

$$\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}=\frac{z_0}{c^2}\operatorname{cosec}B_0,$$

$$\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}=\frac{z_0}{c^2}\cot B_0;$$

also:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}}=\frac{1}{\cos B_0},$$

folglich nach dem Obigen:

$$91) \ldots\ldots\ldots \quad \cos\Omega_{01} = \frac{\cos\overline{\omega}_{01}}{\cos B_0},$$

welches eine sehr einfache, für jedes Ellipsoid geltende Relation ist.

Nun ist aber offenbar:

$$K_{01}.\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2} = \left(\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}+\frac{z_0z_1}{c^2}\right)-1$$

$$= \{\sin\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1+\cos\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\cos(\mathfrak{L}_0-\mathfrak{L}_1)\}-1,$$

also, wenn wir:

$$92) \quad \cos\Theta_{01} = \sin\mathfrak{B}_0\sin\mathfrak{B}_1+\cos\mathfrak{B}_0\cos\mathfrak{B}_1\cos(\mathfrak{L}_0-\mathfrak{L}_1)$$

setzen:

$$K_{01}.\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2} = -2\sin\tfrac{1}{2}\Theta_{01}{}^2,$$

folglich nach 26):

$$K_{01} = -2c\frac{\sin B_0}{\sin\mathfrak{B}_0}\sin\tfrac{1}{2}\Theta_{01}{}^2,$$

also:

$$E_{01}{}^2-K_{01}{}^2 = E_{01}{}^2.\left\{1-\left(\frac{2c}{E_{01}}\cdot\frac{\sin B_0}{\sin\mathfrak{B}_0}\sin\tfrac{1}{2}\Theta_{01}{}^2\right)^2\right\}.$$

Weil ferner nach dem Obigen:

$$\cos\gamma_0 = \frac{\frac{z_0}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}} = \sin B_0$$

ist, so ist:

$$K_{01}\cos\gamma_0 = -2c\frac{\sin B_0{}^2}{\sin\mathfrak{B}_0}\sin\tfrac{1}{2}\Theta_{01}{}^2;$$

also, weil endlich auch:

$$z_1-z_0 = c(\sin\mathfrak{B}_1-\sin\mathfrak{B}_0) = -2c\sin\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}_0-\mathfrak{B}_1)\cos\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}_0+\mathfrak{B}_1)$$

ist, nach dem Obigen:

$$\cos\overline{\omega}_{01} = -\frac{2c}{E_{01}}\cdot\frac{\sin\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}_0-\mathfrak{B}_1)\cos\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}_0+\mathfrak{B}_1)-\frac{\sin B_0{}^2}{\sin\mathfrak{B}_0}\sin\tfrac{1}{2}\Theta_{01}{}^2}{\sqrt{1-\left(\frac{2c}{E_{01}}\cdot\frac{\sin B_0}{\sin\mathfrak{B}_0}\sin\tfrac{1}{2}\Theta_{01}{}^2\right)^2}},$$

folglich nach 91):

93)

$$\cos\Omega_{01} = -\frac{2c}{E_{01}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_1)\cos\frac{1}{2}(\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1) - \frac{\sin B_0^2}{\sin\mathfrak{B}_0}\sin\frac{1}{2}\Theta_{01}^2}{\cos B_0\sqrt{1 - \left(\frac{2c}{E_{01}} \cdot \frac{\sin B_0}{\sin\mathfrak{B}_0}\sin\frac{1}{2}\Theta_{01}^2\right)^2}}.$$

Es ist:

$$94)\qquad E_{01} = \left\{\begin{array}{l} a^2(\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0 - \cos\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1)^2 \\ + b^2(\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0 - \sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1)^2 \\ + c^2(\sin\mathfrak{B}_0 - \sin\mathfrak{B}_1)^2 \end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Durch die Formeln 87) oder 88) und 93) für $\operatorname{tang}\Omega_{01}$ und $\cos\Omega_{01}$ wird das zwischen 0 und 360° liegende Ω_{01} vollkommen bestimmt. Durch eine dieser beiden Formeln allein wird Ω_{01} nicht vollkommen bestimmt; man braucht aber bloss das Zeichen von $\cos\Omega_{01}$ zu kennen, um dann Ω_{01} mittelst der Formel 87) oder 88) ohne alle Zweideutigkeit berechnen zu können. Weil $\cos B_0$ stets positiv ist, so ist $\cos\Omega_{01}$ positiv, negativ, jenachdem

$$\sin\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}_0 - \mathfrak{B}_1)\cos\tfrac{1}{2}(\mathfrak{B}_0 + \mathfrak{B}_1) - \frac{\sin B_0^2}{\sin\mathfrak{B}_0}\sin\tfrac{1}{2}\Theta_{01}^2 \lessgtr 0,$$

oder jenachdem

$$\sin\mathfrak{B}_0 - \sin\mathfrak{B}_1 - 2\frac{\sin B_0^2}{\sin\mathfrak{B}_0}\sin\tfrac{1}{2}\Theta_{01}^2 \lessgtr 0,$$

oder jenachdem

$$\sin\mathfrak{B}_0\left(1 - 2\frac{\sin B_0^2}{\sin\mathfrak{B}_0^2}\sin\tfrac{1}{2}\Theta_{01}^2\right) \lessgtr \sin\mathfrak{B}_1$$

ist.

Anmerkung.

Die beiden merkwürdigen Ausdrücke 87) oder 88) und 93) für das Azimuth auf dem Ellipsoid wollen wir jetzt noch auf die Kugel anwenden, und untersuchen, ob die dadurch sich ergebenden Resultate mit den Resultaten übereinstimmen, welche in diesem Falle die sphärische Trigonometrie liefert, weil wir, wenn eine solche Uebereinstimmung sich zeigt, darin zugleich ein Kriterium für die Richtigkeit der genannten Ausdrücke haben. Wir werden dabei aber zugleich sehen, dass diese Ausdrücke eigent-

lich nur Uebertragungen gewisser Formeln der sphärischen Trigonometrie auf das Ellipsoid, also jedenfalls sehr bemerkenswerthe Verallgemeinerungen dieser letzteren sind, wodurch das Interesse der in Rede stehenden allgemeinen Ausdrücke natürlich sehr erhöhet werden muss.

Für die Kugel ist $\mathfrak{B}_0 = B_0$, $\mathfrak{B}_1 = B_1$, wodurch die Formel 88) die folgende Gestalt erhält:

$$\tan\Omega_{01} = -\frac{\sin(L_0 - L_1)}{\cos(L_0 - L_1)\sin B_0 - \cos B_0 \tan B_1}$$

oder:

$$\cot\Omega_{01} = \frac{\sin B_0 \cos(L_1 - L_0) - \cos B_0 \tan B_1}{\sin(L_1 - L_0)},$$

wobei wir jetzt annehmen wollen, dass $L_1 - L_0$ positiv und kleiner als 180^0 sei.

Denken wir uns nun ein sphärisches Dreieck ABC, dessen Spitze A im positiven Pol liegt, so können wir uns B und C in die Punkte $(L_0 B_0)$ und $(L_1 B_1)$ verlegt denken, wo dann offenbar:

$$A = L_1 - L_0, \quad b = 90^0 - B_1, \quad c = 90^0 - B_0;$$

$$L_1 - L_0 = A, \quad B_1 = 90^0 - b, \quad B_0 = 90^0 - c$$

ist, indem wir die Seiten des sphärischen Dreiecks ABC wie gewöhnlich durch a, b, c bezeichnen. Also ist nach der obigen Formel:

$$\cot\Omega_{01} = \frac{\cos c \cos A - \sin c \cot b}{\sin A}.$$

Nach der Art und Weise, wie in Folge der früher gegebenen Bestimmungen die Azimuthe Ω_{01} von 0 bis 360^0 gezählt werden, ist aber offenbar $\Omega_{01} = 360^0 - B$, also $\cot\Omega_{01} = -\cot B$, folglich:

$$\cot B = \frac{\cot b \sin c - \cos c \cos A}{\sin A},$$

worin man auf der Stelle eine bekannte Formel der sphärischen Trigonometrie erkennt.

Die Formel 93) wird im Falle der Kugel, deren Halbmesser wir durch r bezeichnen wollen:

$$\cos\Omega_{01} = -\frac{2r}{E_{01}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(B_0 - B_1)\cos\frac{1}{2}(B_0 + B_1) - \sin B_0 \sin\frac{1}{2}\Theta_{01}{}^2}{\cos B_0 \sqrt{1 - \left(\frac{2r}{E_{01}}\sin\frac{1}{2}\Theta_{01}{}^2\right)^2}},$$

also nach dem Obigen:

$$\cos B = -\frac{2r}{E_{01}} \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c) - \cos c \sin\frac{1}{2}\Theta_{01}{}^2}{\sin c \sqrt{1-\left(\frac{2r}{E_{01}}\sin\frac{1}{2}\Theta_{01}{}^2\right)^2}}.$$

Nach 92), wo offenbar Θ_{01} zwischen 0 und 180° genommen werkann, ist aber:

$$\cos\Theta_{01} = \sin B_0 \sin B_1 + \cos B_0 \cos B_1 \cos(L_1 - L_0)$$

$$= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

folglich nach der sphärischen Trigonometrie $\Theta_{01} = a$, und daher nach dem Obigen:

$$\cos B = \frac{2r}{E_{01}} \cdot \frac{\cos c \sin\frac{1}{2}a^2 - \sin\frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin c \sqrt{1-\left(\frac{2r}{E_{01}}\sin\frac{1}{2}a^2\right)^2}}.$$

Nach 94) ist:

$$\begin{aligned}\left(\frac{E_{01}}{r}\right)^2 = &\ (\cos L_0 \cos B_0 - \cos L_1 \cos B_1)^2 \\ &+ (\sin L_0 \cos B_0 - \sin L_1 \cos B_1)^2 \\ &+ (\sin B_0 - \sin B_1)^2 \\ = &\ 2\{1 - [\sin B_0 \sin B_1 + \cos B_0 \cos B_1 \cos(L_0 - L_1)]\} \\ = &\ 2(1-\cos a) = 4\sin\tfrac{1}{2}a^2,\end{aligned}$$

$$\frac{2r}{E_{01}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}a}, \quad 1-\left(\frac{2r}{E_{01}}\sin\frac{1}{2}a^2\right)^2 = 1 - \sin\tfrac{1}{2}a^2 = \cos\tfrac{1}{2}a^2,$$

also:

$$\cos B = \frac{\cos c \sin\frac{1}{2}a^2 - \sin\frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin c \sin\frac{1}{2}a \cos\frac{1}{2}a}.$$

Weil nun:

$$2\sin\tfrac{1}{2}a^2 = 1-\cos a, \quad 2\sin\tfrac{1}{2}(b-c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c) = \cos c - \cos b,$$

$$2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a = \sin a$$

ist; so ist:

$$\cos B = \frac{\cos c(1-\cos a) - (\cos c - \cos b)}{\sin c \sin a}$$

$$= \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a},$$

eine der bekannten Grundformeln der sphärischen Trigonometrie.

Ich benutze diese Anmerkung noch zu der folgenden Entwickelung. In meiner Abhandlung: Archiv. Thl. XXXVI. Nr. VIII. S. 95. 36) habe ich gezeigt, dass, wenn wir auf dem allgemeinen dreiaxigen Ellipsoid den von den äusseren Theilen der Normalen in den Punkten $(L_0 B_0)$ und $(L_1 B_1)$ eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel jetzt durch ω_{01} bezeichnen,

$$\cos\omega_{01}=\sin B_0\sin B_1\{1+\left(\frac{c^2}{a^2}\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1+\frac{c^2}{b^2}\sin\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1\right)\cot\mathfrak{B}_0\cot\mathfrak{B}_1\}$$

ist, habe aber dort der Kürze wegen, mit Bezug auf den Zweck jener Abhandlung, aus dieser merkwürdigen Formel noch nicht diejenigen Folgerungen gezogen, welche sich aus derselben ziehen lassen; muss ich mir nun zwar auch jetzt noch vorbehalten, auf diesen Gegenstand speciell zurückzukommen, so will ich doch schon hier auf eine mir besonders bemerkenswerth scheinende Folgerung aufmerksam machen, zu welcher jene Formel Gelegenheit giebt.

Nach Nr. 26) meiner vorerwähnten Abhandlung haben wir die Gleichungen:

$$\frac{\tan\mathfrak{B}_0{}^2}{\tan B_0{}^2}=\frac{c^2}{a^2}\cos\mathfrak{L}_0{}^2+\frac{c^2}{b^2}\sin\mathfrak{L}_0{}^2,$$

$$\frac{\tan\mathfrak{B}_1{}^2}{\tan B_1{}^2}=\frac{c^2}{a^2}\cos\mathfrak{L}_1{}^2+\frac{c^2}{b^2}\sin\mathfrak{L}_1{}^2;$$

woraus sich ergiebt:

$$\frac{c^2}{a^2}(\cos\mathfrak{L}_0{}^2\sin\mathfrak{L}_1{}^2-\sin\mathfrak{L}_0{}^2\cos\mathfrak{L}_1{}^2)=\frac{\tan\mathfrak{B}_0{}^2}{\tan B_0{}^2}\sin\mathfrak{L}_1{}^2-\frac{\tan\mathfrak{B}_1{}^2}{\tan B_1{}^2}\sin\mathfrak{L}_0{}^2,$$

$$\frac{c^2}{b^2}(\cos\mathfrak{L}_0{}^2\sin\mathfrak{L}_1{}^2-\sin\mathfrak{L}_0{}^2\cos\mathfrak{L}_1{}^2)=-\frac{\tan\mathfrak{B}_0{}^2}{\tan B_0{}^2}\cos\mathfrak{L}_1{}^2+\frac{\tan\mathfrak{B}_1{}^2}{\tan B_1{}^2}\cos\mathfrak{L}_0{}^2;$$

also:

$$\left(\frac{c^2}{a^2}\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1+\frac{c^2}{b^2}\sin\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1\right)(\cos\mathfrak{L}_0{}^2\sin\mathfrak{L}_1{}^2-\sin\mathfrak{L}_0{}^2\cos\mathfrak{L}_1{}^2)$$

$$=\frac{\tan\mathfrak{B}_0{}^2}{\tan B_0{}^2}(\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1\sin\mathfrak{L}_1{}^2-\sin\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{L}_1{}^2)$$

$$-\frac{\tan\mathfrak{B}_1{}^2}{\tan B_1{}^2}(\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1\sin\mathfrak{L}_0{}^2-\sin\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{L}_0{}^2),$$

woraus man, wenn man durch

$$\sin(\mathfrak{L}_0-\mathfrak{L}_1)=\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1-\cos\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1$$

dividirt, sogleich:

$$\left(\frac{c^2}{a^2}\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_1+\frac{c^2}{b^2}\sin\mathfrak{L}_0\sin\mathfrak{L}_1\right)\sin(\mathfrak{L}_0+\mathfrak{L}_1)$$

$$=\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0{}^2}{\operatorname{tang}B_0{}^2}\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{L}_1+\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1{}^2}{\operatorname{tang}B_1{}^2}\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0$$

erhält. Also ist nach dem Obigen:

$$\cos\omega_{01}$$

$$=\sin B_0\sin B_1\left\{1+\frac{\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0{}^2}{\operatorname{tang}B_0{}^2}\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{L}_1+\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1{}^2}{\operatorname{tang}B_1{}^2}\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0}{\sin(\mathfrak{L}_0+\mathfrak{L}_1)}\cot\mathfrak{B}_0\cot\mathfrak{B}_1\right\}$$

$$=\sin B_0\sin B_1+\cos B_0\cos B_1\frac{\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0{}^2}{\operatorname{tang}B_0{}^2}\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{L}_1+\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1{}^2}{\operatorname{tang}B_1{}^2}\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0}{\sin(\mathfrak{L}_0+\mathfrak{L}_1)}$$

$$\times\frac{\operatorname{tang}B_0}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}B_1}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1};$$

folglich:

$$\cos\omega_{01}$$

$$=\sin B_0\sin B_1+\cos B_0\cos B_1\frac{\left\{\begin{array}{c}\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0}{\operatorname{tang}B_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}B_1}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{L}_1\\+\frac{\operatorname{tang}B_0}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}{\operatorname{tang}B_1}\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0\end{array}\right\}}{\sin(\mathfrak{L}_0+\mathfrak{L}_1)}$$

oder:

$$\cos\omega_{01}$$

$$=\sin B_0\sin B_1+\cos B_0\cos B_1\frac{\left\{\begin{array}{c}\frac{\operatorname{tang}B_0}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}{\operatorname{tang}B_1}\sin2\mathfrak{L}_0\\+\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0}{\operatorname{tang}B_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}B_1}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}\sin2\mathfrak{L}_1\end{array}\right\}}{2\sin(\mathfrak{L}_0+\mathfrak{L}_1)}.$$

Für das Rotations-Ellipsoid ist:

$$\frac{\operatorname{tang}B_0}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0}=\frac{a}{c},\quad\frac{\operatorname{tang}B_1}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}=\frac{a}{c};$$

also:

$$\frac{\operatorname{tang}B_0}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}{\operatorname{tang}B_1}=\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}=1,$$

$$\frac{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_0}{\operatorname{tang}B_0}\cdot\frac{\operatorname{tang}B_1}{\operatorname{tang}\mathfrak{B}_1}=\frac{c}{a}\cdot\frac{a}{c}=1;$$

folglich nach obiger Formel:

$$\cos\omega_{01} = \sin B_0 \sin B_1 + \cos B_0 \cos B_1 \frac{\sin 2L_0 + \sin 2L_1}{2\sin(L_0+L_1)},$$

also, weil

$$\sin 2L_0 + \sin 2L_1 = 2\sin(L_0+L_1)\cos(L_0-L_1)$$

ist:

$$\cos\omega_{01} = \begin{cases} \sin B_0 \sin B_1 + \cos B_0 \cos B_1 \cos(L_0-L_1) \\ \sin B_0 \sin B_1 + \cos B_0 \cos B_1 \cos(L_1-L_0). \end{cases}$$

Dies ist aber ganz dieselbe Formel, welche die sphärische Trigonometrie für ω_{01} im Falle der Kugel liefert, woraus man also sieht, dass diese sphärisch-trigonometrische Formel ganz in derselben Weise für jedes Rotations-Ellipsoid gilt, und in der weiter oben gegebenen Formel ihre Verallgemeinerung für jedes dreiaxige Ellipsoid findet. Ich muss mir, wie schon erinnert, vorbehalten, auf diesen Gegenstand in einer besonderen Abhandlung zurückzukommen *).

§. 20.

Wir wollen uns jetzt mit der folgenden Aufgabe beschäftigen:

Aufgabe.

Durch die Normalen zweier Punkte eines Ellipsoids seien zwei Ebenen gelegt; die Lage einer jeden dieser Ebenen sei durch das Azimuth eines ihrer beiden von der Normale, durch welche die Ebene gelegt ist, ausgehenden Theile bestimmt: man soll den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt dieser beiden Ebenen und der Oberfläche des Ellipsoids bestimmen.

---

*) Wären für einen der beiden betrachteten Punkte, etwa für den ersten, die Grössen L_0, B_0, und demzufolge auch $\mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{B}_0$, bekannt, und ausserdem Ω_{01} und ω_{01} durch irgend ein Verfahren gemessen oder überhaupt bestimmt worden; so würden sich aus dem Vorstehenden und aus §. 17. zwei Gleichungen entnehmen lassen, mittelst welcher sich für den anderen Punkt L_1, B_1 und $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{B}_1$ finden lassen, also dessen Lage auf dem Ellipsoid bestimmt werden kann. Die Auflösung der beiden in Rede stehenden Gleichungen würde aber nur auf dem Wege der Näherung ohne zu grosse Weitläufigkeit möglich sein.

Bevor wir zur Lösung dieser Aufgabe schreiten können, müssen wir zuerst zeigen, wie aus zwei Gleichungen von der allgemeinen Form:

95)

$$A_0 \cos u \cos v + B_0 \sin u \cos v + C_0 \sin v = D_0,$$
$$A_1 \cos u \cos v + B_1 \sin u \cos v + C_1 \sin v = D_1$$

die unbekannten Grössen u, v auf die eleganteste Weise bestimmt werden.

Man setze der Kürze wegen:

96)

$$A_0' = (A_0B_1 - B_0A_1)B_0 - (C_0A_1 - A_0C_1)C_0$$
$$= A_0(A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1) - A_1(A_0^2 + B_0^2 + C_0^2),$$

$$B_0' = (B_0C_1 - C_0B_1)C_0 - (A_0B_1 - B_0A_1)A_0$$
$$= B_0(A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1) - B_1(A_0^2 + B_0^2 + C_0^2),$$

$$C_0' = (C_0A_1 - A_0C_1)A_0 - (B_0C_1 - C_0B_1)B_0$$
$$= C_0(A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1) - C_1(A_0^2 + B_0^2 + C_0^2);$$

97)

$$A_1' = (A_0B_1 - B_0A_1)B_1 - (C_0A_1 - A_0C_1)C_1$$
$$= A_0(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - A_1(A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1),$$

$$B_1' = (B_0C_1 - C_0B_1)C_1 - (A_0B_1 - B_0A_1)A_1$$
$$= B_0(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - B_1(A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1),$$

$$C_1' = (C_0A_1 - A_0C_1)A_1 - (B_0C_1 - C_0B_1)B_1$$
$$= C_0(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - C_1(A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1);$$

98)

$$\mathfrak{D} = \sqrt{(A_0B_1 - B_0A_1)^2 + (B_0C_1 - C_0B_1)^2 + (C_0A_1 - A_0C_1)^2}$$
$$= \sqrt{(A_0^2 + B_0^2 + C_0^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - (A_0A_1 + B_0B_1 + C_0C_1)^2};$$

so ist, wie man sogleich übersieht:

$$A_0A_0' + B_0B_0' + C_0C_0' = 0,$$
$$A_1A_1' + B_1B_1' + C_1C_1' = 0;$$

und:

$$A_0A_1' + B_0B_1' + C_0C_1' = \mathfrak{D}^2,$$
$$A_1A_0' + B_1B_0' + C_1C_0' = -\mathfrak{D}^2.$$

Setzen wir nun ferner:

$$99) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} A_{01} &= \frac{A_1'D_0 - A_0'D_1}{\mathfrak{D}^2}, \\ B_{01} &= \frac{B_1'D_0 - B_0'D_1}{\mathfrak{D}^2}, \\ C_{01} &= \frac{C_1'D_0 - C_0'D_1}{\mathfrak{D}^2}; \end{aligned} \right.$$

so ist wegen der vorstehenden Relationen offenbar:

$$A_0A_{01} + B_0B_{01} + C_0C_{01} = D_0,$$
$$A_1A_{01} + B_1B_{01} + C_1C_{01} = D_1.$$

Ziehen wir diese Gleichungen von den beiden aufzulösenden Gleichungen ab, so erhalten wir die Gleichungen:

$$A_0(\cos u \cos v - A_{01}) + B_0(\sin u \cos v - B_{01}) + C_0(\sin v - C_{01}) = 0,$$
$$A_1(\cos u \cos v - A_{01}) + B_1(\sin u \cos v - B_{01}) + C_1(\sin v - C_{01}) = 0;$$

und können also, wenn G einen gewissen, noch unbestimmten Factor bezeichnet:

$$\cos u \cos v - A_{01} = G(B_0C_1 - C_0B_1),$$
$$\sin u \cos v - B_{01} = G(C_0A_1 - A_0C_1),$$
$$\sin v - C_{01} = G(A_0B_1 - B_0A_1)$$

oder:

$$\cos u \cos v = A_{01} + G(B_0C_1 - C_0B_1),$$
$$\sin u \cos v = B_{01} + G(C_0A_1 - A_0C_1),$$
$$\sin v = C_{01} + G(A_0B_1 - B_0A_1)$$

setzen. Weil nun:

$$(\cos u \cos v)^2 + (\sin u \cos v)^2 + \sin v^2 = 1$$

und, wie sogleich erhellet:

$$(B_0C_1 - C_0B_1)A_0' + (C_0A_1 - A_0C_1)B_0' + (A_0B_1 - B_0A_1)C_0' = 0,$$
$$(B_0C_1 - C_0B_1)A_1' + (C_0A_1 - A_0C_1)B_1' + (A_0B_1 - B_0A_1)C_1' = 0;$$

also auch:

$$(B_0C_1 - C_0B_1)A_{01} + (C_0A_1 - A_0C_1)B_{01} + (A_0B_1 - B_0A_1)C_{01} = 0$$

ist; so ist offenbar:

$$1 = A_{01}^2 + B_{01}^2 + C_{01}^2 + \mathfrak{D}^2G^2,$$

also:

$$100) \quad \ldots \quad G = \pm \frac{\sqrt{1-(\mathrm{A}_{01}{}^2+\mathrm{B}_{01}{}^2+\mathrm{C}_{01}{}^2)}}{\mathfrak{D}}.$$

Zur Bestimmung der unbekannten Grössen u, v hat man nun aber nach dem Obigen unmittelbar die Formeln:

$$101) \quad \ldots \quad \begin{cases} \sin v = \mathrm{C}_{01} + G(\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_0\mathrm{A}_1), \\ \cos u = \dfrac{\mathrm{A}_{01} + G(\mathrm{B}_0\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_0\mathrm{B}_1)}{\cos v}, \\ \sin u = \dfrac{\mathrm{B}_{01} + G(\mathrm{C}_0\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_0\mathrm{C}_1)}{\cos v} \end{cases}$$

oder:

$$102) \quad \ldots \quad \begin{cases} \operatorname{tang} u = \dfrac{\mathrm{B}_{01} + G(\mathrm{C}_0\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_0\mathrm{C}_1)}{\mathrm{A}_{01} + G(\mathrm{B}_0\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_0\mathrm{B}_1)}, \\ \sin v = \mathrm{C}_{01} + G(\mathrm{A}_0\mathrm{B}_1 - \mathrm{B}_0\mathrm{A}_1) \\ \text{und} \\ \cos v = \dfrac{\mathrm{A}_{01} + G(\mathrm{B}_0\mathrm{C}_1 - \mathrm{C}_0\mathrm{B}_1)}{\cos u} \\ \quad\; = \dfrac{\mathrm{B}_{01} + G(\mathrm{C}_0\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_0\mathrm{C}_1)}{\sin u}. \end{cases}$$

Diese allgemeinen Formeln wollen wir jetzt zur Auflösung unserer obigen Aufgabe anwenden.

Die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte des Ellipsoids seien:

$$103) \quad \begin{cases} x_0 = a\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0, & x_1 = a\cos\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1, \\ y_0 = b\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0, & y_1 = b\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1, \\ z_0 = c\sin\mathfrak{B}_0; & z_1 = c\sin\mathfrak{B}_1; \end{cases}$$

und die Coordinaten des gesuchten Punktes seien:

$$104) \quad \ldots \quad \begin{cases} x_2 = a\cos\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2, \\ y_2 = b\sin\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2, \\ z_2 = c\sin\mathfrak{B}_2; \end{cases}$$

die beiden gegebenen Azimuthe bezeichnen wir respective durch Ω_{02} und Ω_{12}. Dann haben wir, um $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{B}_2$ zu bestimmen, in den obigen allgemeinen Formeln für A_0, B_0, C_0, D_0 und A_1, B_1 C_1, D_1 nach den in §. 16. gegebenen Entwickelungen die folgenden Werthe:

105)

$$\mathrm{A}_0 = \cos\mathfrak{B}_0(\cos\mathfrak{L}_0 \operatorname{tang} B_0 \sin\Omega_{02} + \frac{a}{b}\sin\mathfrak{L}_0 \sec B_0 \cos\Omega_{02}),$$

$$\mathrm{B}_0 = \cos\mathfrak{B}_0(\sin\mathfrak{L}_0 \operatorname{tang} B_0 \sin\Omega_{02} - \frac{b}{a}\cos\mathfrak{L}_0 \sec B_0 \cos\Omega_{02}),$$

$$\mathrm{C}_0 = -\sin\mathfrak{B}_0 \cot B_0 \sin\Omega_{02},$$

$$\mathrm{D}_0 = \sec B_0 \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\sin(B_0+\mathfrak{B}_0)\sin(B_0-\mathfrak{B}_0)}{\sin B_0}\sin\Omega_{02} \\ + \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\sin\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{L}_0\cos\mathfrak{B}_0{}^2\cos\Omega_{02} \end{array} \right\};$$

und:

106)

$$\mathrm{A}_1 = \cos\mathfrak{B}_1(\cos\mathfrak{L}_1 \operatorname{tang} B_1 \sin\Omega_{12} + \frac{a}{b}\sin\mathfrak{L}_1 \sec B_1 \cos\Omega_{12}),$$

$$\mathrm{B}_1 = \cos\mathfrak{B}_1(\sin\mathfrak{L}_1 \operatorname{tang} B_1 \sin\Omega_{12} - \frac{b}{a}\cos\mathfrak{L}_1 \sec B_1 \cos\Omega_{12}),$$

$$\mathrm{C}_1 = -\sin\mathfrak{B}_1 \cot B_1 \sin\Omega_{12},$$

$$\mathrm{D}_1 = \sec B_1 \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\sin(B_1+\mathfrak{B}_1)\sin(B_1-\mathfrak{B}_1)}{\sin B_1}\sin\Omega_{12} \\ + \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}\right)\sin\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{L}_1\cos\mathfrak{B}_1{}^2\cos\Omega_{12} \end{array} \right\};$$

und für u, v respective $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{B}_2$ zu setzen.

Man berechne nun die Hülfsgrössen G_0, ω_0, $\overline{\omega}_0$ und G_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ mittelst der Formeln:

107)

$$\mathrm{A}_0 = G_0\cos\omega_0\cos\overline{\omega}_0, \quad \mathrm{B}_0 = G_0\sin\omega_0\cos\overline{\omega}_0, \quad \mathrm{C}_0 = G_0\sin\overline{\omega}_0;$$

$$\mathrm{A}_1 = G_1\cos\omega_1\cos\overline{\omega}_1, \quad \mathrm{B}_1 = G_1\sin\omega_1\cos\overline{\omega}_1, \quad \mathrm{C}_1 = G_1\sin\overline{\omega}_1;$$

wo G_0, G_1 positiv genommen werden, so ist:

$$\mathrm{A}_0{}^2 + \mathrm{B}_0{}^2 + \mathrm{C}_0{}^2 = G_0{}^2, \quad \mathrm{A}_1{}^2 + \mathrm{B}_1{}^2 + \mathrm{C}_1{}^2 = G_1{}^2;$$

$$\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1 + \mathrm{B}_0\mathrm{B}_1 + \mathrm{C}_0\mathrm{C}_1 = G_0G_1\{\sin\overline{\omega}_0\sin\overline{\omega}_1 + \cos(\omega_0-\omega_1)\cos\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1\};$$

oder, wenn wir, den Winkel θ_{01} zwischen 0 und 180° nehmend:

$$108)\quad \cos\theta_{01} = \sin\overline{\omega}_0\sin\overline{\omega}_1 + \cos(\omega_0-\omega_1)\cos\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1$$

setzen:

$$A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1=G_0G_1\cos\theta_{01};$$

folglich:

$$(A_0{}^2+B_0{}^2+C_0{}^2)(A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2)-(A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1)^2$$
$$=G_0{}^2G_1{}^2\sin\theta_{01}{}^2,$$

und daher nach dem Obigen:

$$\mathfrak{D}=G_0G_1\sin\theta_{01}.$$

Hieraus ergiebt sich ferner leicht:

$$A_0'=-G_0{}^2G_1(\cos\omega_1\cos\varpi_1-\cos\omega_0\cos\varpi_0\cos\theta_{01}),$$
$$B_0'=-G_0{}^2G_1(\sin\omega_1\cos\varpi_1-\sin\omega_0\cos\varpi_0\cos\theta_{01}),$$
$$C_0'=-G_0{}^2G_1(\sin\varpi_1-\sin\varpi_0\cos\theta_{01})$$

und:

$$A_1'=G_0G_1{}^2(\cos\omega_0\cos\varpi_0-\cos\omega_1\cos\varpi_1\cos\theta_{01}),$$
$$B_1'=G_0G_1{}^2(\sin\omega_0\cos\varpi_0-\sin\omega_1\cos\varpi_1\cos\theta_{01}),$$
$$C_1'=G_0G_1{}^2(\sin\varpi_0-\sin\varpi_1\cos\theta_{01}).$$

Eben so leicht erhält man:

$$A_0B_1-B_0A_1=-G_0G_1\sin(\omega_0-\omega_1)\cos\varpi_0\cos\varpi_1,$$
$$B_0C_1-C_0B_1=\quad G_0G_1(\sin\omega_0\cos\varpi_0\sin\varpi_1-\sin\omega_1\sin\varpi_0\cos\varpi_1),$$
$$C_0A_1-A_0C_1=-G_0G_1(\cos\omega_0\cos\varpi_0\sin\varpi_1-\cos\omega_1\sin\varpi_0\cos\varpi_1).$$

Folglich ist:

109)

$$A_{01}\sin\theta_{01}{}^2=\frac{D_0}{G_0}(\cos\omega_0\cos\varpi_0-\cos\omega_1\cos\varpi_1\cos\theta_{01})$$
$$+\frac{D_1}{G_1}(\cos\omega_1\cos\varpi_1-\cos\omega_0\cos\varpi_0\cos\theta_{01}),$$

$$B_{01}\sin\theta_{01}{}^2=\frac{D_0}{G_0}(\sin\omega_0\cos\varpi_0-\sin\omega_1\cos\varpi_1\cos\theta_{01})$$
$$+\frac{D_1}{G_1}(\sin\omega_1\cos\varpi_1-\sin\omega_0\cos\varpi_0\cos\theta_{01}),$$

$$C_{01}\sin\theta_{01}{}^2=\frac{D_0}{G_0}(\sin\varpi_0-\sin\varpi_1\cos\theta_{01})$$
$$+\frac{D_1}{G_1}(\sin\varpi_1-\sin\varpi_0\cos\theta_{01});$$

oder:

110)

$$A_{01}\sin\theta_{01}{}^2 = \cos\omega_0\cos\overline{\omega}_0\left(\frac{D_0}{G_0}-\frac{D_1}{G_1}\cos\theta_{01}\right) + \cos\omega_1\cos\overline{\omega}_1\left(\frac{D_1}{G_1}-\frac{D_0}{G_0}\cos\theta_{01}\right),$$

$$B_{01}\sin\theta_{01}{}^2 = \sin\omega_0\cos\overline{\omega}_0\left(\frac{D_0}{G_0}-\frac{D_1}{G_1}\cos\theta_{01}\right) + \sin\omega_1\cos\overline{\omega}_1\left(\frac{D_1}{G_1}-\frac{D_0}{G_0}\cos\theta_{01}\right),$$

$$C_{01}\sin\theta_{01}{}^2 = \sin\overline{\omega}_0\left(\frac{D_0}{G_0}-\frac{D_1}{G_1}\cos\theta_{01}\right) + \sin\overline{\omega}_1\left(\frac{D_1}{G_1}-\frac{D_0}{G_0}\cos\theta_{01}\right).$$

Nach 99) ist:

$$(A_{01}{}^2+B_{01}{}^2+C_{01}{}^2)\mathfrak{D}^4 = (A_1'^2+B_1'^2+C_1'^2)D_0{}^2 - 2(A_0'A_1'+B_0'B_1'+C_0'C_1')D_0D_1 + (A_0'^2+B_0'^2+C_0'^2)D_1{}^2,$$

und nach 96), 97), 98) ist, wie man leicht findet:

$$A_1'^2+B_1'^2+C_1'^2 = (A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2)\mathfrak{D}^2,$$

$$A_0'A_1'+B_0'B_1'+C_0'C_1' = (A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1)\mathfrak{D}^2,$$

$$A_0'^2+B_0'^2+C_0'^2 = (A_0{}^2+B_0{}^2+C_0{}^2)\mathfrak{D}^2;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$(A_{01}{}^2+B_{01}{}^2+C_{01}{}^2)\mathfrak{D}^2 = (A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2)D_0{}^2 - 2(A_0A_1+B_0B_1+C_0C_1)D_0D_1 + (A_0{}^2+B_0{}^2+C_0{}^2)D_1{}^2,$$

folglich:

$$(A_{01}{}^2+B_{01}{}^2+C_{01}{}^2)\sin\theta_{01}{}^2 = \left(\frac{D_0}{G_0}\right)^2 - 2\frac{D_0}{G_0}\cdot\frac{D_1}{G_1}\cos\theta_{01} + \left(\frac{D_1}{G_1}\right)^2$$

$$= \left(\frac{D_0}{G_0}-\frac{D_1}{G_1}\right)^2\cos\tfrac{1}{2}\theta_{01}{}^2 + \left(\frac{D_0}{G_0}+\frac{D_1}{G_1}\right)^2\sin\tfrac{1}{2}\theta_{01}{}^2,$$

also:

111)

$$A_{01}{}^2+B_{01}{}^2+C_{01}{}^2 = \tfrac{1}{4}\left\{\left(\frac{D_0}{G_0}-\frac{D_1}{G_1}\right)^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\theta_{01}{}^2 + \left(\frac{D_0}{G_0}+\frac{D_1}{G_1}\right)^2\sec\tfrac{1}{2}\theta_{01}{}^2\right\}.$$

Setzt man jetzt:

112) . . . . G_{01}

$$=\pm\operatorname{cosec}\theta_{01}\sqrt{1-\tfrac{1}{4}\left\{\left(\frac{D_0}{G_0}-\frac{D_1}{G_1}\right)^2\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\theta_{01}{}^2+\left(\frac{D_0}{G_0}+\frac{D_1}{G_1}\right)^2\sec\tfrac{1}{2}\theta_{01}{}^2\right\}},$$

so ist nach dem Obigen offenbar:

113)

$$\cos\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2=A_{01}+G_{01}(\sin\omega_0\cos\overline{\omega}_0\sin\overline{\omega}_1-\sin\omega_1\sin\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1),$$
$$\sin\mathfrak{L}_2\cos\mathfrak{B}_2=B_{01}-G_{01}(\cos\omega_0\cos\overline{\omega}_0\sin\overline{\omega}_1-\cos\omega_1\sin\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1),$$
$$\sin\mathfrak{B}_2=C_{01}-G_{01}\sin(\omega_0-\omega_1)\cos\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1;$$

also:

114)

$$\sin\mathfrak{B}_2=C_{01}-G_{01}\sin(\omega_0-\omega_1)\cos\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1,$$
$$\cos\mathfrak{L}_2=\frac{A_{01}+G_{01}(\sin\omega_0\cos\overline{\omega}_0\sin\overline{\omega}_1-\sin\omega_1\sin\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1)}{\cos\mathfrak{B}_2},$$
$$\sin\mathfrak{L}_2=\frac{B_{01}-G_{01}(\cos\omega_0\cos\overline{\omega}_0\sin\overline{\omega}_1-\cos\omega_1\sin\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1)}{\cos\mathfrak{B}_2}.$$

Durch die erste Formel wird das zwischen -90° und $+90^\circ$ liegende $\mathfrak{B}_2$ vollkommen bestimmt; und die beiden letzten Formeln bestimmen das zwischen 0 und 360° liegende $\mathfrak{L}_2$ gleichfalls vollständig; durch die Formel:

115)

$$\tan\mathfrak{L}_2=\frac{B_{01}-G_{01}(\cos\omega_0\cos\overline{\omega}_0\sin\overline{\omega}_1-\cos\omega_1\sin\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1)}{A_{01}+G_{01}(\sin\omega_0\cos\overline{\omega}_0\sin\overline{\omega}_1-\sin\omega_1\sin\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1)}$$

allein wird $\mathfrak{L}_2$ nicht vollständig bestimmt. Dass es wegen des doppelten Zeichens von G_{01} im Allgemeinen zwei Auflösungen giebt, liegt ganz in der Natur der Sache.

§. 21.

Wir wenden uns jetzt zu einigen Untersuchungen über die Winkel, welche bei geodätischen Operationen gemessen werden, woran sich dann späterhin noch einige allgemeine Bemerkungen über solche Operationen überhaupt anschliessen werden.

Zwei beliebige Punkte des Ellipsoids seien $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$. Die Gleichung der Berührungsebene oder des Horizonts in dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ ist:

$$116) \quad \frac{x_0}{a^2}(\mathfrak{x}-x_0)+\frac{y_0}{b^2}(\mathfrak{y}-y_0)+\frac{z_0}{c^2}(\mathfrak{z}-z_0)=0,$$

und die Gleichungen der Normale in dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ sind:

$$117) \quad \frac{\mathfrak{x}-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{\mathfrak{y}-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{\mathfrak{z}-z_1}{\frac{z_1}{c^2}}$$

oder, wenn wir:

$$118) \quad \left\{\begin{array}{l}
\cos\alpha_1=\pm\dfrac{\frac{x_1}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}}, \\[2ex]
\cos\beta_1=\pm\dfrac{\frac{y_1}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}}, \\[2ex]
\cos\gamma_1=\pm\dfrac{\frac{z_1}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}}
\end{array}\right.$$

setzen, wo die oberen und unteren Zeichen sich auf den ausserhalb und innerhalb des Ellipsoids liegenden Theil der Normale beziehen:

$$119) \quad \frac{\mathfrak{x}-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{\mathfrak{y}-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{\mathfrak{z}-z_1}{\cos\gamma_1}.$$

In dieser Normale nehmen wir nun einen beliebigen Punkt $(u_1v_1w_1)$ an, und bezeichnen dessen, jenachdem der Punkt $(u_1v_1w_1)$ in dem äusseren oder inneren Theile der Normale liegt, als positiv oder negativ betrachtete Entfernung von dem Punkte $(x_1y_1z_1)$ durch E_1; so ist offenbar, wenn wir von jetzt an die Winkel α_1, β_1, γ_1 nur auf den äusseren Theil der Normale beziehen, also:

120)

$$\cos\alpha_1=\frac{\frac{x_1}{a^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}},\quad \cos\beta_1=\frac{\frac{y_1}{b^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}},$$

$$\cos\gamma_1=\frac{\frac{z_1}{c^2}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}}$$

setzen, in völliger Allgemeinheit:

$$121)\quad u_1 = x_1 + E_1 \cos\alpha_1, \quad v_1 = y_1 + E_1 \cos\beta_1, \quad w_1 = z_1 + E_1 \cos\gamma_1.$$

Von dem Punkte $(u_1 v_1 w_1)$ fällen wir auf die Berührungsebene im Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ ein Perpendikel, und bezeichnen dessen Fusspunkt, nämlich die Projection des Punktes $(u_1 v_1 w_1)$ auf der in Rede stehenden Berührungsebene, durch $(u_1' v_1' w_1')$; die Gleichungen dieses Perpendikels haben die Form:

$$122) \quad \frac{\mathfrak{x} - u_1}{\cos\varphi_1} = \frac{\mathfrak{y} - v_1}{\cos\psi_1} = \frac{\mathfrak{z} - w_1}{\cos\chi_1};$$

wo nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$123) \quad \cos\varphi_1 = G_0 \frac{x_0}{a^2}, \quad \cos\psi_1 = G_0 \frac{y_0}{b^2}, \quad \cos\chi_1 = G_0 \frac{z_0}{c^2};$$

also:

$$124) \quad G_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}}$$

ist; die Gleichungen 122) sind:

$$125) \quad \frac{\mathfrak{x} - u_1}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{\mathfrak{y} - v_1}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{\mathfrak{z} - w_1}{\frac{z_0}{c^2}},$$

und zur Bestimmung von u_1', v_1', w_1' haben wir nun die Gleichungen:

$$\frac{x_0}{a^2}(u_1' - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(v_1' - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(w_1' - z_0) = 0,$$

$$\frac{u_1' - u_1}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{v_1' - v_1}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{w_1' - w_1}{\frac{z_0}{c^2}} = G_1;$$

also:

$$126) \quad u_1' = u_1 + G_1 \frac{x_0}{a^2}, \quad v_1' = v_1 + G_1 \frac{y_0}{b^2}, \quad w_1' = w_1 + G_1 \frac{z_0}{c^2};$$

und folglich:

$$\frac{x_0}{a^2}\left(u_1 - x_0 + G_1 \frac{x_0}{a^2}\right) + \frac{y_0}{b^2}\left(v_1 - y_0 + G_1 \frac{y_0}{b^2}\right) + \frac{z_0}{c^2}\left(w_1 - z_0 + G_1 \frac{z_0}{c^2}\right) = 0,$$

woraus sich:

$$127) \qquad G_1 = -\frac{\frac{x_0(u_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(v_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(w_1-z_0)}{c^2}}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}$$

ergiebt, oder nach 121):

$$128) \ldots\ldots\ldots \quad G_1 =$$

$$-\frac{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}+E_1\left(\frac{x_0}{a^2}\cos\alpha_1+\frac{y_0}{b^2}\cos\beta_1+\frac{z_0}{c^2}\cos\gamma_1\right)}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}.$$

Die Formeln 126) können auch auf folgende Art geschrieben werden:

$$129) \ldots\ldots \begin{cases} u_1' = x_1 + E_1\cos\alpha_1 + G_1\frac{x_0}{a^2}, \\ v_1' = y_1 + E_1\cos\beta_1 + G_1\frac{y_0}{b^2}, \\ w_1' = z_1 + E_1\cos\gamma_1 + G_1\frac{z_0}{c^2}; \end{cases}$$

und gewähren in dieser Form die leichteste Bestimmung der Coordinaten u_1', v_1', w_1' der Projection des Punktes $(u_1v_1w_1)$ auf der das Ellipsoid in dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ berührenden Ebene.

Die Gleichungen der Normale in dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ sind:

$$130) \ldots\ldots\ldots \frac{\mathfrak{x}-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{\mathfrak{y}-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{\mathfrak{z}-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}.$$

Durch diese Normale und den Punkt $(x_1y_1z_1)$ legen wir eine Ebene, deren Gleichung:

$$131) \ldots A_0(\mathfrak{x}-x_0)+B_0(\mathfrak{y}-y_0)+C_0(\mathfrak{z}-z_0)=0$$

sein mag; so ist:

$$\frac{x_0}{a^2}A_0+\frac{y_0}{b^2}B_0+\frac{z_0}{c^2}C_0=0,$$

$$A_0(x_1-x_0)+B_0(y_1-y_0)+C_0(z_1-z_0)=0;$$

woraus sich:

132)

$$A_0=\frac{y_0}{b^2}(z_1-z_0)-\frac{z_0}{c^2}(y_1-y_0),\quad B_0=\frac{z_0}{c^2}(x_1-x_0)-\frac{x_0}{a^2}(z_1-z_0),$$

$$C_0=\frac{x_0}{a^2}(y_1-y_0)-\frac{y_0}{b^2}(x_1-x_0)$$

ergiebt. Die Gleichungen der Durchschnittslinie dieser Ebene mit der Berührugsebene in $(x_0 y_0 z_0)$ seien:

$$\frac{\mathfrak{x}-x_0}{\cos\varphi_0}=\frac{\mathfrak{y}-y_0}{\cos\psi_0}=\frac{\mathfrak{z}-z_0}{\cos\chi_0},$$

wo sich φ_0, ψ_0, χ_0 auf den durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ gehenden Theil der in Rede stehenden Ebene beziehen mögen; so ist:

$$\frac{x_0}{a^2}\cos\varphi_0+\frac{y_0}{b^2}\cos\psi_0+\frac{z_0}{c^2}\cos\chi_0=0,$$

$$A_0\cos\varphi_0+B_0\cos\psi_0+C_0\cos\chi_0=0;$$

also:

$$133)\quad\ldots\quad\begin{cases}\cos\varphi_0=G_0'\left(\frac{y_0}{b^2}C_0-\frac{z_0}{c^2}B_0\right),\\[2ex] \cos\psi_0=G_0'\left(\frac{z_0}{c^2}A_0-\frac{x_0}{a^2}C_0\right),\\[2ex] \cos\chi_0=G_0'\left(\frac{x_0}{a^2}B_0-\frac{y_0}{b^2}A_0\right).\end{cases}$$

Nach 132) ist aber, wie man leicht findet, wenn der Kürze wegen:

134)

$$X_{01}=(x_1-x_0)\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}$$
$$-\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}\right\}\frac{x_0}{a^2},$$

$$Y_{01}=(y_1-y_0)\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}$$
$$-\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}\right\}\frac{y_0}{b^2},$$

$$Z_{01}=(z_1-z_0)\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}$$
$$-\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}\right\}\frac{z_0}{c^2}$$

gesetzt wird:

$$\frac{y_0}{b^2}C_0-\frac{z_0}{c^2}B_0=-X_{01},$$

$$\frac{z_0}{c^2}A_0-\frac{x_0}{a^2}C_0=-Y_{01},$$

$$\frac{x_0}{a^2}B_0-\frac{y_0}{b^2}A_0=-Z_{01};$$

also:

135)

$$\cos\varphi_0 = -G_0' X_{01}, \quad \cos\psi_0 = -G_0' Y_{01}, \quad \cos\chi_{01} = -G_0' Z_{01};$$

folglich:

$$136) \; \ldots \; G_0' = \mp \frac{1}{\sqrt{X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2}},$$

und demnach:

$$137) \; \ldots \; \begin{cases} \cos\varphi_0 = \pm \dfrac{X_{01}}{\sqrt{X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2}}, \\ \cos\psi_0 = \pm \dfrac{Y_{01}}{\sqrt{X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2}}, \\ \cos\chi_0 = \pm \dfrac{Z_{01}}{\sqrt{X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2}}; \end{cases}$$

wo, wie man leicht findet, wenn der Kürze wegen:

$$138) \; \ldots \; E_{01} = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}$$

gesetzt wird:

$$139) \; \ldots \; X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2$$

$$= \left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}\left\{E_{01}^2\left[\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right]\right.$$
$$\left. - \left[\frac{x_0(x_1 - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y_1 - y_0)}{b^2} + \frac{z_0(z_1 - z_0)}{c^2}\right]^2\right\}$$

ist.

Bezeichnen wir die Bestimmungswinkel der von dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ nach der Projection $(u_1' v_1' w_1')$ des Punktes $(u_1 v_1 w_1)$ gezogenen Geraden durch φ_0', ψ_0', χ_0'; und setzen der Kürze wegen:

$$140) \; \ldots \; E_{01}' = \sqrt{(u_1' - x_0)^2 + (v_1' - y_0)^2 + (w_1' - z_0)};$$

so ist:

$$\cos\varphi_0' = \frac{u_1' - x_0}{E_{01}'}, \quad \cos\psi_0' = \frac{v_1' - y_0}{E_{01}'}, \quad \cos\chi_0' = \frac{w_1' - z_0}{E_{01}'};$$

also, weil nach 128), 129), 134), wenn der Kürze wegen noch:

$$141)\quad \begin{cases} X_{01}'=\cos\alpha_1-\dfrac{\dfrac{x_0}{a^2}\left(\dfrac{x_0}{a^2}\cos\alpha_1+\dfrac{y_0}{b^2}\cos\beta_1+\dfrac{z_0}{c^2}\cos\gamma_1\right)}{\left(\dfrac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\dfrac{z_0}{c^2}\right)^2}, \\ Y_{01}'=\cos\beta_1-\dfrac{\dfrac{y_0}{b^2}\left(\dfrac{x_0}{a^2}\cos\alpha_1+\dfrac{y_0}{b^2}\cos\beta_1+\dfrac{z_0}{c^2}\cos\gamma_1\right)}{\left(\dfrac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\dfrac{z_0}{c^2}\right)^2}, \\ Z_{01}'=\cos\gamma_1-\dfrac{\dfrac{z_0}{c^2}\left(\dfrac{x_0}{a^2}\cos\alpha_1+\dfrac{y_0}{b^2}\cos\beta_1+\dfrac{z_0}{c^2}\cos\gamma_1\right)}{\left(\dfrac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\dfrac{z_0}{c^2}\right)^2} \end{cases}$$

gesetzt wird:

$$u_1'-x_0=\frac{X_{01}}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}+E_1X_{01}',$$

$$v_1'-y_0=\frac{Y_{01}}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}+E_1Y_{01}',$$

$$w_1'-z_0=\frac{Z_{01}}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}+E_1Z_{01}'$$

ist:

$$142)\quad \begin{cases} \cos\varphi_0'=\dfrac{X_{01}}{\left\{\left(\dfrac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\dfrac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}E_{01}'}-\dfrac{E_1}{E_{01}'}X_{01}', \\ \cos\psi_0'=\dfrac{Y_{01}}{\left\{\left(\dfrac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\dfrac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}E_{01}'}-\dfrac{E_1}{E_{01}'}Y_{01}', \\ \cos\chi_0'=\dfrac{Z_{01}}{\left\{\left(\dfrac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\dfrac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\dfrac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}E_{01}'}-\dfrac{E_1}{E_{01}'}Z_{01}'. \end{cases}$$

Bezeichnen wir jetzt den Winkel, welchen die beiden durch die Winkel φ_0, ψ_0, χ_0 und φ_0', ψ_0', χ_0' bestimmten Geraden mit einander einschliessen, durch W_{01}; so ist bekanntlich:

$$\begin{aligned}\sin W_{01}{}^2 = &\ (\cos\varphi_0\cos\psi_0'-\cos\psi_0\cos\varphi_0')^2 \\ &+(\cos\psi_0\cos\chi_0'-\cos\chi_0\cos\psi_0')^2 \\ &+(\cos\chi_0\cos\varphi_0'-\cos\varphi_0\cos\chi_0')^2,\end{aligned}$$

also nach 137) und 142) offenbar:

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2$$

$$=\frac{(X_{01}Y_{01}'-Y_{01}X_{01}')^2+(Y_{01}Z_{01}'-Z_{01}Y_{01}')^2+(Z_{01}X_{01}'-X_{01}Z_{01}')^2}{X_{01}{}^2+Y_{01}{}^2+Z_{01}{}^2},$$

oder:

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2=(Y_{01}'\cos\varphi_0-X_{01}'\cos\psi_0)^2$$

$$+(Z_{01}'\cos\psi_0-Y_{01}'\cos\chi_0)^2+(X_{01}'\cos\chi_0-Z_{01}'\cos\varphi_0)^2,$$

und folglich, weil

$$\frac{x_0}{a^2}\cos\varphi_0+\frac{y_0}{b^2}\cos\psi_0+\frac{z_0}{c^2}\cos\chi_0=0,$$

also nach 141):

$$X_{01}'\cos\varphi_0+Y_{01}'\cos\psi_0+Z_{01}'\cos\chi_0$$

$$=\cos\alpha_1\cos\varphi_0+\cos\beta_1\cos\psi_0+\cos\gamma_1\cos\chi_0$$

ist, nach einer bekannten algebraischen Relation:

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2$$

$$=X_{01}'^2+Y_{01}'^2+Z_{01}'^2-(\cos\alpha_1\cos\varphi_0+\cos\beta_1\cos\psi_0+\cos\gamma_1\cos\chi_0)^2,$$

woraus sich nach 141) ferner leicht:

143)

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2=1-\frac{\left(\frac{x_0}{a^2}\cos\alpha_1+\frac{y_0}{b^2}\cos\beta_1+\frac{z_0}{c^2}\cos\gamma_1\right)^2}{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2}$$

$$-(\cos\alpha_1\cos\varphi_0+\cos\beta_1\cos\psi_0+\cos\gamma_1\cos\chi_0)^2,$$

oder nach 120):

144) . . . . $$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2$$

$$=1-\frac{\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)^2}{\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}}$$

$$-(\cos\alpha_1\cos\varphi_0+\cos\beta_1\cos\psi_0+\cos\gamma_1\cos\chi_0)^2$$

ergiebt.

Nach 120) und 137) ist:

145) . . . . $\cos\alpha_1\cos\varphi_0+\cos\beta_1\cos\psi_0+\cos\gamma_1\cos\chi_0$

$$=\pm\frac{\frac{x_1}{a^2}X_{01}+\frac{y_1}{b^2}Y_{01}+\frac{z_1}{c^2}Z_{01}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2}\cdot\sqrt{X_{01}{}^2+Y_{01}{}^2+Z_{01}{}^2}},$$

wo nach 134):

146) . . . . $\frac{x_1}{a^2}X_{01}+\frac{y_1}{b^2}Y_{01}+\frac{z_1}{c^2}Z_{01}$

$$=\left\{\frac{x_1(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_1(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_1(z_1-z_0)}{c^2}\right\}\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}\right\}\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)$$

und:

147) . . . . $X_{01}{}^2+Y_{01}{}^2+Z_{01}{}^2$

$$=\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}\left\{E_{01}{}^2\left[\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}\right]^2\right\}$$

ist.

Für die Kugel, nämlich für $a=b=c=r$ ist:

$$1-\frac{\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)^2}{\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}}$$

$$=1-\frac{(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2}{(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2)(x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2)}=\frac{r^4-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2}{r^4}.$$

Ferner ist:

$$\frac{x_1}{a^2}X_{01}+\frac{y_1}{b^2}Y_{01}+\frac{z_1}{c^2}Z_{01}=\frac{r^4-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2}{r^6},$$

und, weil

$$E_{01}{}^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2=2\{r^2-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)\}$$

ist, wie man leicht findet:

$$X_{01}^2 + Y_{01}^2 + Z_{01}^2$$

$$= \frac{1}{r^2}\left\{\frac{2[r^2-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)]}{r^2} - \left[\frac{r^2-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)}{r^2}\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{r^2-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)}{r^2}\cdot\frac{r^2+(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)}{r^2}$$

$$= \frac{r^4-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2}{r^6},$$

also offenbar:

$$(\cos\alpha_1\cos\varphi_0 + \cos\beta_1\cos\psi_0 + \cos\gamma_1\cos\chi_0)^2$$

$$= \frac{r^4-(x_0x_1+y_0y_1+z_0z_1)^2}{r^4}.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2 = 0, \quad \sin W_{01} = 0;$$

wie es im Falle der Kugel sein muss.

Es ist bemerkenswerth, dass der für

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2$$

oben gefundene Ausdruck 144) gar nicht von den Coordinaten u_1, v_1, w_1, sondern bloss von x_0, y_0, z_0 und x_1, y_1, z_1; also bloss von der Lage der Punkte $(x_0y_0z_0)$ und $(x_1y_1z_1)$ auf dem Ellipsoid abhängt.

§. 22.

Dem im vorhergehenden Paragraphen entwickelten Ausdrucke von

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2$$

wollen wir jetzt eine andere Form geben.

Nach einem bekannten Satze ist:

$$\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1}{c^2}\right)^2\right\}$$

$$-\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)^2$$

$$=\left(\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{y_1}{b^2}-\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{x_1}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{z_1}{c^2}-\frac{z_0}{c^2}\cdot\frac{y_1}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\cdot\frac{x_1}{a^2}-\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{z_1}{c^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{y_1-y_0}{b^2}-\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{x_1-x_0}{a^2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{y_0}{b^2}\cdot\frac{z_1-z_0}{c^2}-\frac{z_0}{c^2}\cdot\frac{y_1-y_0}{b^2}\right)^2$$

$$+\left(\frac{z_0}{c^2}\cdot\frac{x_1-x_0}{a^2}-\frac{x_0}{a^2}\cdot\frac{z_1-z_0}{c^2}\right)^2$$

$$=\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x_1-x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_0}{c^2}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^4}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^4}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^4}\right\}^2.$$

Ferner ist:

$$\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}$$

$$=\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2+\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^4}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^4}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^4},$$

also:

$$\left\{\frac{x_1(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_1(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_1(z_1-z_0)}{c^2}\right\}\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}\right\}\left(\frac{x_0x_1}{a^4}+\frac{y_0y_1}{b^4}+\frac{z_0z_1}{c^4}\right)$$

$$=\left\{\left(\frac{x_1-x_0}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{b}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_0}{c}\right)^2\right\}\left\{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2+\left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2+\left(\frac{z_0}{c^2}\right)^2\right\}$$

$$-\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^2}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^2}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^2}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{x_0(x_1-x_0)}{a^4}+\frac{y_0(y_1-y_0)}{b^4}+\frac{z_0(z_1-z_0)}{c^4}\right\}.$$

Setzen wir nun:

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2=\frac{U}{V}-\frac{U'^2}{V'^2},$$

wo die Bedeutung von U, V und U', V' aus den Gleichungen des vorhergehenden Paragraphen von selbst erhellen wird, und führen der Kürze wegen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$A_0=\left(\frac{c}{a}\right)^4\left(\frac{x_0}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\left(\frac{y_0}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{c}\right)^4\left(\frac{z_0}{c}\right)^2,$$

$$A_1=\left(\frac{c}{a}\right)^4\left(\frac{x_1}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\left(\frac{y_1}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{c}\right)^4\left(\frac{z_1}{c}\right)^2;$$

$$B=\left(\frac{c}{a}\right)^4\left(\frac{x_1-x_0}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^4\left(\frac{y_1-y_0}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{c}\right)^4\left(\frac{z_1-z_0}{c}\right)^2,$$

$$C=\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{x_1-x_0}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2\left(\frac{y_1-y_0}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{c}\right)^2\left(\frac{z_1-z_0}{c}\right)^2;$$

$$B_1=\left(\frac{c}{a}\right)^4\cdot\frac{x_0}{c}\cdot\frac{x_1-x_0}{c}+\left(\frac{c}{b}\right)^4\cdot\frac{y_0}{c}\cdot\frac{y_1-y_0}{c}+\left(\frac{c}{c}\right)^4\cdot\frac{z_0}{c}\cdot\frac{z_1-z_0}{c},$$

$$C_1=\left(\frac{c}{a}\right)^2\cdot\frac{x_0}{c}\cdot\frac{x_1-x_0}{c}+\left(\frac{c}{b}\right)^2\cdot\frac{y_0}{c}\cdot\frac{y_1-y_0}{c}+\left(\frac{c}{c}\right)^2\cdot\frac{z_0}{c}\cdot\frac{z_1-z_0}{c};$$

$$D=\left(\frac{x_1-x_0}{c}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_0}{c}\right)^2+\left(\frac{z_1-z_0}{c}\right)^2;$$

so ist, wie man leicht findet:

$$c^4U=U_1=A_0B-B_1B_1,$$
$$c^4V=V_1=A_0A_1;$$
$$c^2U'=U_1'=A_0C-B_1C_1,$$
$$c^4V'^2=V_1'^2=A_0A_1(A_0D-C_1C_1);$$

und daher nach dem Obigen:

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2=\frac{U_1}{V_1}-\frac{U_1'^2}{V_1'^2},$$

wo in Bezug auf die Grössen:

$$\frac{x_1-x_0}{c},\quad\frac{y_1-y_0}{c},\quad\frac{z_1-z_0}{c}$$

die Grössen:

$$U_1,\ V_1;\quad U_1'^2,\ V_1'^2$$

respective von der

2ten, 0ten; 4ten, 2ten

Ordnung sind, so dass also in Bezug auf dieselben Grössen

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}'\right)^2$$

von der zweiten Ordnung ist.

Denken wir uns nun in den vorstehenden Formeln überall:

$$\frac{c}{a} = 1-(1-\frac{c}{a}),$$

$$\frac{c}{b} = 1-(1-\frac{c}{b}),$$

$$\frac{c}{c} = 1-(1-\frac{c}{c})$$

gesetzt, und alle Grössen nach Potenzen und Producten von

$$1-\frac{c}{a},\quad 1-\frac{c}{b},\quad 1-\frac{c}{c}$$

entwickelt; so wird man offenbar setzen können:

$$U_1 \;= P_2 + P_3,$$
$$V_1 \;= P_0' + P_1';$$

$$U_1'^2 = Q_4 + Q_5,$$
$$V_1'^2 = Q_2' + Q_3';$$

wo die Grössen

$$P_2,\; P_0';\quad Q_4,\; Q_2'$$

von

$$1-\frac{c}{a},\quad 1-\frac{c}{b},\quad 1-\frac{c}{c}$$

nicht abhängen, und in Bezug auf

$$\frac{x_1-x_0}{c},\quad \frac{y_1-y_0}{c},\quad \frac{z_1-z_0}{c}$$

respective von der

2ten, 0ten; 4ten, 2ten

Ordnung sind; die Grössen

$$P_3,\; P_1';\quad Q_5,\; Q_3'$$

sind dagegen in Bezug auf die Grössen

$$\frac{x_1-x_0}{c},\quad \frac{y_1-y_0}{c},\quad \frac{z_1-z_0}{c};\quad 1-\frac{c}{a},\quad 1-\frac{c}{b},\quad 1-\frac{c}{c}$$

respective von der

3ten, 1ten; 5ten, 3ten

Ordnung. Nach dem Obigen ist:

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2=\frac{P_2+P_3}{P_0'+P_1'}-\frac{Q_4+Q_5}{Q_2'+Q_3'}$$

$$=\frac{P_2}{P_0'}-\frac{Q_4}{Q_2'}+\frac{P_0'P_3-P_1'P_2}{P_0'(P_0'+P_1')}-\frac{Q_2'Q_5-Q_3'Q_4}{Q_2'(Q_2'+Q_3')},$$

wo aber nach dem Obigen und dem vorhergehenden Paragraphen offenbar:

$$\frac{P_2}{P_0'}-\frac{Q_4}{Q_2'}=0,$$

also:

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2=\frac{P_0'P_3-P_1'P_2}{P_0'(P_0'+P_1')}-\frac{Q_2'Q_5-Q_3'Q_4}{Q_2'(Q_2'+Q_3')},$$

und daher

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2$$

in Bezug auf

$$\frac{x_1-x_0}{c},\quad \frac{y_1-y_0}{c},\quad \frac{z_1-z_0}{c};\quad 1-\frac{c}{a},\quad 1-\frac{c}{b},\quad 1-\frac{c}{c}$$

offenbar eine Grösse der dritten Ordnung ist. Bezeichnen wir diese Grösse durch S_3, so ist also:

$$\left(\frac{E_{01}'}{E_1}\sin W_{01}\right)^2=S_3,\quad \sin W_{01}{}^2=\left(\frac{E_1}{E_{01}'}\right)^2.S_3.$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Punktes $(u_1v_1w_1)$ von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ durch $\mathfrak{E}_{01}$, und den Neigungswinkel der von $(x_0y_0z_0)$ nach $(u_1v_1w_1)$ gezogenen Geraden gegen die Berührungsebene in dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ oder den Horizont von $(x_0y_0z_0)$ durch i; so ist offenbar:

$$E_{01}'=\mathfrak{E}_{01}.\cos i,\quad \frac{E_1}{E_{01}'}=\frac{E_1}{\mathfrak{E}_{01}}\sec i;$$

also:

$$148)\ \ldots\ldots\ \sin W_{01}{}^2=\left(\frac{E_1}{\mathfrak{E}_{01}}\right)^2.S_3\sec i.$$

Weil

$$\cos W_{01} = 1 - 2\sin\tfrac{1}{2}W_{01}{}^2$$

ist, und, wenn W_{01} sehr klein ist, näherungsweise

$$\sin\tfrac{1}{2}W_{01} = \tfrac{1}{2}\sin W_{01}, \quad \sin\tfrac{1}{2}W_{01}{}^2 = \left(\frac{E_1}{2\mathfrak{E}_{01}}\right)^2.S_3\sec i$$

gesetzt werden kann; so ist:

$$149) \quad \ldots \quad \cos W_{01} = 1 - 2\left(\frac{E_1}{2\mathfrak{E}_{01}}\right)^2.S_3\sec i,$$

woraus man sieht, dass der Cosinus von W_{01} von der Einheit nur um eine Grösse unterschieden ist, welche in Bezug auf die Grössen:

$$\frac{E_1}{2\mathfrak{E}_{01}}; \quad \frac{x_1-x_0}{c}, \quad \frac{y_1-y_0}{c}, \quad \frac{z_1-z_0}{c}; \quad 1-\frac{c}{a}, \quad 1-\frac{c}{b}, \quad 1-\frac{c}{c}$$

von der **fünften** Ordnung ist.

Ich habe hier diesen Satz, welchen ich für wichtig halte, in aller Strenge für das allgemeine dreiaxige Ellipsoid zu beweisen gesucht, und alle Formeln im Obigen so weit entwickelt, dass alle Fragen, die sich bei diesem Gegenstande noch darbieten könnten, die ich aber der Kürze wegen jetzt hier unerörtert lasse, ohne Schwierigkeit beantwortet werden können.

§. 23.

Schlussbemerkung.

Aus dem im vorhergehenden Paragraphen bewiesenen Satze erhellet unmittelbar Folgendes.

Wenn $(x_0y_0z_0)$, $(x_1y_1z_1)$, $(x_2y_2z_2)$ drei Punkte auf der Oberfläche eines beliebigen Ellipsoids sind, welche wir der Kürze wegen durch A_0, A_1, A_2 bezeichnen wollen, und in dem Punkte A_0 der Winkel $\overline{A_1A_0A_2}$ geodätisch, d. h. nach dem bei geodätischen Operationen gebräuchlichen, aus der Geodäsie allgemein bekannten Verfahren, gemessen wird; so ist dieser geodätisch gemessene Winkel von dem Winkel, welchen die beiden von der Normale des Punktes A_0 ausgehenden und durch die Punkte A_1, A_2 gelegten Ebenen mit einander einschliessen, oder dieser Winkel von jenem geodätisch gemessenen Winkel $\overline{A_1A_0A_2}$, unter der Voraussetzung, dass die Grössen:

$$1-\frac{c}{a},\quad 1-\frac{c}{b},\quad 1-\frac{c}{c};$$

$$\frac{E_1}{2\mathfrak{E}_{01}};\quad \frac{x_1-x_0}{c},\quad \frac{y_1-y_0}{c},\quad \frac{z_1-z_0}{c};$$

$$\frac{E_2}{2\mathfrak{E}_{02}};\quad \frac{x_2-x_0}{c},\quad \frac{y_2-y_0}{c},\quad \frac{z_2-z_0}{c}$$

der Null sehr nahe kommen, so dass also namentlich auch die Lage der Punkte A_1, A_2 von der Lage des Punktes A_0 auf dem Ellipsoid verhältnissmässig nur sehr wenig verschieden ist, nur um Grössen unterschieden, die so klein sind, dass sie sich auch bei geodätischen Operationen, die gewöhnlich grosse genannt werden, ohne merklichen Fehler werden vernachlässigen lassen. Dies berechtigt uns, die folgende Definition aufzustellen:

Erklärung.

Der, wenn A_0, A_1, A_2 drei Punkte auf der Oberfläche eines beliebigen Ellipsoids sind, in dem Punkte A_0 geodätisch gemessene Winkel $\overline{A_1A_0A_2}$ ist der Winkel, welchen die beiden von der Normale des Punktes A_0 ausgehenden, durch die Punkte A_1, A_2 gelegten Ebenen mit einander einschliessen.

Dieser letztere Winkel soll daher auch im Folgenden immer nur unter dem Winkel $\overline{A_1A_0A_2}$ verstanden werden.

Bei jeder geodätischen Operation muss man, theoretisch genommen, von zwei ihrer Lage auf dem Ellipsoid nach gegebenen Punkten A_0, A_1 ausgehen, welche die Grundlage der ganzen Messung bilden. Nach den im Obigen (§. 17. und §. 19.) entwickelten Formeln kann man dann die Azimuthe in A_0 nach A_1 und in A_1 nach A_0, welche wir respective durch Ω_{01} und Ω_{10} bezeichnen wollen, ohne alle Zweideutigkeit berechnen. Wenn nun A_2 ein dritter Punkt des Ellipsoids ist, so wird man sich, um dessen Lage zu bestimmen, nach A_0 und A_1 begeben, und in diesen Punkten die beiden Winkel $\overline{A_1A_0A_2}$ und $\overline{A_0A_1A_2}$ messen, aus denen sich dann, wie sogleich in die Augen fällt, mittelst der bekannten Azimuthe Ω_{01} und Ω_{10} die Azimuthe in A_0 nach A_2 und in A_1 nach A_2, die wir respective durch Ω_{02} und Ω_{12} bezeichnen wollen, leicht herleiten lassen, wodurch wir nun zur Kenntniss aller Data gelangt sind, deren wir bedürfen, um mittelst der in §. 20. entwickelten Formeln die Lage des Punktes A_2 auf

dem Ellipsoid bestimmen zu können. Dass man aber hierauf ferner von den jetzt bekannten Punkten A_0, A_2 und A_1, A_2 ganz auf dieselbe Weise, wie vorher von A_0 und A_1, ausgehen kann, um darauf die Bestimmung der Lage neuer Punkte zu gründen, versteht sich von selbst und bedarf einer weiteren Erläuterung nicht.

Hiedurch ist die ganze Geodäsie in ihrem geometrischen Theile vollständig erledigt, wobei ich nur bitte, den Zweck der vorliegenden Abhandlung, welcher zunächst ein durchaus theoretischer ist, stets vor Augen zu behalten und denselben nicht zu übersehen. Ich bin aber der Meinung, dass derjenige, welcher eine Wissenschaft von praktischer Natur studirt, sich vor allen Dingen eine ganz strenge, zugleich möglichst allgemein gehaltene theoretische Kenntniss derselben verschaffen muss, von einem Standpunkte aus, der hoch genug ist, um mit freiem Blick die ganze Wissenschaft in ihrer Totalität überschauen zu können. Das Weitere wird sich hieran in allen Fällen dann schon ohne Schwierigkeit anschliessen lassen.

Eine sich jetzt von selbst aufdrängende Frage ist nun aber die, wie man sich die Kenntniss der Lage der beiden vorher durch A_0 und A_1 bezeichneten Punkte, auf welche die ganze geodätische Messung im Allgemeinen zu gründen ist, zu verschaffen hat. Die Beantwortung dieser Frage, welche wenigstens zum Theil gar nicht in das Gebiet der Geodäsie, sondern in das der Astronomie gehört, liegt jedoch für jetzt nicht im Zwecke dieser Abhandlung. Entweder kann man die Lage beider Punkte A_0 und A_1 astronomisch bestimmen, oder, was das gewöhnlichere Verfahren ist, die Lage des einen astronomisch ermitteln und daraus die Lage des anderen durch gewisse, wenigstens theilweise geodätische Operationen ableiten, was weiter zu erläutern jetzt aber gleichfalls nicht in meiner Absicht liegt, wenn auch die dazu erforderlichen theoretischen Grundlagen sich ganz aus der vorliegenden Abhandlung entnehmen lassen würden*).

Zum Schluss will ich endlich nur noch ganz in der Kürze bemerken, dass, wenn man bei geodätischen Operationen die Erde wirklich als ein allgemeines dreiaxiges Ellipsoid betrachten wollte, daraus noch verschiedene, von mir keineswegs übersehene und unbeachtet gelassene praktische Schwierigkeiten entstehen würden, welche, um theoretisch zu sprechen, darin ihren hauptsächlichsten Grund haben, dass bei dem Rotations-Ellipsoid die Lage der beiden auf einander senkrechten Axen der

---

*) M. s. die Note auf S. 330.

x und y in der auf der Rotations-Axe im Mittelpunkte des Ellipsoids senkrecht stehenden Ebene eine an sich ganz willkührliche ist, wogegen in der im Obigen überall zu Grunde liegenden Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

des allgemeinen dreiaxigen Ellipsoids die Lage der drei Axen eine ganz bestimmte ist, über die sich in keiner Weise willkührlich verfügen lässt. Das Weitere hierüber gehört aber nicht in diese vorzugsweise einen allgemeinen theoretischen Zweck verfolgende, und aus diesem Gesichtspunkte zunächst zu beurtheilende Abhandlung, in der ich namentlich die verschiedenen merkwürdigen analytischen Ausdrücke und allgemeinen Sätze, besonders auch im Betreff der grössten und kleinsten Krümmungshalbmesser, der arithmetischen Mittel zwischen allen Krümmungshalbmessern und allen reciproken Krümmungshalbmessern der Normalschnitte, der Entwickelung und Feststellung des eigentlichen Begriffs eines geodätisch gemessenen Winkels, u. s. w. nicht unbeachtet zu lassen bitte.

XXII.

Ueber bestimmte Integrale.

(Fortsetzung von Thl. XXXIX. Nr. XXX.)

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger,*

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

IV.

§. 46.

In der folgenden Untersuchung gehen wir von folgenden zwei bekannten Sätzen aus:

1)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}} \lg x\,\partial x$$

$$=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}\partial x \int_0^1 \frac{x^{m-1}(x^q-1)\partial x}{1-x^r},$$

2)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^p)^n \partial x = \frac{1^{\frac{m}{p}|1} . 1^{n|1}}{m . 1^{\frac{m}{p}+n|1}}.$$

Den ersten hat Euler (Integr. Rechn. Bd. IV. S. 162) aufgestellt. Der zweite lässt sich leicht durch die bekannte Integrationsmethode entwickeln und findet sich unter andern auch in

meiner Theorie der analytischen Fakultäten §. 33. S. 170. Er ist hier in der Form aufgestellt, die sich am bequemsten zur Anwendung eignet.

Setzt man r statt p und $\frac{q-r}{r}$ statt n in Nr. 2) und führt diess in Nr. 1) ein, so erhält man:

3)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}} \lg x \partial x = -\frac{1^{\frac{m}{r}|1} . 1^{\frac{q-r}{r}|1}}{m . 1^{\frac{m}{r}+\frac{q-r}{r}|1}} \int_0^1 \frac{x^{m-1}(x^q-1)\partial x}{x^r-1}.$$

Die Grössen m, q und r sind von einander unabhängig. Bringt man sie in bestimmten Zusammenhang, so führen sie zu einer Reihe neuer Sätze und Anwendungen. Die Gleichung Nr. 3) lässt sich in eine zur Anwendung bequemere Form bringen. Schreibt man $rm+p$ statt m, so geht sie in folgende über:

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{1^{m+\frac{p}{r}|1} . 1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p) . 1^{m+\frac{p+q-r}{r}|1}} \int_0^1 \frac{x^{rm+p-1}(x^q-1)\partial x}{x^r-1}.$$

Trennt man die Fakultäten mit gebrochenen Exponenten, so entsteht:

$$1^{m+\frac{p}{r}|1} = 1^{\frac{p}{r}|1}(1+\frac{p}{r})^{m|1} = 1^{\frac{p}{r}|1}\frac{(r+p)^{m|r}}{r^m},$$

$$1^{m+\frac{p+q-r}{r}|1} = 1^{\frac{p+q-r}{r}|1}(1+\frac{p+q-r}{r})^{m|1} = 1^{\frac{p+q-r}{r}|1}\frac{(p+q)^{m|r}}{r^m}.$$

Führt man diese Werthe ein, so geht die vorstehende Gleichung in folgende über:

4)

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{(r+p)^{m|r} . 1^{\frac{p}{r}|1} . 1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p) . (p+q)^{m|r} . 1^{\frac{r+q-r}{r}|1}} \int_0^1 \frac{x^{rm+p-1}(x^q-1)\partial x}{x^r-1}.$$

Hierin kann p die Werthe 1, 2, 3....r durchlaufen. Wird $p=r$, so geht obige Gleichung in eine einfachere Form über und man erhält:

$$\int_0^1 x^{rm+r-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}} \lg x\partial x$$

$$= -\frac{1^{m+1|1}.1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+r).1^{m+1+\frac{q-r}{r}|1}} \int_0^1 \frac{x^{rm+r-1}(x^q-1)\partial x}{x^r-1}.$$

Stösst man nun $1^{\frac{q-r}{r}|1}$ aus Zähler und Nenner aus, so entsteht:

5)

$$\int_0^1 x^{rm+r-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}} \lg x\partial x$$

$$= -\frac{r^{m+1|r}}{(rm+r).q^{m+1|r}} \int_0^1 \frac{x^{rm+r-1}(x^q-1)\partial x}{x^r-1}$$

$$= -\frac{r^{m|r}}{q^{m+1|r}} \int_0^1 \frac{x^{rm+r-1}(x^q-1)\partial x}{x^r-1}.$$

Euler hat sich a. a. O. mit Auffindung der hierher gehörigen Sätze beschäftigt, wurde aber häufig auf transcendente Grössen geführt, die ihm nicht darstellbar waren, weswegen er die weitere Durchführung dieses Gegenstandes unterliess. Die Fortschritte der Wissenschaft haben diese Schranke entfernt. Die Untersuchung dieser Integrale soll daher hier fortgeführt werden, wo sie Euler verlassen hat.

In diesen Gleichungen erscheint das Binomium mit einem gebrochenen Exponenten. Diese Beschränkung lässt sich leicht entfernen, wenn man $(q+1)r$ statt q setzt. Die Gleichung Nr. 3) geht dann in folgende über:

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \lg x\partial x = -\frac{1^{\frac{m}{r}|1}.1^{q|1}}{m.1^{\frac{m}{r}+q|1}} \int_0^1 x^{m-1}\frac{(x^{qr+r}-1)}{x^r-1}\partial x.$$

Nun ist:

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(x^{qr+r}-1)}{x^r-1}\partial x$$

$$=\int_0^1 (x^{rq+m-1}+x^{rq+m-r-1}+\ldots . x^{m+r-1}+x^{m-1})\partial x$$

$$=\frac{1}{m}+\frac{1}{m+r}+\frac{1}{m+2r}+\ldots . \frac{1}{m+qr}.$$

Durch Einführung dieses Werthes entsteht nach den nöthigen Reductionen:

6)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \lg x\partial x=-\frac{r^{q|r}}{m^{q+1|r}}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+r}+\frac{1}{m+2r}+\ldots\frac{1}{m+qr}\right).$$

§. 47.

Diese Gleichungen lassen eine Menge Anwendungen zu. Am einfachsten ergeben sich die aus Nr. 6) §. 46., von denen wir einige hervorheben. Setzt man $r=1, 2, 3\ldots .$, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^q \lg x\partial x=-\frac{1^{q|1}}{m^{q+1|1}}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\ldots . \frac{1}{m+q}\right),$$

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^2)^q \lg x\partial x=-\frac{2^{q|2}}{m^{q+1|2}}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+2}+\ldots . \frac{1}{m+2q}\right),$$

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^3)^q \lg x\partial x=-\frac{3^{q|3}}{m^{q+1|3}}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+3}+\ldots . \frac{1}{m+3q}\right),$$

u. s. w.

Für $m=1$ und $r=1, 2, 3$ entsteht:

2)

$$\int_0^1 (1-x)^q \lg x\partial x=-\frac{1}{q+1}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots . \frac{1}{1+q})$$

$$=-\frac{1}{q+1}\cdot\frac{C(1, 2, \ldots . q+1)^q}{1.2.3\ldots . q},$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^q \lg x\partial x=-\frac{2^{q|2}}{1^{q+1|2}}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots . \frac{1}{2q+1}),$$

$$\int_0^1 (1-x^3)^q \lg x \partial x = -\frac{3^{q|3}}{1^{q+1|3}}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3q+1}),$$

. . . .

$$\int_0^1 (1-x^r)^q \lg x \partial x = -\frac{r^{q|r}}{1^{q+1|r}}(1+\frac{1}{r+1}+\frac{1}{2r+1}+\ldots\frac{1}{qr+1}),$$

u. s. w.

Aus der ersten Form von Nr. 2) ergeben sich folgende Integrale:

3)

$$\int_0^1 \lg x \partial x = -1,$$

$$\int_0^1 (1-x)\lg x \partial x = -\frac{3}{4},$$

$$\int_0^1 (1-x)^2 \lg x \partial x = -\frac{11}{18},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3 \lg x \partial x = -\frac{25}{48},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4 \lg x \partial x = -\frac{137}{300},$$

u. s. w.

Setzt man $m=2$, $q=0, 1, 2, \ldots$ in der ersten Form von Nr. 1), so ergeben sich folgende:

4)

$$\int_0^1 x \lg x \partial x = -\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x(1-x)\lg x \partial x = -\frac{5}{36},$$

$$\int_0^1 x(1-x)^2 \lg x \partial x = -\frac{13}{144},$$

$$\int_0^1 x(1-x)^3 \lg x \partial x = -\frac{77}{1200},$$

$$\int_0^1 x(1-x)^4 \lg x \partial x = -\frac{29}{600},$$

u. s. w.

Eine andere als die in Nr. 6) §. 46. erhaltene Darstellung bekommt man für die Auswerthung der hier aufgestellten Integrale, aus §. 21. Nr. 1) und 2), wenn man dort $r=1$, m statt p, r statt q und q statt n schreibt. Es entsteht:

5)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \lg x \partial x = -\left(\frac{1}{m^2} - q\frac{1}{(m+r)^2} + (q)_2 \frac{1}{(m+2r)^2} - \ldots\right)$$
$$= (-)^{q+1}.\Delta^q.\frac{1}{m^2},$$

wenn r die Zunahme des Unterschiedes bedeutet. Der Inhalt dieser Gleichung und der in Nr. 6) §. 46. angegebenen ist derselbe, wie man sich leicht aus der Vergleichung einzelner Fälle überzeugen kann. Diese Vergleichung führt zu folgender bemerkenswerthen Beziehung zwischen dem Unterschiede von $\frac{1}{m^2}$ und den Gliedern der harmonischen Reihe bei der Zunahme r:

6)

$$(-)^q.\Delta^q.\frac{1}{m^2} = \frac{1}{m^2} - \frac{q}{(m+r)^2} + \frac{(q)_2}{(m+2r)^2} \ldots (-)^q \frac{(q)_q}{(m+qr)^2}$$
$$= \frac{r^{q|r}}{m^{q+1|r}}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m+r} + \frac{1}{m+2r} + \ldots \frac{1}{m+qr}\right).$$

Zugleich zeigt sich hieraus, dass die Gleichung Nr. 6) §. 46. zur Werthberechnung der fraglichen Integrale viel bequemer ist, als die Gleichung Nr. 5) dieses Paragraphen.

§. 48.

Die in §. 46. aufgestellten Gleichungen führen $\lg x$ nur in der ersten Potenz, während die in §. 21. angegebenen $\lg x$ in den höhern Potenzen führen. Diese Beschränkung und die vorhin gemachte Bemerkung veranlasst, die in §. 46. aufgestellten Integrale auch auf die höhern Potenzen von $\lg x$ auszudehnen. Diesen Zweck erreicht man auf folgende Weise.

Setzt man, da es sich vorerst um das Binomium mit einem ganzen Exponenten handelt, $(q+1)r$ statt r in Nr. 1) §. 46., so entsteht:

1)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \lg x \partial x$$

$$= -\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \partial x \int_0^1 \frac{x^{m-1}(x^{rq+r}-1)\partial x}{x^r-1}.$$

Trennt man nun die Ausdrücke auf der rechten Seite und schreibt der Kürze wegen:

2)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \partial x = X,$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(x^{rq+r}-1)}{x^r-1} \partial x = Y,$$

4)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \lg x \partial x = M;$$

so hat man aus Nr. 1):

5)

$$M = -X \cdot Y.$$

Wird nun der Ausdruck M nach m differenzirt und durch ∂m getheilt, so ergeben sich folgende Formen:

6)

$$\frac{\partial M}{\partial m} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q (\lg x)^2 \partial x,$$

$$\frac{\partial^2 M}{(\partial m)^2} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q (\lg x)^3 \partial x,$$

$$\frac{\partial^3 M}{(\partial m)^3} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q (\lg x)^4 \partial x,$$

. . . .

$$\frac{\partial^{n-1} M}{(\partial m)^{n-1}} = \int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q (\lg x)^n \partial x.$$

Wird auch die Gleichung Nr. 2) nach m differenzirt, so erhält man folgende Resultate:

7)

$$\frac{\partial X}{\partial m}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \lg x\partial x,$$

$$\frac{\partial^2 X}{(\partial m)^2}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^2\partial x,$$

. . . .

$$\frac{\partial^n X}{(\partial m)^n}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^n\partial x.$$

Aus Nr. 6) und 7) erhält man:

8)

$$\frac{\partial^{n-1}M}{(\partial m)^{n-1}}=\frac{\partial^n X}{(\partial m)^n}.$$

Hieraus und aus Nr. 5) folgt:

9)

$$M=\frac{\partial X}{\partial m}=X.Y.$$

Diese Gleichung lässt sich auch aus Nr. 1) und 5) und der ersten Form von Nr. 7) ableiten.

Wird nun auch die Gleichung Nr. 5) wiederholt nach m differenzirt, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial M}{\partial m}=-\frac{\partial X}{\partial m}Y-X.\frac{\partial Y}{\partial m},$$

und hieraus, wenn der Werth für $\frac{\partial X}{\partial m}$ aus Nr. 9) eingeführt wird:

10)

$$\frac{\partial M}{\partial m}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^2\partial x = X(Y^2-\frac{\partial Y}{\partial m}).$$

Wird nun bei fortgesetzter Differenziation nach m jeweils der Werth für $\frac{\partial X}{\partial m}$ aus Nr. 9) eingeführt, so oft er erscheint, so ergeben sich folgende Darstellungen:

11)

$$\frac{\partial^2 M}{(\partial m)^2}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^3\partial x=-X(Y^3-3\frac{Y\partial Y}{\partial m}+\frac{\partial^2 Y}{(\partial m)^2}),$$

$$\frac{\partial^3 M}{(\partial m)^3}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^4\partial x$$

$$=X[Y^4-6\frac{Y^2\partial Y}{\partial m}+4\frac{Y\partial^2 Y}{(\partial m)^2}+3\frac{\partial Y.\partial Y}{(\partial m)^2}-\frac{\partial^3 Y}{(\partial m)^3}],$$

$$\frac{\partial^4 M}{(\partial m)^4}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^5\partial x$$

$$=-X[Y^5-10\frac{Y^3\partial Y}{\partial m}+10\frac{Y^2\partial^2 Y}{(\partial m)^2}+15\frac{Y\partial Y.\partial Y}{(\partial m)^2}$$

$$-5\frac{Y\partial^3 Y}{(\partial m)^3}-10\frac{Y\partial Y.\partial^2 Y}{(\partial m)^3}+\frac{\partial^4 Y}{(\partial m)^4}],$$

$$\frac{\partial^5 M}{(\partial m)^5}=\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^6\partial x$$

$$=X[Y^6-15\frac{Y^4\partial Y}{\partial m}+20\frac{Y^3\partial^2 Y}{(\partial m)^2}+45\frac{Y^2\partial Y.\partial Y}{(\partial m)^2}-15\frac{Y^2\partial^3 Y}{(\partial m)^3}$$

$$-60\frac{Y\partial Y.\partial^2 Y}{(\partial m)^3}-15\frac{\partial Y.\partial Y.\partial Y}{(\partial m)^3}+6\frac{Y\partial^4 Y}{(\partial m)^4}$$

$$+15\frac{\partial Y.\partial^3 Y}{(\partial m)^4}+10\frac{\partial^2 Y.\partial^2 Y}{(\partial m)^4}-\frac{\partial^5 Y}{(\partial m)^5}],$$

u. s. w.

Das Gesetz, welches diesen Gebilden zu Grunde liegt, ist mit einigen Abänderungen dasselbe, welches von der Darstellung der höhern Differenziale der Functionen von Functionen gilt, und welches ich in einer Abhandlung hierüber (Freiburg 1846) entwickelt habe. Die in den Klammern eingeschlossenen Glieder sind aus den Potenzen und den Differenzialen von Y zusammengesetzt. Sie bilden die Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen aus so viel Elementen, als der Exponent von $\lg x$ angibt, und zu der gleichen Summen und zwar aus so viel Classen, als dieser Exponent Einheiten enthält.

Sollen nun die Glieder des Integrals, welches $(\lg x)^6$ führt, gebildet werden, so hat man die Gruppen der Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe 6 aus der 6ten, 5ten, 4ten, 3ten, 2ten, 1ten Classe aus sechs Elementen zu bilden. Sie sind:

12)

$$C'(s6;\ a_1,\ a_2, \ldots a_6)^6 = a_1 a_1 a_1 a_1 a_1 a_1,$$

$$C'(s6;\ a_1,\ a_2, \ldots a_6)^5 = a_1 a_1 a_1 a_1 a_2,$$

$$C'(s6;\ a_1,\ a_2, \ldots a_6)^4 = \begin{matrix} a_1 a_1 a_1 a_3 \\ a_1 a_1 a_2 a_2, \end{matrix}$$

$$C'(s6;\ a_1,\ a_2, \ldots a_6)^3 = \begin{matrix} a_1 a_1 a_4 \\ a_1 a_2 a_3 \\ a_2 a_2 a_2, \end{matrix}$$

$$C'(s6;\ a_1,\ a_2, \ldots a_6)^2 = \begin{matrix} a_1 a_5 \\ a_2 a_4 \\ a_3 a_3, \end{matrix}$$

$$C'(s6;\ a_1,\ a, \ldots a_6)^1 = a_6.$$

Das Element a_1 deutet auf $Y = \frac{\partial^0 Y}{(\partial m)^0}$; a_2 auf $\frac{\partial Y}{\partial m}$; a_3 auf $\frac{\partial^2 Y}{(\partial m)^2}$; a_4 auf $\frac{\partial^3 Y}{(\partial m)^3}$; a_5 auf $\frac{\partial^4 Y}{(\partial m)^4}$; a_6 auf $\frac{\partial^5 Y}{(\partial m)^5}$. Aus der Darstellung Nr. 11) erhält man daher zur Bestimmung von

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^6 \partial x$$

folgende in der Klammer erscheinende Glieder:

13)

$$Y^6,\ \frac{Y^4.\partial Y}{\partial m},\ \frac{Y^3.\partial^2 Y}{(\partial m)^2},\ \frac{Y^2 \partial Y.\partial Y}{(\partial m)^2},\ \frac{Y^2 \partial^3 Y}{(\partial m)^3},\ \frac{Y \partial Y.\partial^2 Y}{(\partial m)^3},$$

$$\frac{\partial Y.\partial Y.\partial Y}{(\partial m)^3},\ \frac{Y \partial^4 Y}{(\partial m)^4},\ \frac{\partial Y.\partial^3 Y}{(\partial m)^4},\ \frac{\partial^2 Y.\partial^2 Y}{(\partial m)^4},\ \frac{\partial^5 Y}{(\partial m)^5}.$$

Dasselbe gilt bei jedem andern Exponenten von $\lg x$.

Das Gesetz, wornach die Vorzahlen dieser Glieder zu bilden sind, hängt von den Exponenten von Y und denen der Differenziale ab. Die gemeinschaftliche Vorzahl aller Glieder ist die so vielte um 1 steigende Fakultät von 1 als der Exponent von $\lg x$ Einheiten enthält. Im vorliegenden Falle ist diese $1.2.3 \ldots 6 = 6^{6|-1}$.

Diese Fakultät muss durch die so vielte Faktorielle von 1 getheilt werden als der Exponent von Y anzeigt, ferner durch

Faktoriellen von 1, die einen Faktor mehr haben als der Exponent des Differenzials oder der Differenziale von Y anzeigt. Kommen gleiche Differenzial-Exponenten vor, so muss noch eine Faktorielle von so viel Factoren zutreten, als gleiche Exponenten vorhanden sind.

Die Zeichen der Glieder richten sich nach dem, oder den Exponenten der Differenziale. Jede Einheit deutet auf ein negatives Zeichen. Hiernach erhalten die Glieder in Nr. 13) folgende Vorzahlen und Zeichen:

14)

$$\frac{6^{6|-1}}{1^{6|1}}Y^6 - \frac{6^{6|-1}}{1^{4|1}.1^{2|1}}\cdot\frac{Y^4\partial Y}{\partial m} + \frac{6^{6|-1}}{1^{3|1}.1^{3|1}}\cdot\frac{Y^3\partial^2 Y}{(\partial m)^2}$$

$$+\frac{6^{6|-1}}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}\cdot\frac{Y^2\partial Y.\partial Y}{(\partial m)^2} - \frac{6^{6|-1}}{1^{2|1}.1^{4|1}}\cdot\frac{Y^2\partial^3 Y}{(\partial m)^3}$$

$$-\frac{6^{6|-1}}{1^{2|1}.1^{3|1}}\cdot\frac{Y\partial Y.\partial^2 Y}{(\partial m)^3} - \frac{6^{6|-1}}{1^{2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}.1^{3|1}}\cdot\frac{\partial Y.\partial Y.\partial Y}{(\partial m)^3}$$

$$+\frac{6^{6|-1}}{1^{5|1}}\cdot\frac{Y\partial^4 Y}{(\partial m)^4} + \frac{6^{6|-1}}{1^{2|1}.1^{4|1}}\cdot\frac{\partial Y.\partial^3 Y}{(\partial m)^4} + \frac{6^{6|-1}}{1^{3|1}.1^{3|1}.1^{2|1}}\cdot\frac{\partial^2 Y.\partial^2 Y}{(\partial m)^4}$$

$$-\frac{6^{6|-1}}{1^{6|1}}\cdot\frac{\partial^5 Y}{(\partial m)^5}.$$

Mit allen Gliedern tritt X in Verbindung. Diese Darstellung fällt mit der in Nr. 11) gegebenen zusammen.

Nach §. 46. ist:

$$Y = \int_0^1 \frac{x^{m-1}(x^{qr+r}-1)}{x^r-1}\partial x$$

$$= \frac{1}{m} + \frac{1}{m+r} + \frac{1}{m+2r} + \dots \frac{1}{m+qr} = \Sigma_0^q \frac{1}{m+ur}.$$

Hieraus erhält man durch wiederholte Differenziation nach m:

15)

$$\frac{\partial Y}{\partial m} = \int_0^1 x^{m-1}\frac{x^{qr+r}-1}{x^r-1}\lg x\partial x = -\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^2},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{(\partial m)^2} = \int_0^1 x^{m-1}\frac{x^{qr+r}-1}{x^r-1}(\lg x)^2\partial x = 1.2.\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^3},$$

$$\frac{\partial^3 Y}{(\partial m)^3} = \int_0^1 x^{m-1}\frac{x^{qr+r}-1}{x^r-1}(\lg x)^3 \partial x = -1.2.3.\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^4},$$

. . . .

$$\frac{\partial^n Y}{(\partial m)^n} = \int_0^1 x^{m-1}\frac{x^{qr+r}-1}{x^r-1}(\lg x)^n \partial x = (-)^n.1^{n|1}\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^{n+1}}.$$

§. 49.

Bei Auffindung der in §. 48. aufgestellten Gleichungen wurde Nr. 6) §. 46. zu Grunde gelegt, worin der Exponent des Binomiums $(1-x^r)$ eine ganze Zahl ist. Sämmtliche Gleichungen gelten jedoch auch, wenn der Exponent eine gebrochene Zahl ist, und man hat im Falle der Anwendug für X und Y die entsprechenden Werthe aus Nr. 1), 3), 4) und 5) §. 46. einzuführen.

Setzt man nun die in 15) §. 48. aufgefundenen Werthe in Nr. 11) und 12) ein und bemerkt, dass nach §. 46.

$$X = \int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \partial x = \frac{1^{\frac{m}{r}|1}.1^{q|1}}{m.1^{\frac{m}{r}+q|1}} = \frac{r^{q|r}}{m^{q+1|r}}$$

ist, so erhält man sofort:

1)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q \lg x \partial x$$

$$= -\frac{r^{q|r}}{m^{q+1|r}}\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur},$$

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q (\lg x)^2 \partial x$$

$$= \frac{r^{q|r}}{m^{q+1|r}}\left[\left(\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur}\right)^2 + \Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^2}\right],$$

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q (\lg x)^3 \partial x$$

$$= -\frac{r^{q|r}}{m^{q+1|r}}\left[\left(\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur}\right)^3 + 3\left(\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur}\right)^2.\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^2} + 2.\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^3}\right],$$

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^4\partial x$$

$$= \frac{r^{q|r}}{m^{q+1|r}}[(\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur})^4 + 6(\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur})^2 . \Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^2}$$

$$+ 8\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur} . \Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^3} + 3(\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^2})^2 + 6\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^4}],$$

u. s. w.

Diesen Darstellungen zur Seite steht die aus Nr. 1) §. 21. genommene Gleichung:

2)

$$\int_0^1 x^{m-1}(1-x^r)^q(\lg x)^n\partial x$$

$$= (-)^n . 1^{n|1}\left(\frac{1}{m^{n+1}} - \frac{q}{(m+r)^{n+1}} + \frac{(q)_2}{(m+2r)^{n+1}} - \ldots (-)^q . \frac{(q)_q}{(m+qr)^{n+1}}\right)$$

$$= (-)^{q+n} . 1^{n|1} . \Delta^q . \frac{1}{m^{n+1}},$$

bei der Zunahme r. Die in Nr. 1) und 2) gegebenen Darstellungen ergänzen und unterstützen sich gegenseitig. Für grössere n wird sich Nr. 2) bequemer benutzen lassen. Für kleinere n werden die Gleichungen in Nr. 1) fördernder sein. So ergeben sich, wenn $m=1$, $r=1$, $q=0, 1, 2, \ldots$ gesetzt wird, folgende Integrale aus der zweiten Form von Nr. 1):

3)

$$\int_0^1 (\lg x)^2\partial x = 2,$$

$$\int_0^1 (1-x)(\lg x)^2\partial x = \frac{7}{4},$$

$$\int_0^1 (1-x)^2(\lg x)^2\partial x = \frac{85}{54},$$

$$\int_0^1 (1-x)^3(\lg x)^2\partial x = \frac{415}{288},$$

$$\int_0^1 (1-x)^4(\lg x)^2\partial x = \frac{12019}{9000},$$

u. s. w.

während sich diese Werthe aus Nr. 2) mit mehr Mühe entwickeln lassen.

Da die Gleichungen Nr. 1) und 2) den gleichen Inhalt haben, entnehmen sich hieraus folgende bemerkenswerthe Beziehungen:

4)

$$\frac{r^{q|r}}{m^{q+1|r}}[(\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur})^2 + \Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^2}] = (-)^q.1.2.\Delta^q \frac{1}{m^3}$$
$$= 1.2.\Sigma_0^q (-)^u.(q)_u \frac{1}{(m+ur)^3},$$

$$\frac{r^{q|r}}{m^{q+1|r}}[(\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur})^3 + 3\Sigma_0^q \frac{1}{m+ur}.\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^2} + 2\Sigma_0^q \frac{1}{(m+ur)^3}]$$
$$= (-)^q.1.2.3\Delta^q \frac{1}{m^4} = 1.2.3\Sigma_0^q (-)^u.(q)_u \frac{1}{(m+ur)^4},$$

u. s. w.

Eine besondere Gruppe von Integralen leitet sich aus den oben Nr. 1) und 2) gegebenen Gleichungen ab, wenn man mr statt m schreibt. Dann ist:

5)

$$X = \int_0^1 x^{rm-1}(1-x^r)^q \partial x = \frac{1^{m|1}.1^{q|1}}{mr.1^{m+q|1}} = \frac{1^{q|1}}{r.m^{q+1|1}},$$

6)

$$\Sigma_0^q \frac{1}{(mr+ur)^p} = \frac{1}{r^p}.\Sigma_0^q \frac{1}{(m+u)^p},$$

und man erhält aus Nr. 1):

7)

$$\int_0^1 x^{rm-1}(1-x^r)^q \lg x \partial x = -\frac{1^{q|1}}{r^2 m^{q+1|1}}.\Sigma_0^q \frac{1}{m+u},$$

$$\int_0^1 x^{rm-1}(1-x^r)^q (\lg x)^2 \partial x = \frac{1^{q|1}}{r^3 m^{q+1|1}}[(\Sigma_0^q \frac{1}{m+u})^2 + \Sigma_0^q \frac{1}{(m+u)^2}],$$

$$\int_0^1 x^{rm-1}(1-x^r)^q (\lg x)^3 \partial x = -\frac{1^{q|1}}{r^4 m^{q+1|1}}[(\Sigma_0^q \frac{1}{m+u})^3$$
$$+3\Sigma_0^q \frac{1}{m+u}.\Sigma_0^q \frac{1}{(m+u)^2} + 2\Sigma_0^q \frac{1}{(m+u)^3}],$$

u. s. w.

Aus Nr. 2) wird:

8)

$$\int_0^1 x^{rm-1}(1-x^r)^q(\lg x)^n\partial x$$

$$= (-)^n \cdot \frac{1^{n|1}}{r^{n+1}}\left[\frac{1}{m^{n+1}} - q\cdot\frac{1}{(m+1)^{n+1}} + \frac{(q)_2}{(m+2)^{n+1}} - \ldots\right].$$

Setzt man in der ersten Form von Nr. 7) $r=2$, $m=1$, $q=0$, 1, 2, ..., so ergeben sich folgende Integrale:

9)

$$\int_0^1 x\lg x\partial x = -\frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)\lg x\partial x = -\frac{1}{4.2}\cdot\frac{3}{2},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2\lg x\partial x = -\frac{1}{4.3}\cdot\frac{11}{6},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3\lg x\partial x = -\frac{1}{4.4}\cdot\frac{25}{12},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^4\lg x\partial x = -\frac{1}{4.5}\cdot\frac{137}{60},$$

. . . .

$$\int_0^1 x(1-x^2)^q\lg x\partial x = -\frac{1}{4(q+1)}\cdot\Sigma_0^q\frac{1}{1+u} = \frac{1}{4(q+1)}\cdot\frac{C(1,2,\ldots q+1)^q}{1.2.3\ldots(q+1)}.$$

Für $r=3$, $m=1$ wird:

10)

$$\int_0^1 x^2(1-x^3)^q\lg x\partial x = -\frac{1}{9(q+1)}\cdot\Sigma_0^q\frac{1}{1+u}$$

Für $r=2$, $m=2$ entsteht:

11)

$$\int_0^1 x^3(1-x^2)^q\lg x\partial x = -\frac{1}{4(q+1)(q+2)}\cdot\Sigma_0^q\frac{1}{2+u},$$

u. s. w.

Setzt man $r=2$, $m=1$, so ergeben sich aus der zweiten Form von Nr. 7):

12)

$$\int_0^1 x(\lg x)^2 \partial x = \frac{1}{4},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)(\lg x)^2 \partial x = \frac{1}{8.2}\cdot\frac{7}{2},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^2(\lg x)^2 \partial x = \frac{1}{8.3}\cdot\frac{85}{18},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^3(\lg x)^2 \partial x = \frac{1}{8.4}\cdot\frac{415}{72},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^4(\lg x)^2 \partial x = \frac{1}{8.5}\cdot\frac{12019}{1800},$$

$$\int_0^1 x(1-x^2)^5(\lg x)^2 \partial x = \frac{1}{8.6}\cdot\frac{13489}{1800},$$

. . . .

$$\int_0^1 x(1-x^2)^q(\lg x)^2 \partial x = \frac{1}{8(q+1)}\left[\left(\Sigma_0^q \frac{1}{1+u}\right)^2 + \Sigma_0^q \frac{1}{(1+u)^2}\right],$$

u. s. w.

Diese Darstellungen lassen sich, wie man sieht, leicht weiter fortführen. Doch verfolgen wir dieselben nicht weiter, sondern wenden uns zu einer neuen, wichtigern und nicht weniger reichhaltigen Gruppe von Integralen, nämlich zu solchen, welche irrationale Formen enthalten.

§. 50.

Die Darstellung der nun in Frage kommenden Integrale beruht hauptsächlich auf Fakultäten mit gebrochenen Exponenten. Wir schicken daher einige Reductions-Formeln derselben voraus, die im Folgenden zur Anwendung kommen werden, um hierauf verweisen zu können:

1)

$$1^{\frac{n}{m}|1} = \frac{n}{m} 1^{-1+\frac{n}{m}|1},$$

2)

$$1^{-\frac{n}{m}|1} = \frac{m}{m-n} 1^{1-\frac{n}{m}|1},$$

3)

$$\frac{1^{-\frac{n}{m}|1}}{1^{1-\frac{n}{m}|1}}=\frac{m}{m-n},$$

4)

$$\frac{1^{\frac{n}{m}|1}}{1^{-1+\frac{n}{m}|1}}=\frac{n}{m},$$

5)

$$1^{\frac{n}{m}|1}=\frac{n.\pi}{m\,\mathrm{Sin}\,\frac{n}{m}\pi.1^{-\frac{n}{m}|1}},$$

6)

$$1^{-\frac{n}{m}|1}=\frac{n.\pi}{m\,\mathrm{Sin}\,\frac{n}{m}\pi.1^{+\frac{n}{m}|1}},$$

7)

$$1^{\frac{n}{m}|1}.1^{-\frac{n}{m}|1}=\frac{n.\pi}{m\,\mathrm{Sin}\,\frac{n}{m}\pi},$$

8)

$$1^{-\frac{n}{m}|1}.1^{-1+\frac{n}{m}|1}=\frac{\pi}{\mathrm{Sin}\,\frac{n}{m}\pi},$$

9)

$$1^{\frac{n}{m}|1}.1^{1-\frac{n}{m}|1}=\frac{(m-n)n}{m.m}.\frac{\pi}{\mathrm{Sin}\,\frac{n}{m}\pi},$$

10)

$$1^{-\frac{n}{m}|1}=\frac{\pi}{\mathrm{Sin}\,\frac{n}{m}\pi\cdot 1^{-1+\frac{n}{m}|1}},$$

11)

$$1^{-1+\frac{n}{m}|1} = \frac{\pi}{\operatorname{Sin}\frac{n}{m}\pi \,.\, 1^{-\frac{n}{m}|1}},$$

12)

$$1^{\frac{n}{m}|1} = \frac{(m-n)n}{m.m} \,.\, \frac{\pi}{\operatorname{Sin}\frac{n}{m}\pi \,.\, 1^{1-\frac{n}{m}|1}},$$

13)

$$1^{1-\frac{n}{m}|1} = \frac{(m-n)n}{m.m} \,.\, \frac{\pi}{\operatorname{Sin}\frac{n}{m}\pi \,.\, 1^{\frac{n}{m}|1}}.$$

Diese Gleichungen finden sich in meiner Theorie der Fakultäten §. 22. und 26. entwickelt, wohin wir wegen ihrer Begründung verweisen.

§. 51.

Setzt man $r=2$, $q=3$ in Nr. 4) §. 46., so entsteht:

1)

$$\int_0^1 x^{2m+p-1}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{(2+p)^{m|2} \,.\, 1^{\frac{p}{2}|1} \,.\, 1^{\frac{1}{2}|1}}{(2m+p)(3+p)^{m|2} \,.\, 1^{\frac{p+1}{2}|1}} \,.\, \int_0^1 x^{2m+p-1} \frac{x^3-1}{x^2-1} \partial x.$$

Nun ist:

2)

$$\int_0^1 x^{2m+p-1} \frac{x^3-1}{x^2-1} \partial x = \int_0^1 x^{2m+p-1}\left(x + \frac{1}{1+x}\right)\partial x$$

$$= \frac{1}{2m+p+1} + \int_0^1 \frac{x^{2m+p-1}\partial x}{1+x}.$$

Setzt man $p=1$ und dann $p=2$ und führt die Werthe für die Integrale $\int_0^1 \frac{x^{2m}\partial x}{1+x}$ und $\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\partial x}{1+x}$ aus 9) und 10) §. 2. in Nr. 1) ein, und bemerkt, dass nach Nr. 9) §. 50., $1^{\frac{1}{2}|1} \,.\, 1^{\frac{1}{2}|1} = \frac{\pi}{4}$ ist, so erhält man hiedurch und mit Rücksicht auf Nr. 5) §. 46.

folgende zwei Integralformen, wenn die nöthigen Reductionen gemacht werden:

3)

$$\int_0^1 x^{2m}\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{1^{m|2}\pi}{2.2^{m+1|2}}\left[\frac{1}{2m+2}+\lg 2-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2m})\right]$$

$$=-\frac{1.3.5\ldots(2m-1)\pi}{2.2.4.6\ldots(2m+2)}\left(\frac{1}{2m+2}+\lg 2-\Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{1}{u}\right),$$

4)

$$\int_0^1 x^{2m+1}\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{2^{m|2}}{1^{m+2|2}}\left(\frac{1}{2m+3}-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1}\right)$$

$$=-\frac{2.4.6\ldots2m}{1.3.5\ldots(2m+3)}\left(\frac{1}{2m+3}-\lg 2+\Sigma_1^{2m+1}(-)^{u-1}\frac{1}{u}\right).$$

Hieraus ergeben sich für $m=0, 1, 2, \ldots$ folgende Integrale:

5)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{4}(\tfrac{1}{2}+\lg 2),$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\tfrac{1}{3}(-\lg 2+\frac{4}{3}),$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{16}(\lg 2-\frac{1}{4}),$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\frac{2}{15}(-\lg 2+\frac{31}{30}),$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{32}(\lg 2-\frac{5}{12}),$$

$$\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\frac{8}{105}(-\lg 2+\frac{389}{420}),$$

$$\int_0^1 x^6\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\frac{5\pi}{256}(\lg 2-\frac{59}{120}),$$

$$\int_0^1 x^7\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\frac{16}{315}(-\lg 2+\frac{817}{1200}),$$

$$\int_0^1 x^8\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\frac{7\pi}{512}(\lg 2-\frac{449}{840}),$$

u. s. w.

Setzt man $r=2$, $q=5$, so erhält man aus Nr. 4) §. 46:

$$\int_0^1 x^{2m+p-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{(2+p)^{m|2}.1^{\frac{p}{2}|1}.1^{1+\frac{1}{2}|1}}{(2m+p)(5+p)^{m|2}.1^{\frac{3+p}{2}|1}}\int_0^1 x^{2m+p-1}\frac{x^5-1}{x^2-1}\partial x.$$

Man hat:

$$\int_0^1 x^{2m+p-1}\frac{x^5-1}{x^2-1}\partial x=\int_0^1 x^{2m+p-1}(x^3+x+\frac{1}{1+x})\partial x$$

$$=\frac{1}{2m+3+p}+\frac{1}{2m+1+p}+\int_0^1\frac{x^{2m+p-1}\partial x}{1+x}.$$

Führt man nun die oben angegebenen Werthe der angezeigten Integrale für $p=1$, und $p=2$ wie oben ein, bemerkt, dass $1^{\frac{1}{2}+1|1}=1^{\frac{1}{2}|1}.\frac{3}{2}$ ist, so erhält man nach den erforderlichen Reductionen und aus Nr. 5) §. 46., wenn $p=2$ gesetzt wird, folgende Integralformen:

6).

$$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{3.1^{m|2}\pi}{2.2^{m+2|2}}\left[\frac{1}{2m+4}+\frac{1}{2m+2}+\lg 2-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2m})\right]$$

$$=-\frac{3.1.3\ldots(2m-1)\pi}{2.2.4\ldots(2m+4)}\left(\frac{1}{2m+4}+\frac{1}{2m+2}+\lg 2-\Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{1}{u}\right),$$

7)

$$\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{3.2^{m|2}}{1^{m+3|2}}\left(\frac{1}{2m+5}+\frac{1}{2m+3}-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1}\right)$$

$$=-\frac{2.4.6\ldots 2m}{5.7.9\ldots(2m+5)}\left(\frac{1}{2m+5}+\frac{1}{2m+3}-\lg 2+\Sigma_1^{2m+1}(-)^{u-1}\frac{1}{u}\right).$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\lg x\partial x=-\frac{3\pi}{16}(\lg 2+\frac{3}{4}),$$

$$\int_0^1 x\sqrt{(1-x^2)^3}\lg x\partial x = -\tfrac{1}{5}\left(-\lg 2+\frac{23}{15}\right),$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{(1-x^2)^3}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{32}\left(\lg 2-\frac{1}{12}\right),$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{(1-x^2)^3}\lg x\partial x = -\frac{2}{35}\left(-\lg 2+\frac{247}{210}\right),$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{(1-x^2)^3}\lg x\partial x = -\frac{3\pi}{256}\left(\lg 2-\frac{7}{24}\right),$$

$$\int_0^1 x^5\sqrt{(1-x^2)^3}\lg x\partial x = -\frac{8}{315}\left(-\lg 2+\frac{1307}{1260}\right),$$

$$\int_0^1 x^6\sqrt{(1-x^2)^3}\lg x\partial x = -\frac{3\pi}{512}\left(\lg 2-\frac{47}{120}\right),$$

u. s. w.

Diese Darstellungen lassen sich leicht weiter fortführen. Wird $q=7$ gesetzt, so erhält man:

9)

$$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{1^{3|2}.1^{m|2}\pi}{2.2^{m+3|2}}\left(\frac{1}{2m+6}+\frac{1}{2m+4}+\frac{1}{2m+2}+\lg 2-\Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{1}{u}\right),$$

10)

$$\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^{\frac{5}{2}}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{2^{m|2}}{7^{m+1|2}}\left(\frac{1}{2m+7}+\frac{1}{2m+5}+\frac{1}{2m+3}-\lg 2+\Sigma_1^{2m+1}(-)^{u-1}\frac{1}{u}\right).$$

Setzt man $\frac{2q+3}{2}$ statt q, so erhält man allgemein:

11)

$$\int_0^1 x^{2m}(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{1^{q+1|2}.1^{m|2}\pi}{2.2^{m+q+1|2}}\left[\lg 2+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{m+q+1}+\frac{1}{m+q}+\ldots\frac{1}{m+1}\right)\right.$$
$$\left.-\Sigma_1^{2m}(-)^{u-1}\frac{1}{u}\right],$$

12)

$$\int_0^1 x^{2m+1}(1-x^2)^{q+\frac{1}{2}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{2^{m|2}}{(2q+3)^{m+1|2}}\Big[-\lg 2 + \frac{1}{2m+q+3} + \frac{1}{2m+q+1} + \cdots \frac{1}{2m+3}$$

$$+ \Sigma_1^{2m+1}(-)^{u-1}\frac{1}{u}\Big].$$

§. 52.

Setzt man $q=4$, $r=3$ in Nr. 4) §. 46., so entseht:

1)

$$\int_0^1 x^{3m+p-1}(1-x^3)^{\frac{1}{3}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{(3+p)^{m|3}.1^{\frac{p}{3}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{(3m+p)(4+p)^{m|3}.1^{\frac{p+1}{3}|1}}.\int_0^1 x^{3m+p-1}\frac{x^4-1}{x^3-1}\partial x.$$

Es ist:

2)

$$\int_0^1 x^{3m+p-1}\frac{x^4-1}{x^3-1}\partial x = \int_0^1 x^{3m+p-1}(x+\frac{1}{1+x+x^2})\partial x$$

$$= \frac{1}{3m+p+1} + \int_0^1 \frac{x^{3m+p-1}\partial x}{1+x+x^2}.$$

Wird nun $p=1, 2, 3$ in beiden Gleichungen gesetzt, so hat man die Werthe der Integrale $\int_0^1 \frac{x^{3m}\partial x}{1+x+x^2}$, $\int_0^1 \frac{x^{3m+1}\partial x}{1+x+x^2}$, $\int_0^1 \frac{x^{3m+2}\partial x}{1+x+x^2}$ aus Nr. 4) §. 16. in Nr. 1) einzuführen. Hiedurch und mit Rücksicht auf Nr. 5) §. 46. erhält man nach den gehörigen Reductionen folgende drei Integralformen:

3)

$$\int_0^1 x^{3m}\sqrt[3]{1-x^3}\lg x \,\partial x$$

$$= -\frac{1^{m|3}.1^{\frac{1}{3}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{5^{m|3}.1^{\frac{2}{3}|1}}\Big[\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \cdots \frac{1}{3m-1} + \frac{1}{3m+2}$$

$$-(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\cdots\frac{1}{3m-2})\Big],$$

$$= -\frac{16 \, . \, 1^{m|3} \pi^2}{243 \, . \, 5^{m|3} (1^{\frac{2}{3}|1})^3} \Big[\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \ldots . \frac{1}{3m-1} + \frac{1}{3m+2}$$

$$- (1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \ldots . \frac{1}{3m-2}) \Big],$$

da $1^{\frac{1}{3}|1} = \dfrac{4\pi}{9\sqrt{3} \, . \, 1^{\frac{2}{3}|1}}$ nach Nr. 12) §. 50. ist.

4)

$$\int_0^1 x^{3m+1} \sqrt[3]{1-x^3} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{5^{m|3} \, . \, 1^{\frac{2}{3}|1} \, . \, 1^{\frac{1}{3}|1}}{(3m+2) 6^{m|3}} [\tfrac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots . \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1})$$

$$- (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \ldots . \frac{1}{3m-1})],$$

$$= -\frac{4 \, . \, 5^{m|3} \pi}{3(3m+2) 3^{m+1|3} \, . \, \sqrt{3}} [\tfrac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots . \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1})$$

$$- (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \ldots . \frac{1}{3m-1})],$$

da $1^{\frac{1}{3}|1} . 1^{\frac{2}{3}|1} = \dfrac{4\pi}{9\sqrt{3}}$ nach §. 50. Nr. 9. ist.

5)

$$\int_0^1 x^{3m+2} \sqrt[3]{1-x^3} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{3^{m|3}}{4^{m+1|3}} [-\tfrac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \ldots . \frac{1}{3m+1} + \frac{1}{3m+4}$$

$$- \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots . \frac{1}{m})].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

6)

$$\int_0^1 \sqrt[3]{1-x^3} \lg x \partial x = -\frac{1^{\frac{1}{3}|1} \, . \, 1^{\frac{1}{3}|1}}{1^{\frac{2}{3}|1}} \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2} \right)$$

$$= -\frac{16\pi^2}{243 (1^{\frac{2}{3}|1})^3} \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2} \right),$$

$$\int_0^1 x \sqrt[3]{1-x^3} \lg x \partial x = -\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} (\tfrac{1}{2} \lg 3 + \tfrac{1}{3} - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}),$$

$$\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{1-x^3} \lg x \partial x = -\tfrac{1}{4} \left(\frac{5}{4} - \tfrac{1}{2} \lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right),$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt[3]{1-x^3}\lg x\partial x = -\frac{1^{\frac{1}{3}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{5.1^{\frac{2}{3}|1}}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{10}{3}\right)$$

$$= -\frac{16\pi^2}{5.243(1^{\frac{2}{3}|1})^3}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{10}{3}\right),$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt[3]{1-x^3}\lg x\partial x = -\frac{2\pi}{27\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x^5\sqrt[3]{1-x^3}\lg x\partial x = -\frac{3}{28}\left(\frac{89}{84}-\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x^6\sqrt[3]{1-x^3}\lg x\partial x = -\frac{1^{\frac{1}{3}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{10.1^{\frac{2}{3}|1}}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{17}{40}\right)$$

$$= -\frac{16\pi^2}{10.243(1^{\frac{2}{3}|1})^3}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{17}{40}\right),$$

$$\int_0^1 x^7\sqrt[3]{1-x^3}\lg x\partial x = -\frac{10\pi}{243\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{4}{45}\right),$$

$$\int_0^1 x^8\sqrt[3]{1-x^3}\lg x\partial x = -\frac{9}{140}\left(\frac{139}{140}-\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x^9\sqrt[3]{1-x^3}\lg x\partial x = -\frac{7.1^{\frac{1}{3}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{110.1^{\frac{2}{3}|1}}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1469}{3080}\right)$$

$$= -\frac{7.16\pi^2}{110.243(1^{\frac{2}{3}|1})^3}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{1469}{3080}\right),$$

u. s. w.

Hierin ist:

$$1^{\frac{1}{3}|1} = 0{,}8929795116, \quad 1^{\frac{2}{3}|1} = 0{,}9027452928,$$

$$\lg 1^{\frac{1}{3}|1} = 0{,}95084149459460-1, \quad \lg 1^{\frac{2}{3}|1} = 0{,}95556523262854-1.$$

Setzt man $r=3$, $q=5$ in Nr. 4) §. 46., so entsteht:

$$\int_0^1 x^{3m+p-1}(1-x^3)^{\frac{2}{3}}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{(3+p)^{m|3}.1^{\frac{p}{3}|1}.1^{\frac{2}{3}|1}}{(3m+p)(5+p)^{m|3}.1^{\frac{p+2}{3}|1}}.\int_0^1 x^{3m+p-1}\frac{x^5-1}{x^3-1}\partial x.$$

Hier ist:

$$\int_0^1 x^{3m+p-1}\frac{x^5-1}{x^3-1}\partial x=\int_0^1 x^{3m+p-1}(x^2+\frac{x+1}{1+x+x^2})\partial x$$

$$=\frac{1}{3m+2+p}+\int_0^1\frac{x^{3m+p}}{1+x+x^2}\partial x+\int_0^1\frac{x^{3m+p-1}}{1+x+x^2}\partial x.$$

Setzt man in diesen zwei Gleichungen $p=1,\ 2,\ 3,$ so hat man folgende Integrale:

$$\int_0^1\frac{x^{3m+1}\partial x}{1+x+x^2}+\int_0^1\frac{x^{3m}\partial x}{1+x+x^2};\quad \int_0^1\frac{x^{3m+2}\partial x}{1+x+x^2}+\int_0^1\frac{x^{3m+1}\partial x}{1+x+x^2}$$

und

$$\int_0^1\frac{x^{3m+3}\partial x}{1+x+x^2}+\int_0^1\frac{x^{3m+2}\partial x}{1+x+x^2}$$

aus Nr. 4) §. 16. einzuführen.

Hiedurch und mit Rücksicht auf Nr. 5) §. 46. ergeben sich nach den erforderlichen Reductionen folgende drei Integralformen:

7)

$$\int_0^1 x^{3m}(1-x^3)^{\frac{2}{3}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{4^{m|3}.1^{\frac{1}{3}|1}.1^{\frac{2}{3}|1}}{(3m+1)6^{m|3}}[\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\ldots.\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1})$$

$$-(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{3m-2})],$$

$$=-\frac{4.1^{m|3}\pi}{3.3^{m+1|3}\sqrt{3}}[\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\ldots.\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1})$$

$$-(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{3m-2})],$$

8)

$$\int_0^1 x^{3m+1}(1-x^3)^{\frac{2}{3}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{3.5^{m|3}.1^{\frac{2}{3}|1}.1^{\frac{2}{3}|1}}{(3m+2)4^{m+1|3}.1^{\frac{1}{3}|1}}[-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1+\tfrac{1}{4}+\ldots.\frac{1}{3m+1}+\frac{1}{3m+4}$$

$$-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{3m-1})]$$

$$=-\frac{16.5^{m|3}.\pi^2}{81(3m+2)4^{m+1|3}.(1^{\frac{1}{3}|1})^3}[-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1+\tfrac{1}{4}+\ldots.\frac{1}{3m+1}+\frac{1}{3m+4}$$

$$-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{3m-1})],$$

9)

$$\int_0^1 x^{3m+2}(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{3^{m|3}}{5^{m+1|3}}(-\tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{5} + \ldots \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{3m+5}$$

$$- \tfrac{1}{3}(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots \frac{1}{m})].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

10)

$$\int_0^1 (1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x = -\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}),$$

$$\int_0^1 x(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x = -\frac{3 . 1^{\frac{2}{3}|1} . 1^{\frac{2}{3}|1}}{8 . 1^{\frac{1}{3}|1}}(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \tfrac{5}{4})$$

$$= -\frac{2\pi^2}{81(1^{\frac{1}{3}|1})^3}(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \tfrac{5}{4}),$$

$$\int_0^1 x^2(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x = -\frac{1}{5}\left(\frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{7}{10}\right),$$

$$\int_0^1 x^3(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x = -\frac{2\pi}{27\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}),$$

$$\int_0^1 x^4(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x = -\frac{4\pi^2}{81 . 7(1^{\frac{1}{3}|1})^3}(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{25}{28}),$$

$$\int_0^1 x^5(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x = -\frac{3}{40}(-\tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{59}{120}),$$

$$\int_0^1 x^6(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x = -\frac{8\pi}{243\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{23}{36}),$$

$$\int_0^1 x^7(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x = -\frac{2\pi^2}{81 . 7(1^{\frac{1}{3}|1})^3}(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{111}{140}),$$

$$\int_0^1 x^8(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x = -\frac{9}{220}(-\tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{183}{440}),$$

u. s. w.

Nach diesem Vorgange lassen sich auch die Integrale:

$$\int_0^1 x^{3m}(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x, \quad \int_0^1 x^{3m+1}(1-x^3)^{\frac{2}{3}} \lg x \partial x \ldots .$$

und

$$\int_0^1 x^{3m}(1-x^3)^{\frac{5}{3}}\lg x, \int_0^1 x^{3m+1}(1-x^3)^{\frac{5}{3}}\lg x\partial x \ldots$$

u. s. w.

darstellen. Sie führen auf ähnliche Gebilde, wie die hier angegebenen.

§. 53.

Setzt man $r=4$, $q=6$ in Nr. 4) §. 46., so entsteht:

1)

$$\int_0^1 x^{4m+p-1}(1-x^4)^{\frac{1}{2}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{(4+p)^{m|4}.1^{\frac{p}{4}|1}.1^{\frac{1}{2}|1}}{(4m+p)(6+p)^{m|4}.1^{\frac{p+2}{4}|1}}.\int_0^1 x^{4m+p-1}\frac{x^6-1}{x^4-1}\partial x.$$

Es ist ferner:

2)

$$\int_0^1 x^{4m+p-1}\frac{x^6-1}{x^4-1}\partial x=\int_0^1 x^{4m+p-1}(x^2+\frac{1}{1+x^2})\partial x$$

$$=\frac{1}{4m+p+2}+\int_0^1 \frac{x^{4m+p-1}\partial x}{1+x^2}.$$

Wird $p=1, 2, 3, 4$ in Nr. 1) und 2) gesetzt, so hat man aus Nr. 6) §. 9. folgende Integrale:

$$\int_0^1 \frac{x^{4m}\partial x}{1+x^2}, \int_0^1 \frac{x^{4m+1}\partial x}{1+x^2}, \int_0^1 \frac{x^{4m+2}\partial x}{1+x^2}, \int_0^1 \frac{x^{4m+3}\partial x}{1+x^2}$$

in Nr. 1) und 2) einzuführen. Hiedurch und mit Rücksicht auf Nr. 5) §. 46. erhält man nach den erforderlichen Reductionen folgende vier Integralformen:

3)

$$\int_0^1 x^{4m}\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{5^{m|4}.1^{\frac{1}{4}|1}.1^{\frac{1}{2}|1}}{(4m+1)7^{m|4}.1^{\frac{3}{4}|1}}\left[\frac{1}{4m+3}+\frac{\pi}{4}-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{4m-1})\right]$$

$$=\frac{3.1^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{32.7^{m|4}(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\left[\frac{1}{4m+3}+\frac{\pi}{4}-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{4m-1})\right],$$

da $1^{\frac{1}{4}|1} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16.1^{\frac{3}{4}|1}}$ nach Nr. 12) §. 50. ist.

4)

$$\int_0^1 x^{4m+1}\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{1^{m|2}.\pi}{4.2^{m+1|2}}\left[\frac{1}{4m+4}+\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2m})\right],$$

5)

$$\int_0^1 x^{4m+2}\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{27^{m|4}.1^{\frac{3}{4}|1}.1^{\frac{1}{2}|1}}{(4m+3)9^{m|4}.1^{\frac{1}{4}+1|1}}\left[\frac{1}{4m+5}-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1}\right]$$

$$= -\frac{3^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{8.1^{m+2|4}(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left[\frac{1}{4m+5}-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots\frac{1}{4m+1}\right],$$

da $1^{\frac{3}{4}|1} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16.1^{\frac{1}{4}|1}}$ nach Nr. 12) §. 50. ist.

6)

$$\int_0^1 x^{4m+3}\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{2^{m|2}}{2.1^{m+2|2}}\left[\frac{1}{4m+6}-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1})\right].$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

7)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{1^{\frac{1}{4}|1}\sqrt{\pi}}{2.1^{\frac{3}{4}|1}}(\tfrac{1}{3}+\frac{\pi}{4}) = -\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32(1^{\frac{3}{4}|1})^2}(\tfrac{1}{3}+\frac{\pi}{4}),$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{8}(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\lg 2),$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{40(1^{\frac{1}{4}|1})^2}(\tfrac{6}{5}-\frac{\pi}{4}),$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\tfrac{1}{6}(\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}\lg 2),$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32.7.(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{11}{21}\right);$$

$$\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{32}(\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{8}),$$

$$\int_0^1 x^6\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{8.15.(1^{\frac{1}{4}|1})^2}(-\frac{\pi}{4}+\frac{44}{45}),$$

$$\int_0^1 x^7\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{1}{15}\left(\frac{31}{60}-\tfrac{1}{2}\lg 2\right),$$

$$\int_0^1 x^8\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{15\pi\sqrt{2\pi}}{32.77.(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{731}{1155}\right),$$

$$\int_0^1 x^9\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{64}(\tfrac{1}{2}\lg 2-\frac{5}{24}),$$

$$\int_0^1 x^{10}\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{7\pi\sqrt{2\pi}}{8.195.(1^{\frac{1}{4}|1})^2}(-\frac{\pi}{4}+\frac{3734}{4095}),$$

$$\int_0^1 x^{11}\sqrt{1-x^4}\lg x\partial x = -\frac{4}{105}(-\tfrac{1}{2}\lg 2+\frac{389}{840}),$$

u. s. w.

Hierin ist:

$$1^{\frac{1}{4}|1} = 0,9064024769, \quad 1^{\frac{3}{4}|1} = 0,9190625269,$$

$$\lg 1^{\frac{3}{4}|1} = 0,96334505887435-1, \quad \lg 1^{\frac{1}{4}|1} = 0,95732108371551-1.$$

Setzt man $q=10$, $r=4$ in Nr. 4) §. 46., so entsteht:

$$\int_0^1 x^{4m+p-1}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{(4+p)^{m|4}.1^{\frac{p}{4}|1}.1^{\frac{1}{2}+1|1}}{(4m+p)(10+p)^{m|4}.1^{\frac{6+p}{4}|1}}.\int_0^1 x^{4m+p-1}\,\frac{x^{10}-1}{x^4-1}\,\partial x.$$

Hierin ist:

$$\int_0^1 x^{4m+p-1}\frac{x^{10}-1}{x^4-1}\partial x = \int_0^1 x^{4m+p-1}(x^6+x^2+\frac{1}{1+x^2})\partial x$$

$$= \frac{1}{4m+p+6}+\frac{1}{4m+p+2}+\int_0^1\frac{x^{4m+p-1}\partial x}{1+x^2}.$$

Wird nun $p=1$, 2, 3, 4 gesetzt, und werden die Werthe der fraglichen Integrale aus Nr. 6. §. 9. eingeführt, so erhält man nach den gehörigen Reductionen und mit Rücksicht auf Nr. 5)

§. 46., und den oben zu Nr. 3) und 5) angegebenen Werthen folgende vier Integralformen:

8)

$$\int_0^1 x^{4m}(1-x^4)^{\frac{3}{2}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{3.1^{m|4}.1^{\frac{1}{4}|1}\sqrt{\pi}}{7^{m+1|4}.1^{\frac{3}{4}|1}}\left[\frac{1}{4m+7}+\frac{1}{4m+3}+\frac{\pi}{4}-\left(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\ldots-\frac{1}{4m-1}\right)\right]$$

$$= -\frac{9.1^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{16.7^{m+1|4}(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\left[\frac{1}{4m+7}+\frac{1}{4m+3}+\frac{\pi}{4}-\left(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\ldots-\frac{1}{4m-1}\right)\right],$$

9)

$$\int_0^1 x^{4m+1}(1-x^4)^{\frac{3}{2}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{3.1^{m|2}\pi}{4.2^{m+2|2}}\left[\frac{1}{4m+8}+\frac{1}{4m+4}+\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2m}\right)\right],$$

10)

$$\int_0^1 x^{4m+2}(1-x^4)^{\frac{3}{2}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{4.3^{m|4}.1^{\frac{3}{4}|1}.\sqrt{\pi}}{5^{m+2|4}.1^{\frac{1}{4}|1}}\left[\frac{1}{4m+9}+\frac{1}{4m+5}-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1}\right]$$

$$= -\frac{3.3^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{4.5^{m+2|4}.(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left[\frac{1}{4m+9}+\frac{1}{4m+5}-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1}\right],$$

11)

$$\int_0^1 x^{4m+3}(1-x^4)^{\frac{3}{2}} \lg x \partial x$$

$$= -\frac{2^{m|2}}{2.5^{m+1|2}}\left[\frac{1}{4m+10}+\frac{1}{4m+6}-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{2}\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1}\right)\right].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

12)

$$\int_0^1 (1-x^4)^{\frac{3}{2}} \lg x \partial x = -\frac{9\pi\sqrt{2\pi}}{16.7.(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\left(\frac{10}{21}+\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int_0^1 x(1-x^4)^{\frac{3}{2}} \lg x \partial x = -\frac{3\pi}{32}\left(\frac{3}{8}+\tfrac{1}{2}\lg 2\right),$$

$$\int_0^1 x^2(1-x^4)^{\frac{3}{2}} \lg x \partial x = -\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{4.15.(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left(\frac{59}{45}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int_0^1 x^3(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x = -\frac{1}{10}\left(\frac{23}{30}-\tfrac{1}{2}\lg 2\right),$$

$$\int_0^1 x^4(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x = -\frac{9.\pi\sqrt{2\pi}}{16.77(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{100}{231}\right),$$

$$\int_0^1 x^5(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{64}\left(\tfrac{1}{2}\lg 2-\frac{1}{24}\right),$$

$$\int_0^1 x^6(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x = -\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{4.55}\left(\frac{617}{585}-\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int_0^1 x^7(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x = -\frac{1}{35}\left(\frac{247}{420}-\tfrac{1}{2}\lg 2\right),$$

u. s. w.

Auf gleiche Weise lassen sich die Integrale

$$\int_0^1 x^{4m}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\lg \partial x,\quad \int_0^1 x^{4m+1}(1-x^4)^{\frac{3}{2}}\lg x\partial x\ldots.$$

behandeln. Sie führen auf ähnliche Gebilde wie die vorliegenden.

§. 54.

Wird $r=6$, $q=9$ in Nr. 4) §. 46. gesetzt, so entsteht:

1)

$$\int_0^1 x^{6m+p-1}(1-x^6)^{\frac{1}{2}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{(6+p)^{m|6}.1^{\frac{p}{6}|1}.1^{\frac{1}{2}|1}}{(6m+p)(9+p)^{m|6}.1^{\frac{p+3}{6}|1}}.\int_0^1 x^{6m+p-1}\frac{x^9-1}{x^6-1}\partial x.$$

Hier ist:

2)

$$\int_0^1 x^{6m+p-1}\frac{x^9-1}{x^6-1}\partial x = \int_0^1 x^{6m+p-1}\left(x^3+\frac{1}{1+x^3}\right)\partial x$$

$$=\frac{1}{6m+p+3}+\int_0^1\frac{x^{6m+p-1}\partial x}{1+x^3}.$$

Wird $p=1,\ 2,\ 3,\ldots.6$ gesetzt, so hat man die Integrale aus §. 13. Nr. 9):

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}\partial x}{1+x^3},\ \int_0^1 \frac{x^{6m+1}\partial x}{1+x^3},\ \ldots \int_0^1 \frac{x^{6m+5}\partial x}{1+x^3}$$

in Nr. 1) und Nr. 2) einzuführen. Hiedurch und mit Rücksicht auf Nr. 5) §. 46. erhält man nach den nöthigen Reductionen folgende sechs Integralformen:

3)

$$\int_0^1 x^{6m}\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x$$
$$= -\frac{1^{m|6}.1^{\frac{1}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{2.10^{m|6}.1^{\frac{2}{3}|1}}\left[\frac{1}{6m+4}+\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-(1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}\ldots-\frac{1}{6m-2})\right],$$

4)

$$\int_0^1 x^{6m+1}\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x$$
$$= -\frac{8^{m|6}.1^{\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{2.(6m+2).11^{m|6}.1^{\frac{5}{6}|1}}\left[\frac{1}{6m+5}-\tfrac{1}{3}\lg 2\right.$$
$$\left.+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}\ldots-\frac{1}{6m-1})\right],$$

5)

$$\int_0^1 x^{6m+2}\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x$$
$$= -\frac{1^{m|2}.\pi}{6.2^{m+1|2}}\left[\frac{1}{6m+6}+\tfrac{1}{3}\lg 2-\tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2m})\right],$$

6)

$$\int_0^1 x^{6m+3}\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x$$
$$= -\frac{3.10^{m|6}.1^{\frac{2}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{(6m+4).1^{m+2|6}.1^{\frac{1}{6}|1}}\left[\frac{1}{6m+7}-\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}-\ldots+\frac{1}{6m+1}\right],$$

7)

$$\int_0^1 x^{6m+4}\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x$$
$$= -\frac{3.11^{m|6}.1^{\frac{5}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{(6m+5).8^{m+1|6}.1^{\frac{1}{3}|1}}\left[\frac{1}{6m+8}+\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}-\ldots+\frac{1}{6m+2}\right],$$

8)

$$\int_0^1 x^{6m+5}\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x$$
$$= -\frac{2^{m|2}}{3.1^{m+2|2}}\left[\frac{1}{6m+9}-\tfrac{1}{3}\lg 2+\tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1})\right].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

9)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{1^{\frac{1}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{2.1^{\frac{2}{3}|1}}\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{1^{\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{4.1^{\frac{5}{6}|1}}\left(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{12}\left(\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{3}\lg 2\right),$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{3.1^{\frac{2}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{28.1^{\frac{1}{6}|1}}\left(\tfrac{8}{7}-\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{3.1^{\frac{5}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{40.1^{\frac{1}{3}|1}}\left(\tfrac{5}{8}+\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\tfrac{1}{9}\left(\tfrac{4}{9}-\tfrac{1}{3}\lg 2\right),$$

$$\int_0^1 x^6\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{1^{\frac{1}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{20.1^{\frac{2}{3}|1}}\left(\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{13}{20}\right),$$

$$\int_0^1 x^7\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{1^{\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{22.1^{\frac{5}{6}|1}}\left(-\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{23}{110}\right),$$

$$\int_0^1 x^8\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{\pi}{48}\left(\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{1}{12}\right),$$

$$\int_0^1 x^9\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{3.1^{\frac{2}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{91.1^{\frac{1}{6}|1}}\left(\frac{353}{364}-\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x^{10}\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{3.1^{\frac{5}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{112.1^{\frac{1}{3}|1}}\left(\frac{139}{280}+\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x^{11}\sqrt{1-x^6}\lg x\partial x = -\frac{2}{45}\left(\frac{31}{90}-\tfrac{1}{3}\lg 2\right),$$

u. s. w.

Hierin ist:

$$1^{\frac{1}{6}|1} = 0{,}9277195473, \quad 1^{\frac{5}{6}|1} = 0{,}9406558583,$$

$$\lg 1^{\frac{1}{6}|1} = 0{,}96741660736966-1, \quad \lg 1^{\frac{5}{6}|1} = 0{,}97343076455719-1$$

Die Werthe für $1^{\frac{1}{3}|1}$ und $1^{\frac{2}{3}|1}$ sind §. 52. angegeben.

Wird $r=6$, $q=8$ in Nr. 4) §. 46. gesetzt, so entsteht:

$$\int_0^1 x^{6m+p-1}(1-x^6)^{\frac{1}{3}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{(6+p)^{m|6}.1^{\frac{p}{6}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{(6m+p)(8+p)^{m|6}.1^{\frac{p+2}{6}|1}}.\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}(x^8-1)}{x^6-1}\partial x.$$

Es ist:

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}(x^8-1)}{x^6-1}\partial x=\int_0^1 x^{6m+p-1}(x^2+\frac{1}{x^4+x^2+1})\partial x$$

$$=\frac{1}{6m+p+2}+\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}\partial x}{1+x^2+x^4}.$$

Wird hierin $p=1, 2, \ldots. 6$ gesetzt und werden die Werthe der Integrale $\int_0^1 \frac{x^{6m}\partial x}{1+x^2+x^4}$, $\int_0^1 \frac{x^{6m+1}\partial x}{1+x^2+x^4}$, ... aus §. 18. eingeführt, so erhält man nach den nöthigen Reductionen folgende sechs Integralformen:

10)

$$\int_0^1 x^{6m}(1-x^6)^{\frac{1}{3}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{2.1^{m|6}.1^{\frac{1}{6}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{9^{m|6}.\sqrt{\pi}}\Big[\frac{1}{6m+3}+\tfrac{1}{4}\lg 3+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}-(1+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{6m-5})$$
$$+\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{2m-1})\Big],$$

11)

$$\int_0^1 x^{6m+1}(1-x^6)^{\frac{1}{3}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{8^{m|6}.1^{\frac{1}{3}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{(6m+2).10^{m|6}.1^{\frac{2}{3}|1}}\Big[\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{3m-2})$$
$$+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots.+\frac{1}{3m-1}+\frac{1}{3m+2})\Big]$$

$$=-\frac{16.8^{m|6}.\pi^2}{243(6m+2).10^{m|6}(1^{\frac{2}{3}|1})^3}\Big[\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{3m-2})$$
$$+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{3m-1}+\frac{1}{3m+2})\Big],$$

da $1^{\frac{1}{3}|1}=\frac{4\pi}{9\sqrt{3}.1^{\frac{2}{3}|1}}$ nach Nr. 12) §. 50. ist.

12)

$$\int_0^1 x^{6m+2}(1-x^6)^{\frac{1}{3}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{9^{m|6}.1^{\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{2(6m+3).11^{m|6}.1^{\frac{5}{6}|1}}\Big[-\tfrac{1}{4}\lg 3+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}-\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{2m-1})$$

$$+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots.\frac{1}{6m-1}+\frac{1}{6m+5}\Big],$$

13)

$$\int_0^1 x^{6m+3}(1-x^6)^{\frac{1}{3}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{4.10^{m|6}.\pi}{9(6m+4).12^{m|6}.\sqrt{3}}\Big[\tfrac{1}{4}\lg 3-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{3m-1})$$

$$+\tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1})\Big],$$

14)

$$\int_0^1 x^{6m+4}(1-x^6)^{\frac{1}{3}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{6.11^{m|6}.1^{\frac{5}{6}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{(6m+5).7^{m+1|1}.1^{\frac{1}{6}|1}}\Big[-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots.\frac{1}{6m-1})$$

$$+1+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{6m+1}+\frac{1}{6m+7}\Big]$$

$$=-\frac{5.11^{m|6}.1^{\frac{1}{3}|1}.\pi}{3(6m+5).7^{m+1|6}(1^{\frac{1}{6}|1})^2}\Big[-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}-(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots.\frac{1}{6m-1})$$

$$+1+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{6m+1}+\frac{1}{6m+7}\Big],$$

da $1^{\frac{5}{6}|1}=\frac{5.\pi}{18.1^{\frac{1}{6}|1}}$ nach Nr. 12) §. 50. ist.

15)

$$\int_0^1 x^{6m+5}(1-x^6)^{\frac{1}{3}}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{3^{m|3}}{2.1^{m+2|3}}\Big[-\tfrac{1}{4}\lg 3-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}-\tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{2}+\ldots.\frac{1}{m})$$

$$+\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{3m+1}+\frac{1}{3m+4})\Big].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

16)

$$\int_0^1 (1-x^6)^{\frac{1}{3}} \lg x \partial x = -\frac{2.1^{\frac{1}{6}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{\sqrt{\pi}}\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\lg 3+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 x(1-x^6)^{\frac{1}{3}} \lg x \partial x = -\frac{8.\pi^2}{243(1^{\frac{2}{3}|1})^3}\left(\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\tfrac{1}{4}\right),$$

$$\int_0^1 x^2(1-x^6)^{\frac{1}{3}} \lg x \partial x = -\frac{1^{\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{6.1^{\frac{1}{6}|1}}\left(-\tfrac{1}{4}\lg 3+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}+\tfrac{1}{5}\right),$$

$$\int_0^1 x^3(1-x^6)^{\frac{1}{3}} \lg x \partial x = -\frac{\pi}{9\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{4}\lg 3-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}+\tfrac{1}{6}\right),$$

$$\int_0^1 x^4(1-x^6)^{\frac{1}{3}} \lg x \partial x = -\frac{1^{\frac{1}{3}|1}.\pi}{21(1^{\frac{1}{6}|1})^2}\left(-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\tfrac{8}{7}\right),$$

$$\int_0^1 x^5(1-x^6)^{\frac{1}{3}} \lg x \partial x = -\tfrac{1}{6}\left(-\tfrac{1}{4}\lg 3-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}+\tfrac{5}{8}\right),$$

$$\int_0^1 x^6(1-x^6)^{\frac{1}{3}} \lg x \partial x = -\frac{2.1^{\frac{1}{6}|1}.1^{\frac{1}{3}|1}}{9\sqrt{\pi}}\left(\tfrac{1}{4}\lg 3+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}-\tfrac{5}{9}\right),$$

$$\int_0^1 x^7(1-x^6)^{\frac{1}{3}} \lg x \partial x = -\frac{8.\pi^2}{243.5(1^{\frac{2}{3}|1})^3}\left(\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{3}{20}\right),$$

u. s. w.

§. 55.

Wird $r=8$, $q=12$ in Nr. 4) §. 46. gesetzt, so erhält man:

1)

$$\int_0^1 x^{8m+p-1}(1-x^8)^{\frac{1}{2}} \lg x \partial x = -\frac{(8+p)^{m|8}.1^{\frac{p}{8}|1}.1^{\frac{1}{2}|1}}{(8m+p).(12+p)^{m|8}.1^{\frac{4+p}{8}|1}} \times \int_0^1 x^{8m+p-1}\frac{x^{12}-1}{x^8-1}\partial x.$$

Nun ist:

2)

$$\int_0^1 x^{8m+p-1}\frac{x^{12}-1}{x^8-1}\partial x = \int_0^1 x^{8m+p-1}\left(x^4+\frac{1}{1+x^4}\right)\partial x$$
$$= \frac{1}{8m+4+p}+\int_0^1 \frac{x^{8m+p-1}\partial x}{1+x^4}.$$

Wird in Nr. 1) und Nr. 2) $p=1, 2, \ldots. 8$ gesetzt und werden

die Werthe für die Integrale $\int_0^1 \frac{x^{8m}\partial x}{1+x^4}$, $\int_0^1 \frac{x^{8m+1}\partial x}{1+x^4}$,.... aus §. 15. bestimmt und eingeführt, so ergeben sich nach den nöthigen Reductionen folgende acht Integralformen:

3)

$$\int_0^1 x^{8m}\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{1^{m|8}.1^{\frac{1}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{2.13^{m|8}.1^{\frac{5}{8}|1}}\left[\frac{1}{8m+5}+\frac{1}{4\sqrt{2}}(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)\right.$$

$$\left.-(1-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{9}-\ldots.-\frac{1}{8m-3})\right],$$

4)

$$\int_0^1 x^{8m+1}\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{3.1^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{64.7^{m|4}(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\left[\frac{1}{8m+6}+\frac{\pi}{8}-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots.-\frac{1}{4m-1})\right],$$

da $1^{\frac{1}{4}|1} = \frac{3.\pi\sqrt{2}}{16.1^{\frac{3}{4}|1}}$ nach Nr. 12) §. 50. ist.

5)

$$\int_0^1 x^{8m+2}\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{11^{m|8}.1^{\frac{3}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{2(8m+3).15^{m|8}.1^{\frac{7}{8}|1}}\left[\frac{1}{8m+7}+\frac{1}{4\sqrt{2}}(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)\right.$$

$$\left.-(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11}-\ldots.-\frac{1}{8m-1})\right],$$

6)

$$\int_0^1 x^{8m+3}\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{1^{m|2}.\pi}{8.2^{m+1|2}}\left[\frac{1}{8m+8}+\tfrac{1}{4}\lg 2-\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots.-\frac{1}{2m})\right],$$

7)

$$\int_0^1 x^{8m+4}\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x$$

$$= -\frac{4.13^{m|8}.1^{\frac{5}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{(8m+5).9^{m+1|8}.1^{\frac{1}{8}|1}}\left[\frac{1}{8m+9}-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)\right.$$

$$\left.+(1-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{9}-\ldots.+\frac{1}{8m+1})\right],$$

8)

$$\int_0^1 x^{8m+5}\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{3^{m|4}.\pi.\sqrt{2\pi}}{16.5^{m+1|4}.(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left[\frac{1}{8m+10}-\frac{\pi}{8}+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots\frac{1}{4m+1})\right],$$

9)

$$\int_0^1 x^{8m+6}\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{4.15^{m|8}.1^{\frac{7}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{(8m+7).11^{m+1|8}.1^{\frac{3}{8}|1}}\left[\frac{1}{8m+11}-\frac{1}{4\sqrt{2}}(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11}-\ldots+\frac{1}{8m+3}\right],$$

10)

$$\int_0^1 x^{8m+7}\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x$$

$$=-\frac{2^{m|2}}{4.1^{m+2|2}}[-\tfrac{1}{4}\lg 2+\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1})+\frac{1}{8m+12}].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

11)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^8}\lg x\partial x=-\frac{1^{\frac{1}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{2.1^{\frac{5}{8}|1}}[\tfrac{1}{5}+\frac{1}{4\sqrt{2}}(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)],$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x=-\frac{3\pi.\sqrt{2\pi}}{64.(1^{\frac{3}{4}|1})^2}(\tfrac{1}{6}+\frac{\pi}{8}),$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x=-\frac{1^{\frac{3}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{6.1^{\frac{7}{8}|1}}[\tfrac{1}{7}+\frac{1}{4\sqrt{2}}(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)],$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x=-\frac{\pi}{16}(\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{4}\lg 2),$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x=-\frac{4.1^{\frac{5}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{45.1^{\frac{1}{8}|1}}\left[\frac{10}{9}-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)\right],$$

$$\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^8}\lg x\partial x=-\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{80(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left(\frac{3}{5}-\frac{\pi}{8}\right),$$

$$\int_0^1 x^6 \sqrt{1-x^8} \lg x \partial x = -\frac{4.1^{\frac{7}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{77.1^{\frac{3}{8}|1}}\left[\frac{14}{33} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right)\right],$$

$$\int_0^1 x^7 \sqrt{1-x^8} \lg x \partial x = -\tfrac{1}{12}\left(-\tfrac{1}{4}\lg 2 + \tfrac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^1 x^8 \sqrt{1-x^8} \lg x \partial x = -\frac{1^{\frac{1}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{26.1^{\frac{5}{8}|1}}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) - \frac{47}{65}\right],$$

$$\int_0^1 x^9 \sqrt{1-x^8} \lg x \partial x = -\frac{3\pi.\sqrt{2\pi}}{64.7(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{11}{42}\right),$$

$$\int_0^1 x^{10} \sqrt{1-x^8} \lg x \quad = -\frac{1^{\frac{3}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{30.1^{\frac{7}{8}|1}}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) - \frac{13}{105}\right],$$

u. s. w.

Hierin ist:

$$1^{\frac{1}{8}|1} = 0{,}9417426997, \qquad 1^{\frac{3}{8}|1} = 0{,}8889135692,$$

$$1^{\frac{5}{8}|1} = 0{,}8965742800, \qquad 1^{\frac{7}{8}|1} = 0{,}9534458127,$$

$$\lg 1^{\frac{1}{8}|1} = 0{,}973932262348 - 1, \qquad \lg 1^{\frac{3}{8}|1} = 0{,}948859535702 - 1,$$

$$\lg 1^{\frac{5}{8}|1} = 0{,}952586276143 - 1, \qquad \lg 1^{\frac{7}{8}|1} = 0{,}979296015794 - 1.$$

(Fortsetzung im nächsten Hefte.)

XXIII.

Allgemeine Auflösung der Gleichungen des vierten Grades, nebst einigen Bemerkungen über die Gleichungen des fünften Grades.

Von
dem Herausgeber.

Zwischen vier Grössen t, u, v, w findet jederzeit die folgende identische Gleichung Statt:

1)

$$\begin{aligned}&(t+u+v+w)^4\\ &-4t(t+u+v+w)^3\\ &+2(3t^2-u^2-v^2-w^2)(t+u+v+w)^2\\ &-4\{2uvw+t(t^2-u^2-v^2-w^2)\}(t+u+v+w)\\ &+t^4-2t^2(u^2+v^2+w^2)+8tuvw-4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2)+(u^2+v^2+w^2)^2=0,\end{aligned}$$

von deren Richtigkeit man sich ohne Schwierigkeit durch Rechnung überzeugen kann. Wenn man nun mit dieser Gleichung die aufzulösende Gleichung des vierten Grades:

$$2) \ldots\ldots \quad x^4-4ax^3+6bx^2-4cx+d=0$$

vergleicht, so wird offenbar

$$3) \ldots\ldots\ldots \quad x=t+u+v+w$$

sein, wenn man die Grössen t, u, v, w mittelst der folgenden Gleichungen bestimmt:

4)

$$t = a,$$

$$3t^2 - u^2 - v^2 - w^2 = 3b,$$

$$2uvw + t(t^2 - u^2 - v^2 - w^2) = c,$$

$$t^4 - 2t^2(u^2+v^2+w^2) + 8tuvw - 4(u^2v^2+v^2w^2+w^2u^2) + (u^2+v^2+w^2)^2 = d.$$

Aus diesen vier Gleichungen erhält man sehr leicht die vier folgenden Gleichungen:

5)

$$t = a,$$

$$u^2 + v^2 + w^2 = 3(a^2 - b),$$

$$2uvw = 2a^3 - 3ab + c,$$

$$4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) = 12a^4 - 24a^2b + 4ac + 9b^2 - d;$$

oder, wenn man der Kürze wegen:

6) . . . . $u_1 = 4u^2,\quad v_1 = 4v^2,\quad w_1 = 4w^2$

setzt, die vier folgenden Gleichungen:

7)

$$t = a,$$

$$u_1 + v_1 + w_1 = 12(a^2 - b),$$

$$u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1 = 4(12a^4 - 24a^2b + 4ac + 9b^2 - d),$$

$$u_1v_1w_1 = 16(2a^3 - 3ab + c)^2;$$

und weil nun

$$X^3 - (u_1 + v_1 + w_1)X^2 + (u_1v_1 + v_1w_1 + w_1u_1)X - u_1v_1w_1$$
$$= (X - u_1)(X - v_1)(X - w_1)$$

ist, so sind offenbar u_1, v_1, w_1 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung:

8)

$$\left.\begin{array}{l} X^3 \\ -12(a^2 - b)X^2 \\ +4(12a^4 - 24a^2b + 4ac + 9b^2 - d)X \\ -16(2a^3 - 3ab + c)^2 \end{array}\right\} = 0,$$

können also durch Auflösung dieser Gleichung jederzeit gefunden werden; weil das letzte Glied negativ ist, so hat dieselbe bekanntlich immer mindestens e i n e reelle positive Wurzel, und die an-

deren Wurzeln sind entweder beide reell und positiv, oder beide reell und negativ, oder beide imaginär.

Wenn man die Wurzeln der Gleichung 8) bestimmt hat und zwei derselben für u_1, v_1 setzt, so erhält man wegen der Gleichungen 6) für u, v offenbar Ausdrücke von der Form:

$$9) \ldots\ldots \quad u = \pm U, \quad v = \pm V.$$

Setzt man nun ferner:

$$10) \ldots\ldots \quad W = \frac{2a^3 - 3ab + c}{2UV},$$

so erhält man wegen der aus 5) bekannten Gleichung

$$2uvw = 2a^3 - 3ab + c$$

für u, v, w offenbar die vier folgenden Systeme von Werthen:

$$11) \ldots \begin{cases} u = +U, & v = +V, & w = +W; \\ u = +U, & v = -V, & w = -W; \\ u = -U, & v = +V, & w = -W; \\ u = -U, & v = -V, & w = +W; \end{cases}$$

also sind, weil

$$t = a, \qquad x = t + u + v + w$$

ist, die vier Wurzeln der aufzulösenden Gleichung 2) des vierten Grades die folgenden:

$$\begin{aligned} &a + U + V + W, \\ &a + U - V - W, \\ &a - U + V - W, \\ &a - U - V + W; \end{aligned}$$

wodurch demnach die gegebene Gleichung jetzt vollständig aufgelöst ist, indem wir alle weiteren erforderlichen Entwickelungen füglich ganz dem Leser überlassen können.

Wenn wir der Kürze wegen

12)

$$\begin{aligned} &P = 3t^2 - u^2 - v^2 - w^2, \\ &Q = 2uvw + t(t^2 - u^2 - v^2 - w^2), \\ &R = t^4 - 2t^2(u^2 + v^2 + w^2) + 8tuvw - 4(u^2v^2 + v^2w^2 + w^2u^2) + (u^2 + v^2 + w^2)^2 \end{aligned}$$

setzen, so haben wir jederzeit die folgende identische Gleichung:

13)

$$\left.\begin{array}{l}(t+u+v+w)^5\\ -2(8t^2-P)(t+u+v+w)^3\\ +4(2tP-Q)(t+u+v+w)^2\\ -(16tQ-R)(t+u+v+w)\\ +4tR\end{array}\right\}=0.$$

Ist nun die Gleichung des fünften Grades:

14) . . . . $x^5-ax^3+bx^2-cx+d=0,$

in welcher das zweite Glied auf bekannte Weise weggeschafft vorausgesetzt worden ist, aufzulösen; so wird

15) . . . . $x=t+u+v+w$

sein, wenn man die Grössen t, u, v, w aus den Gleichungen

15)

$$2(8t^2-P)=a,\quad 4(2tP-Q)=b,\quad 16tQ-R=c,\quad 4tR=d$$

bestimmt. Aus diesen Gleichungen erhält man aber nach und nach:

$$16tQ=c+R,$$

$$64t^2Q=4ct+4tR=4ct+d;$$

$$8tP=b+4Q,$$

$$128t^3P=16bt^2+64t^2Q=16bt^2+4ct+d;$$

$$16t^2=a+2P,$$

$$1024t^5=64at^3+128t^3P=64at^3+16bt^2+4ct+d;$$

also:

16) . . . . . $1024t^5-64at^3-16bt^2-4ct-d=0,$

aus welcher Gleichung t bestimmt werden muss, woraus man dann ferner mittelst der Gleichungen 15) leicht P, Q, R findet. Hat man aber die Grössen t, P, Q, R gefunden, so lassen sich mittelst der Gleichungen 12) auch u, v, w auf ganz ähnliche Art wie vorher bei den Gleichungen des vierten Grades finden, wie auf der Stelle erhellet und hier nicht weiter ausgeführt zu werden braucht. Da aber die Gleichung 16), mittelst welcher t be-

stimmt werden muss, selbst vom fünften Grade ist; so sieht man, dass sich auf diesem Wege die Gleichungen des fünften Grades nicht auflösen lassen, welches zu zeigen hier nur der alleinige Zweck war, weshalb ich mich auch mit der Betrachtung solcher Gleichungen des fünften Grades, in denen das zweite Glied fehlt, begnügt habe, aber auf den allgemeinen Fall vielleicht späterhin noch zurückkommen werde.

Bemerken will ich nur noch schliesslich, dass die Gleichungen 15) vielleicht geeignet sein dürften, um darauf eine zweckmässige näherungsweise Auflösung der Gleichungen des fünften Grades zu gründen, was ich jetzt aber nicht weiter untersuchen will.

Druckfehler.

Thl. XXXVIII. S. 239. In den drei letzten Formeln auf dieser Seite muss statt des Bruchs $\frac{P_1+P_0\cos w_{01}}{\sin w_{01}{}^2}$ der Bruch $\frac{P_1+P_0\cos w_{01}}{P_0\sin w_{01}{}^2}$ gesetzt, also im Nenner der Factor P_0 hinzugefügt werden, wie auf der Stelle in die Augen fällt.

Thl. XL. S. 135. Z. 10. statt „Neuerung“ setze man „Neuerungen.“

XXIV.

Rede von den Verdiensten der schwedischen Gelehrten um die Mathematik und Physik.

Zur Feyer des hohen Geburtsfestes des allerdurchlauchtigsten Königs und Herrn GUSTAV IV. ADOLPHS, im grossen Hörsaale der Universität Greifswald gehalten

von

I. F. Droysen,

der W. W. Doctor und Adj. der philos. Facultät,

den 1. Nov. 1799.

Sr. Excellenz dem Herrn Baron von Cederström, Vice-General-Gouverneur, Akademie-Kanzler, vormaligem General en Chef, General-Major der Cavallerie, General-Adjutanten, Obristen der Norderschonschen Cavallerie, Kommandeur des Königlichen Schwerdt-Ordens mit dem grossen Kreuze, in tiefster Ehrerbietung gewidmet vom Verfasser.

(Greifswald. 1800.)

Vorbemerkung des Herausgebers.

Als ich schon vor mehreren Jahren von der Existenz der im Nachfolgenden mitgetheilten Rede Kenntniss erhielt, suchte ich mich auf jede mögliche Weise in deren Besitz zu setzen, stand aber endlich von allen meinen Bemühungen und Nachforschungen ab, nachdem ich zu der vollständigen Gewissheit gelangt war, dass dieselbe sich selbst nicht mehr auf der hiesigen Universitäts-Bibliothek befand, wo sie allerdings früher vorhanden gewesen war. Vor einiger Zeit führte jedoch ein glücklicher Zufall zu meiner grossen Freude diese von dem späteren, leider schon im Jahre 1814 verstorbenen, Professor der Mathematik und Physik Dr. Droysen bei einer akademischen Festlichkeit gehaltene Rede dennoch in meine Hände. Dass dieselbe an manchen Mängeln und Unvollständigkeiten leidet, und nicht tief genug auf ihren Gegenstand eingeht, liegt auf der Hand, was aber theilweise in der

Natur und Bestimmung einer solchen Rede seinen Grund hat und darin hinreichende Entschuldigung findet. Der Gegenstand derselben ist ein sehr wichtiger und interessanter. In Schweden haben die Mathematik und Naturwissenschaften schon in sehr früher Zeit geblühet und stets ausgezeichnete Vertreter besessen; dieselben haben dort, wo allgemeine Bildung selbst bis in die unteren Schichten des Volkes verbreitet ist, jederzeit einen sehr wesentlichen Theil der höheren Bildung ausgemacht, namentlich auch auf den Schulen, wie dies selbstverständlich auch gegenwärtig der Fall ist, wo so viele treffliche schwedische Mathematiker, Astronomen und Physiker unserer Wissenschaft zur wahrhaften Zierde gereichen. Die Geschichte der Mathematik und Physik in Schweden, namentlich die ältere, ist, besonders auch in Deutschland, nur sehr wenig bekannt, und bietet doch des Interessanten und Wichtigen so Vieles dar. Deshalb hielt ich es für zweckmässig, das Archiv zu benutzen, die mehrerwähnte Rede — die namentlich auch eine grosse Menge verdienstlicher und sehr nützlicher literarischer Nachweisungen enthält, — der vollständigen Vergessenheit zu entreissen und vor dem gänzlichen Untergange zu bewahren, weshalb ich dieselbe im Folgenden hier wieder abdrucken lasse. Ich hatte mich ursprünglich entschlossen, nur das eigentlich Historische und Literarische aufzunehmen, den bei solchen akademischen Festreden gewöhnlichen Eingang und Ausgang dagegen ganz wegzulassen. Bei näherer Ueberlegung glaubte ich mich dadurch aber eines Unrechts gegen den verewigten, mehrfach verdienten Verfasser schuldig zu machen, überdies auch den Gesammteindruck zu beeinträchtigen. Deshalb mögen die Leser entschuldigen, dass ich die Rede fast wörtlich, selbst mit der Dedication und mit Beibehaltung der Orthographie, nur mit Verkürzung des zu langen, gar nicht wesentlich zur Sache gehörenden Schlusses, im Folgenden wiedergebe, und mir mit dem Wunsche zu schliessen erlauben, dass der von mir veranlasste neue Abdruck vielleicht zu Berichtigungen, namentlich aber zu recht vielen weiteren Mittheilungen über die Specialgeschichte der Mathematik und Physik in einem Lande Veranlassung geben möge, in welchem diese Wissenschaften zu allen Zeiten so sehr geblühet haben und auch gegenwärtig so viele ihrer ausgezeichnetsten Vertreter zählen.

Der Herausgeber.

Magnifice Academiae Rector,

Hochwürdige, Wohlgebohrne, Hochgelahrte, Hocherfahrne, Hochzuverehrende Lehrer dieser hohen Schule,

Hochwohlgebohrne, Wohlgebohrne, Hochehrwürdige, Hochzuehrende Herrn,

Hochgeschätzte Herrn Commilitonen, Hochzuehrende Herrn.

Wissenschaften, welche auf die Bildung des Geistes, auf die Vervollkommung und Veredelung seiner Fähigkeiten und Kräfte bedeutenden Einfluss haben; Wissenschaften, welche durch die, ihnen vor andern eigenthümliche Gewisheit, Wahrheit und Unum-

stösslichkeit das Gepräge einer glücklich zu Stande gebrachten Vollendung an sich tragen; Wissenschaften, welche durch ihre Brauchbarkeit und Anwendbarkeit im gemeinen Leben, und bei der Erwerbung menschlicher Bedürfnisse unentbehrlich sind; Wissenschaften wie die Mathematik und Physik mussten sich frühe, wie noch Dunkelheit und Schatten die meisten Zweige des menschlichen Wissens bedeckte, Liebe, Achtung und sorgfältige Bearbeitung erwerben.

Je unleugbarer die Mathematik den Verstand im Urtheilen und Schliessen, den Witz im Aufsuchen des Aehnlichen und Unähnlichen, die ganze Denkkraft in Ordnung und Bestimmtheit übt und schärft; je unleugbarer sie den Sinn für Wahrheit verfeinert, Begriffe verbinden und zergliedern, lange Schlussreihen mit Leichtigkeit übersehen und aus fruchtbaren Säzzen wichtige Folgerungen ableiten lehrt; um desto unwidersprechlicher erweiset sie dadurch ihren Nuzzen für die Bildung des Geistes.

Die Wahrheit und unerschütterliche Gewisheit ihrer Grund-, Lehr- und Folgesäzze, verdanket sie nicht einer auf Aehnlichkeit und Gleichheit vorkommender Fälle berechneten Erfahrung, oder einer wankenden Speculation; nein, sie ist in ihrem Wesen selbst gegründet, indem sie auf Anschauungen, frei von aller Erfahrung, durch sich selbst möglich, und in der Darstellung würklich, beruhet, und daher wie die unerforschte Einrichtung des Geistes unerschütterlich.

Ihr Nuzzen, ihr Einfluss auf alle Theile des menschlichen Wissens, leuchtet eben so unverkennbar deutlich ein; nicht nur mittelbar, als Vorbereitungswissenschaft, auch unmittelbar durch ihre Anwendung auf die Bereicherung und Bestimmung der Wissenschaften, auf die Vervollkommung alles dessen, was zur Befriedigung menschlicher Bedürfnisse und zur Erhöhung der Genüsse dieses Lebens führt, würkt sie auf dem weiten Felde des menschlichen Wissens mit gleich glücklichem Erfolge.

Gleiche Vorzüge geniesset mit ihr die Naturlehre, in wie ferne sie mit ihr und durch sie auf unumstösslichen Principien beruhet, und ihrer Anwendung die erste Hand bietet.

Bei so glänzenden Vorzügen mussten diese Wissenschaften sehr frühe, schon in den ersten Jahren der Kindheit des Menschengeschlechtes, nach dem Maasse der Kräfte jenes Zeitalters, bearbeitet werden. Die Unentbehrlichkeit der Maasse für Räume und Zeiten, so wie die Beobachtung der um ihn her mit Regelmässigkeit vorgehenden Erscheinungen mussten den Menschen

auf die nähere Bestimmung und Betrachtung derselben führen; dadurch wurden Bestimmungen der Grösse im Raume und in der Zeit, Maasse und Zahlen möglich.

Geführt von Bedürfniss und Neugierde, durch Erfahrung und Zufall unterstützt, mussten diese Wissenschaften, die das allgemeinste Interesse belebte, riesenmässige Fortschritte machen, die wir mit Bewunderung anstaunen. Wie ungeheuer ist nicht der Abstand von dem ersten Anschauen eines Zuschauers, der zum gestirnten Himmel aufblickt, bis zu der Kenntniss, nach Minuten und Secunden die vergangenen und zukünftigen, nach Jahrhunderten sich ereignenden Zustände dieses Weltsystems angeben, an dem unermesslichen Gewölbe den Punct bestimmen zu können, wo nach verflossenen Jahrhunderten jeder Körper dieses Systemes stehen wird!

Welch ein ungeheurer Abstand von der Ausmessung des kleinen Raums von wenig Schritten, den die Höhle des ersten Bewohners beschränkte, bis zur Berechnung der Oberfläche und des körperlichen Inhalts der Erde, der Sonne, der Planeten, und ihrer alle Maasse übertreffenden Entfernungen untereinander!

Welch ein Abstand, von dem Schaudern, das der Mensch bei der grossen furchtbaren Erscheinung am Himmel empfand, bis zu der Kraft dem Feuer des Himmels seine Bahn vorzuzeichnen. — Von der blossen Betrachtung der Körper bis zu der Kunst, das Unsichtbare sichtbar darzustellen, und der Natur gleich, selbst schöpferisch ihre Körper zerlegen und wieder neu umbilden zu können!

Diese und ähnliche Fortschritte in diesen Wissenschaften, diese Höhe, zu welcher sich der menschliche Geist emporschwang, sind Würkungen seiner rastlosen Thätigkeit, Folgen seiner Bedürftigkeit, die Erfahrungen, Beobachtungen, tiefes Nachdenken, Vereinigung einzelner Kräfte, Versuche, nachdem man gelernet hatte, die Natur im Kampf ihrer einzelnen Kräfte zu versezzen und zu belauschen, und oft ein glücklicher Zufall (in der Hand des Weisen von Wichtigkeit) befriedigen lehrten.

Mit Dankbarkeit und Ehrfurcht blicken wir auf die grossen Männer vergangener und gegenwärtiger Zeiten, die durch ihren grossen Geist und ihre rastlose Thätigkeit zu diesen Fortschritten mitwürkten; mit Freude überrechnen wir die grosse Anzahl derselben und die glücklichen Umstände, welche ihnen hülfreich die Hand boten. Nicht an ein Land, nicht an ein Klima, ja nicht an einen Welttheil gebunden, nein überall hob sich der Geist in

Vervollkommung des Wissens empor; Geschlechter und Reiche versanken, die Wissenschaften erhielten sich; grosse Staatsumwälzungen schienen dem Ganzen den Umsturz zu drohen, die Wissenschaften grünten im Verborgenen, oder wuchsen selbst mühsam unter den Ruinen hervor; ja an den äussersten Enden der Erde, wenn ich so sagen darf, fanden sie Stoff und Nahrung für ihren Wachsthum.

Das allgemeine Interesse, das die mathematischen und physikalischen Wissenschaften mit sich führen, belebte nicht nur die Gelehrten von Profession; Gewalt und Reichthum unterstützten mit vorzüglichem Eifer grosse Unternehmungen, welche die Kräfte des Privatmannes überstiegen; Künstler arbeiteten den Gelehrten in die Hände; Reisende beobachteten in entfernten Himmelsstrichen; Beschüzzer und Freunde dieser Wissenschaften belebten durch ihren Beifall und durch Belohnungen den Eifer für dieselben, und so stiegen sie nach und nach in verfliessenden Jahrhunderten zu jener Höhe empor, auf welcher sie jezt die Liebe und Achtung geniessen, die ihnen der Kenner, wie der Laie zollt.

Unter Gustav Adolphs Regierung, wo die Wissenschaften und Künste, auf einem durch Friede gesegneten Boden, fern von den Schrekken des Krieges, durch hohen Beifall und erhabenes Beispiel gepfleget und gewartet werden, wo die Blüthen, von seinem Scepter geschützt, schön in des Friedens Sonne aufblühen, wo die Früchte mit Sorgfalt und Dank geerndtet werden; in Gustav Adolphs Staaten haben auch diese Wissenschaften, Mathematik und Naturlehre, vorzüglich geblühet, und stehen noch durch die Bemühungen grosser Männer gewartet in dieser schönen Blüthe.

Dem heutigen Tage, dem Feste des ersten Lebenstages unsres geliebten Königs, sahen wir alle mit gerührtem Herzen entgegen, wir feiern ihn in der Stille mit Seegnungen für Gustav Adolphs Wohl; und wenn wir ihn hier feierlich begehen, wie können wir es zweckmässiger, als wenn wir uns des seegenvollen Einflusses seinesScepters auf die Wissenschaften freuen?

Gönnen Sie mir daher, n. St. u. W. h. A., Ihre ermunternde Aufmerksamkeit, wenn ich Ihnen

die Verdienste schwedischer Gelehrten um die Mathematik und Physik

ins Gedächtniss zurückzurufen bemühet seyn werde, Verdienste, auf die Gustav Adolphs und seiner hohen Vorfahren weise Regierung so glänzenden Einfluss hatte.

Es würde mich ohnstreitig zu weit führen, wenn ich hier alle die Verdienste einzelner Gelehrten und Schriftsteller Schwedens, die mit Glück, theils zur weitern Ausbildung dieser Wissenschaften, theils zu deren Verbreitung in ihrem Vaterlande mitwürkten, aufzählen wollte; ich muss mich hier begnügen, Ihnen, gleichsam in einem Gemählde, das Eigenthümliche, Grosse, Originelle, was die Schweden in diesen Wissenschaften leisteten, zu entwerfen; und rechne bei diesem mangelhaften Entwurfe auf ihre schonende Beurtheilung.

Wenn gleich das Dunkel, welches über die ersten Kindheits-Jahre eines Volkes ruhet, unserm Auge das Entstehen und den Wachsthum der Wissenschaften verhüllt, wenn wir nur aus zweifelhaften Sagen, aus der Aehnlichkeit des Aufkeimens derselben bei Völkern anderer Welttheile, die wir in diesem kindischen Alter kennen lerneten, zu einzelnen Muthmassungen berechtigt zu seyn scheinen; so finden wir dennoch unverkennbare Spuren, aus denen wir die ersten Kenntnisse, welche auf Naturlehre und Mathematik Bezug haben, auffinden können.

Der Anblick des gestirnten Himmels musste den ersten Bewohnern eines jeden Landes, unter jedem Himmelsstriche merkwürdig, und die an demselben regelmässig vorgehenden Erscheinungen auffallend seyn. Die für eines jeden Volkes individuellen Zustand, von Lage und Klima abhängig, mehr oder weniger interessanten Erscheinungen bemerkten sie bald, und deuteten sie durch Nahmen und Zeichen an. So war dem Egypter die Zeit, wo der Sirius, der bisher nahe bei der Sonne ungesehen in ihren Strahlen gestanden hatte, sich zum erstenmahle in der Morgendämmerung zeigte (ortus heliacus Sirii) merkwürdig; an diesem Stande der Sonne erkannte er die Wiederkehr der für ihn so wichtigen Zeit, wo der Nil seine Ueberschwemmung begann. Der von der Viehzucht lebende Chaldaeer erkannte aus dem Stande der Sonne beim Widder, die Wiederkehr der Zeit, wo sich seine Heerde, sein Reichthum vermehrte, und gab vielleicht darum diesem Gestirne seinen Nahmen; so veranlasste vielleicht die beobachtete gleiche Länge der Tage und Nächte, wenn die Sonne im Zeichen der Waage stand, die Benennung dieses Gestirnes, so andre Bedürfnisse und Beobachtungen damaliger Zeiten auf der Erde die Benennung der Gestirne im Thierkreise. — Und wenn die Bewohner der weiten Ebenen Sennar als die ersten

Astronomen angesehen werden, weil nächtliche Reisen und ein unbegränzter Horizont sie vorzüglich dazu aufforderten; mussten dann nicht die Bewohner der Ebenen Nordens, von hellen, sehr langen Winternächten, von so vielen merkwürdigen Erscheinungen am nördlichen Himmel aufgefordert, frühe zu ähnlichen Kenntnissen gelangen können? Man findet daher auch frühe, schon bei den ältesten Völkern des Nordens Eintheilung der Zeit in Jahre, Monate und Tage; sie beobachteten, wie Magnus Celsius[1]) versichert, mit Genauigkeit die Mondencirkel, und ihre Runen[2]) sind uralte Documente ihrer astronomischen Kenntnisse; Kenntnisse, die nicht in den Händen Einzelner, sondern das Eigenthum fast eines jeden Landmannes waren. So erzählt Rudbeck, dieser mühsame Forscher des Alterthums, der 11000 Versuche über die Höhe der Dammerde[3]) anstellte, um daraus auf das Alter der bewohnbaren Erde zu schliessen, dass er einen armen Landmann fand, der durch Hülfe seiner ausgestreckten Finger, wie durch ein Astrolab, die scheinbare Entfernung der Sonne und des Mondes mass, um daraus die Zeit des Neumondes zu bestimmen[4]).

---

1) Om Helsinge Runorne Stockh. 1677.

2) Von den vielen über die Runen, diese merkwürdigen Kalender der alten nordischen Völker, herausgekommenen Schriften, will ich hier nur anführen: Rudbecks Atlantica. Tom. II. 1689. Olof Celsius Runae Medelpadicae. Ejusdem Epistola ad Magliabeckium de Runis Helsingicis.

Es werden deren über 120 ältere und neuere auf dem Observatorium in Upsala aufbewahret. (L. B. Busser Utkast till Beskrifning om Upsala. 1773. II. Thl. 1. Cap.)

3) Rudbeck. Atlant. Tom I. p. 130.

4) Diese seltsame Bestimmungsart verdient eine Erörterung. Nach Rudb. Atl. T. II. p. 633. bestimmt der Landmann den Neumond aus dem Vollmonde auf folgende Weise: er wählt einen Tag vor oder nach dem Vollmonde, wo er die Sonne zugleich mit dem Monde über dem Horizonte erblicken kann, und misst alsdann die scheinbare Entfernung derselben von einander nach Hahnentritten (Hahnefiät) (spithamis); so, dass wenn von dem Monde in Osten die Sonne gegen Westen 4 Hahnentritte entfernt wäre, noch 4 Tage bis zum Anfange des Neumondes fehlen; stände aber der Mond der Sonne gegen Westen auch um 4 Hahnentritte entfernt, so sind eben so viele Tage nach dem Neumonde verflossen. Die Messung dieser scheinbaren Entfernung geschieht auf folgende Weise: Man streckt die Hand vor sich her gegen den Mond zu aus, öfnet den Daumen und Zeigefinger so weit man kann, sieht mit dem Auge längst der äussersten Spitze der beiden Finger; so ist die Entfernung der beiden Spitzen einem Hahnentritte gleich, und der dadurch am Himmel bestimmte Bogen ein Maass für die scheinbare Entfernung. Wenn nun ein Mensch von gewöhnlicher Länge (6 Fuss) seinen Arm ausstreckt, so ist die Entfernung vom Auge bis zur Spitze des Daumen $2\frac{1}{2}$ Fuss = 5 Hahnentritte. Beschreibt man mit

Ein Beweis, wie erfindungsreich Bedürfniss macht. Der Gebrauch der Zahlen war den alten Bewohnern Schwedens, die nicht bis 10, sondern bis 12 zählten, ebenfalls bekannt, und in der Rechenkunst sollen sie besonders erfahren gewesen seyn[5]; so wie Landmesskunst[6], Baukunst[7] und Tonkunst[8] unter ihnen bearbeitet wurden.

Der Gebrauch des Eisens, das Daland den Nahmen des eisentragenden gab[9]; die Reisen Others und Wulfstans von Norwegen nach Schleswig, eine der ersten Unternehmungen nordischer Nationen, die auf uns gekommen ist, zeigen Spuren von diesen Wissenschaften, oder vielmehr von Kenntnissen, die auf diese Wissenschaften Bezug haben, vorzüglich der Sternkunde[10]. Die Edda bewahret in Fabeln und Denksprüchen die Hauptzüge der Naturlehre, über die Natur und das Entstehen der Erde, der Sonne, des Mondes und der Menschen, der Winde und Wetter, und über die verborgenen Schätze der Erde; sie zeigt, wie schon die ältesten Bewohner Schwedens mit der Haushaltung der Natur vertraut waren; — und wie manche Spur aus jenem grauen Alterthume verwischte nicht noch die alles zerstörende Zeit.

Was so der emporstrebende Geist nach und nach an Kenntnissen mühsam errungen und erworben hatte, ward durch die Einführung des Christenthums, wenn nicht zum Theil niedergerissen, doch der Vergessenheit überliefert. Mit dem Dienste der heydnischen Gottheiten rotteten unwissende Reformatoren auch die zarten Keime dieser schönen Pflanzen aus, mit dem Aberglauben zertraten sie zugleich die jungen Sprösslinge mühsam

---

diesem Radius einen Kreiss, und trägt den Halbmesser in der Peripherie umher, so wird der Kreiss in 6 gleiche Theile oder 30 Hahnentritte getheilt, in 300 Zolle, der krummen Linie aber werden 340 gleiche Theile zukommen; die, welche den Daumen weiter zurük biegen können, werden Hahnentritte von 12 Zoll bilden können, und den Kreiss in 29 Theile theilen, welche den täglichen Bewegungen am Himmel entsprechen. So kann man auf diese freylich unvollkommene Weise die Tage vor und nach dem Neumonde bestimmen.

5) Hervaror saga p. 168. Erici Benzelii Collegium Historiae Suecanae. Lib. I. cap. 14.

6) Snorre Sturluson. Tom. I. p. 751.

7) Sven Brings andra del af des Samling af åtskilliga handlingar p. 16.

8) Wilkina sagan p. 202.

9) Dalins Sv. Histor. I. p. 64. k. Sverkers Lag. p. 418.

10) Olai Wormii Fasti Danici p. 31. Stierncrona de legibus Hyperboreis p. 33.

erworbener Kenntnisse. Die Religion, oder vielmehr das, was ihre Stelle vertreten musste, Ceremonien und Legenden der Heiligen, ersetzten das, als heydnisch verbannte Wissen in den Händen der Laien, und in den Mauern der Klöster und in den Händen der Mönche lag das wenige, was man von der Natur und ihren Gesetzen kannte, versteckt, vergraben, unbenuzt.

Die trüben Zeiten der Calmarschen Union, mit allen ihren schrecklichen Folgen, einheimischen Kriegen, bürgerlichen Unruhen, ausländischem Drucke und fürchterlich verheerenden Krankheiten waren für die Wissenschaften keine günstige Periode; und dennoch gelang es Sten Stures Bemühungen mitten unter diesen grauenvollen Zeiten[11]) den Grund zu der Universität in Upsala zu legen, und in ihr eine Quelle für die Wissenschaften zu eröffnen. Aber freylich kämpfte sie mit den unglücklichsten Umständen einen zu ungleichen Kampf, konnte dem traurigen Verhängnisse kaum ihre Erhaltung abgewinnen und verlohr sich oft wieder ganz. Die wenigen data, die uns die Gelehrtengeschichte aus jenen Zeiten aufbehalten hat, liefern uns nur die Nahmen von Mathematikern und Physikern, die theils Ausländer waren, theils zu wenig durch neue Entdeckungen bekannt geworden sind, oder deren Werke das fabelhafte und abergläubige Gepräge jener Zeiten an sich tragen. Nahmen wie Hemming Gad[12]). Dasipodius[13]). Tidemann[14]). Bero[15]). Posse[16]) und Laurenti[17]). Nur die Mechanik, doch mehr in so ferne sie das Werk der Hände nicht des, durch mathematische Kenntnisse unterstützten, Erfindungsgeistes ist, scheint bekannter gewesen zu seyn. Ueberhaupt scheint die Mechanik unter den Bewohnern der gebirgigten Gegenden Schwedens einen besondern Grad der Höhe erreicht zu haben; unter ihnen findet man nicht nur Künstler in

---

11) Ao. 1476. durch Hülfe des Bischoffs Ulfson. 1477 ward sie eingeweihet.

12) Bischof in Ostgothland, war ehemals Pabst Alexanders VI. Mathematicus und Kammerherr, lebte zu Sten Stures Zeiten in Schweden.

13) Ein Mönch zu Wadstena hat ums Jahr 1504—1505 auf Fürsorge des Erzbischofes Oernefort in der Domkirche zu Upsala ein astronomisches Uhrwerk eingerichtet. Peringskiölds monumenta uplandica. Tom. 2. p. 168.

14) Bischof zu Lingköping, schrieb computus ecclesiasticus.

15) Bero war ein berühmter Mathem. bei Kaiser Friedrich III. ein gebohrner Schwede, starb 1493.

16) Knut Posse, ein berühmter Chemiker zu Borrö, soll 1495 in Wiburg 16000 Russen durch einen ungeheuren Knall verjagt haben. Anth. Bahde de Tonitru factitio Viburgensi. Rhyzelii Sveogothia munita.

17) schrieb 1470. Principia Chymica.

diesem Fache, sondern Meisterstücke der Kunst und des Erfindungsgeistes; wovon die Modellkammer in Stockholm einen, dem Ausländer zu wenig bekannten Schatz enthalten soll[18]).

Gustav I. zerbrach endlich das fürchterliche Joch, das Schweden zu Boden drückte und legte den Grund zu seines Vaterlandes Wohl. Weise Verbesserungen im Staate und in der Kirche öffneten den Künsten und Wissenschaften den Weg, den Tyrannei und Alleinherrschaft im Reiche des Wissens, in den Händen der Mönche so lange verschlossen hatten, und wenn gleich Gustav nur zuerst seinen Blick auf das physische Elend seines Landes wenden musste, ehe er den Wissenschaften die Hand reichen konnte; wenn er niedergebrannte Städte und Dörfer, einen zu Grunde gerichteten Handel, umgeworfene Gerichtsstühle und zu Boden gedrücktes Ansehen zuerst empor half, so zeigte er doch zugleich durch die Achtung gegen auswärtige Gelehrte, die ihm aus Lübeck Mathematiker, aus Amsterdam Ingenieurs und Baumeister senden mussten, durch die Erziehung seiner Söhne, durch die Fürsorge für Upsala, wie sehr er die Wissenschaften schätzte und liebte. In dieser Periode, und während der Regierung König Erichs, Johann Sigismund und Carl; gleichsam der Vorbereitungszeit für die Wissenschaften, erregten auswärtige Gelehrsamkeit und Kenntniss fremder Sprachen den Eifer für die Wissenschaften.

Andreas Buraeus[19]) unternahm unter Carl IX. das grosse und schwierige Geschäft über ganz Schweden und Norwegen eine Charte zu entwerfen und in Kupfer stechen zu lassen, ihm verdanken wir durch sie, durch mehrere Specialcharten und durch seine Beschreibung des ganzen Landes[20]) die erste vollständige Kenntniss dieser Reiche.

Mit Gustav Adolph gieng eine neue Sonne über Schweden auf, und wenn er dem Lande Kraft und Ansehen von aussen, Ruhe, Sicherheit und Wohlstand von innen zu schaffen bestrebt war; so fieng nun auch unter ihm das Blüthenalter der Wissenschaften an.

Georg Stiernhjelm[21]), ein Mann, der unter seinen Zeit-

---

18) Nordberg Inventarium ösver de Machiner och Modeller. Stockholm b. Nordstr. 4 Octvbde 1777. er erwähnt 212 verschiedene Stücke.

19) 1571. zu Säbrå gebohren, Königl. Secret. Oberbaumeister und Generalmathemat. starb 1646.

20) Orbis arctoi inprimisque regni Sueciae nova et accurata descriptio. Witteb. 1630. 16mo.

21) 1598 in Daland gebohren, starb als Kriegsrath 1672 in Stockholm.

genossen durch physikalische und mathematische Kenntnisse glänzte; der erste seiner Landesleute, den die englische Academie der Wissenschaften als ihr Mitglied schätzte; der sogar als Zauberer wegen physikalischer Versuche verdächtig ward[22]), zeigt sich in seinen Schriften[23]) als ein einsichtsvoller Mathematiker; er hegte schon die grosse Idee eines allgemeinen Maasses und Gewichts, das in jeder Periode wieder aufgefunden werden und in jedem Lande brauchbar seyn könnte, eine Idee, die in neuern Zeiten Frankreichs Gelehrte so sehr erhoben haben. Als Director einer Commission für Maass und Gewicht schlug er als zum Grunde zu legende Einheit aller Gewichte einen Tropfen destillirten Wassers vor; er bestimmte das specifische Gewicht vieler Körper und verglich sie unter einander[24]).

Die während der Minderjährigkeit der Königin Christina zu Åbo gestiftete Academie[25]), das Beispiel und die Liebe dieser Regentin für die Wissenschaften, ihre Bemühungen die grössten Männer ihres Zeitalters aus allen Wissenschaften um sich zu sehen, die Gegenwart eines Descartes in Stockholm, eines Mannes, der mit dem Lichte, das er über die Wissenschaften verbreitete, die aristotelische Philosophie zu Boden warf; waren neue und grosse Aufmunterungen zum Flor der Wissenschaften.

Die cartesianische Philosophie und mit ihr Cartesius Art die Naturlehre zu bearbeiten, erwarb sich, so wie überall, auch in Schweden Beifall; ein heilsamer Skepticism, verbunden mit mathematischen Kenntnissen, führten die Naturlehre durch ihn aus den dunklen Träumereien, die sie verhüllten, ans Licht; aber zu wenig durch Erfahrung unterstützt, behandelte er die ganze Natur als ein Problem, zu dem Materie und Bewegung die einzigsten Data waren, und verfiel aus Begierde alles erklären zu wollen, in unhaltbare Hypothesen.

Seine Anhänger in Schweden, Andreas Spole[26]) und Joh. Billberg[27]) haben unverkennbare Verdienste um die Ausbrei-

---

22) s. Gezelii biographiska Lexicon öfver namnkunnige och lärde svenske Män 1780. 3 Th. 156.

23) Archimedes Reformatus. Stockholm 1640. 4to. Runa Svetica, ohne Jahrszahl und Druckort.

24) in seinem Archimedes Reformatus.

25) 1640.

26) 1630 in Småland gebohren, 1667 Prof. in Lund, 1679 Prof. der höhern Mathem. in Upsala, starb 1699.

27) Zu Mariestadt gebohren 1679, Prof. d. M. in Upsala, starb 1717 zu Strengnäs.

tung der cartesianischen Philosophie in ihrem Vaterlande, wie vorzüglich die Schriften des letztern, der ein eifriger Vertheidiger des Cartesius war, beweisen[28]).

Spole hatte sich auf seinen vielen Reisen durch Europa einen grossen Schatz mathematischer Kenntnisse erworben, wohlthätig für die Sternkunde verwandte er sie, wie er von dem Franzosen Piccard[29]) zu Hülfe gerufen ward, um die Polhöhe von Uraniborg, dem zertrümmerten Wohnsitze Tycho Brahes, des Vaters einer auf Erfahrung gegründeten Astronomie, auf der Insel Hven zu bestimmen; den Bemühungen dieser Männer verdanken wir den Gebrauch der grossen Arbeiten des unsterblichen Tychos und seiner Freundes Keplers.

Billberg und Spole reiseten in die entferntesten Gegenden Schwedens[30]) und kehrten mit wichtigen Beobachtungen über die Strahlenbrechung, mit genauern Bestimmungen der Polhöhe vieler Oerter und andern astronomischen Beobachtungen bereichert zurück[31]).

Durch genauere Kenntniss der Natur, ihrer Produkte, deren Bestandtheile und Würkungen entdeckte Urban Hjärn[32]), die Heilquellen zu Medevi, erforschte ihre Bestandtheile und eröffnete dadurch der Heilkunde eine neue Quelle. Er war es auch, der in Stockholm ein chemisches Laboratorium einrichtete[33]), wodurch diese Wissenschaft verbreitet und neue Entdeckungen vorbereitet wurden. Das Schloss zu Stockholm und das zu Drottningholm[34]) geben Beweise zu welcher Höhe die Baukunst in dieser Periode in Schweden gestiegen war.

Die Stiftung der Akademie zu Lund[35]) unter Carl XI. Minder-

---

28) s. Tract. de Cometis. Holm. 1682. Elementa Geometriae. Ups. 1687. Computatio Cyclica. Ups. 1688. Elementa geometr. planae 1691. etc. Seine Vertheidigung der Cartes. Philosophie gab noch zu der Königlichen Resolution von 1689 Anlass, die zu Gunsten der Denkfreiheit und der neuen Philosophie ausfiel. (Nettelbladts schwed. Bibliothek. Th. 2. p. 52.)

29) 1671.

30) 1695.

31) s. Billberg Tractat. de refractione Solis inoccidui in Septentrionalibus oris. Holm. 1696.

32) 1641. in Ingermannland gebohren, Präsident im Bergwerkscollegium, König Carl XI. Leibmedicus, starb 1724. (tract. om Medevi Brunn. Stockh. 1679.)

33) Acta laboratorii Chymici. Stockholm 1706.

34) Die Risse dazu entwarf Tessin.

35) 1660.

jährigkeit, die Anlegung eines mechanischen Laboratoriums[36]), eines Landmesser-Comtoirs[37]), jenes zum Behuf des Bergbaues und der Oeconomie, dieses um geschickte erprobte Landmesser anstellen zu dürfen (eine so vielen Ländern fehlende, treffliche Einrichtung) sind Beweise wie die Mathematik und Naturlehre mit ihren Disciplinen, unterstützt durch die Fürsorge der Regenten und die Thätigkeit der Gelehrten, emporstiegen.

Der grosse Geist eines Polhem[38]) umfasste mit unglaublicher Kühnheit Werke, die nicht nur durch ihre Grösse und der Vergänglichkeit Trotz bietende Dauer, sondern auch durch geniereiche Ausführung, als Denkmähler, seinen Ruhm der Nachwelt aufbewahren. Unter unglücklichen Umständen gebohren, war er genöthiget seine Kenntnisse der Mathematik und Naturlehre, die einzig den Mechanikus von dem Handwerker unterscheiden können, mit Gewalt der Lage seiner Verhältnisse abzuzwingen, er überstieg auf der rauhen Bahn seiner Jugendjahre glücklich alle Hindernisse, die seiner Wissbegierde entgegen standen. Die Erfindung mehrerer für den Bergbau nützlichen Maschienen[39]) verschafften ihm die Stelle eines Bergmechanikus; er errichtete das mechanische Laboratorium und erfand für Manufakturen und Fabriken viel Neues und Nüzliches[40]). Die grossen Unterneh-

---

36) 1683.

37) 1688.

38) Christoph Polhem 1661 zu Wisby gebohren, musste anfangs durch Dienen und kleine Handarbeiten sein Brod erwerben; der Mangel an Theorie, den er bei seinen künstlicheren Werken, als Uhren und dergleichen, empfand, führten ihn auf die Nothwendigkeit der Erlernung mathematischer Wissenschaften und der lateinischen Sprache; nachdem er diese mit vieler Mühe erlernet hatte, gieng er nach Upsala, wo er zuerst Aufmerksamkeit durch Herstellung und Verbesserung der astronomischen Uhr im Dome erregte.

39) Ao. 1960.

40) Die von ihm erfundene Säemachine, Dreschmaschine, ein Pflug Hügel zu ebenen (Tufplog) eine Machine die Erdklösse zu zerschellen (Mullbräcka) werden gerühmt. Auf dem Harz, wohin er von Georg I. gerufen ward, sind noch manche seiner Einrichtungen bekannt. Die bei uns unter dem Nahmen der schwedischen Schlösser bekannten, gut eingerichteten Vorlegeschlösser sind seine Erfindung und heissen in Schweden Polhems-lås. Er starb 1751. als Kommand. des K. N. O. (Åminnelse-Tal af Klingenstierna 15. Jun. 1753.)

Sein Sohn Gabriel Polhem 1700 in Fahlu gebohren, ist im Auslande wie in Schweden berühmt geworden, er bauete die Münze in Kassel, er unterstützte seinen Vater in dessen letzten Lebensjahren, und es ist bei den grossen Unternehmungen der Polhem schwer zu bestimmen, was dem einen und dem andern eigenthümlich zugehört. Er starb als Kammerherr und R. d. K. N. O.

mungen aber, die seinen Nahmen verewigen, sind der Bau der Dokke bei Carlscrona[41]), der Schleusenbau im Süderstrom in Stockholm[42]), und der kühne vielleicht nicht ganz reife Plan des Baues bei Trolhätta[43]). Was er begann und vielleicht hin und wieder durch zu wenige Erfahrungen belehrt, zu kühn unternahm, ward durch die Bemühungen eines Thunberg[44]), durch dessen richtiger beurtheilten Weg, durch unerschütterliche Geduld und Beharrung, durch schöpferischen Erfindungsgeist verbessert und vollendet. Ihm verdanket Carlscrona seinen Hafen und den Gebrauch der Dokken. Je kühner dies Werk war, je mehr Hindernisse die Natur darbot, desto bewundernswürdiger ist die glückliche Vollendung[45]).

Er entwarf einen in der Ausführung zweckmässigeren Plan zum Bau bei Trolhätta, dessen glücklichern Erfolg man entgegen sieht.

Die Schriften des jüngeren Polhems, die theils in den Abhandlungen der Ak. d. W., von deren ersten Mitgliedern er einer war, theils besonders gedrukt sind, zeigen seine mathematischen Kenntnisse, diese liebte auch Karl XII. der selbst in Auflösung algebraischer Aufgaben Vergnügen fand, der statt des Gebrauchs von 10 Ziffern, deren 6 vorschlug, an ihm und unterhielt sich oft mit ihm über die mathematischen Wissenschaften[46]).

Mit den Stiftungen der Akademien und gelehrten Gesell-

1772. — (Åminnelse-Tal öfver H. G. Polhem. d. 14. Jun. 1775. af Wargentin. Gezeli Biogr. Lexicon. p. 329.)

41) s. Artificia nova mechanica Receptacula navalia et aggeres aquaticos construendi. Amsterd. 721.

42) Eine Schleuse 100 Ellen lang, 16 Ellen breit und 10 Fuss tief zwischen 2 Gewässern, von denen das eine gewöhnlich 12 oder 13 Fuss höher als das andere ist, ward nach 9 Jahren durch ungeheuren Aufwand von Mühe und Kosten glücklich vollendet.

43) s. Büsch Uebersicht des gesammten Wasserbaues. Hamb. 1796. 3 B. 1 K. §. 61. — Elvius om Effect of Watn-Drifter. Stockholm 1742. 18 B. 5 K.

44) Daniel Thunberg 1710. zu Thunsjön in Angermannland gebohren, Director des Bauwesens, starb 1788. s. Memoria Dan. Thunberg. Mech. claris. Norberg. Lund.

45) s. Essays de batir sous l'eau, faites à la construction du nouveau bassin, ou des nouvelles formes à Carlscrona, par M. D. Thunberg, donnés au public par Jean Fellers, inprimés à Stockholm 1776. Büsch l. c. I. B. II. Cap. §. 9.

46) S. Nordberg Leben Carl XII. Th. II. p. 675. Svedenborg Miscellan. P. IV. §. 1.

schaften in einem Lande geht eine schöne Periode für die Wissenschaften an. Die engere Verbindung der besseren Köpfe eines Landes, die Mittheilung angestellter Beobachtungen und gemachte Erfahrungen, die durch vereinte Kräfte mögliche Erreichung dessen, was für einzelne Fälle zu gross und zu schwer war; die genauere Prüfung und sorgfältigere Bearbeitung hingeworfener Ideen und die Verbindung mit den Gelehrten des Auslandes können und müssen für die Wissenschaften reiche Ausbeute gewähren. Die Arbeiten dieser gelehrten Gesellschaften sind gleichsam die Niederlage der Produkte der vorzüglichen Köpfe dieser Nation; hier werden sie von dem Freunde der Wissenschaft gesucht, hier werden sie der Folgezeit aufbewahrt.

In den Verhandlungen der gelehrten Gesellschaften Schwedens findet man die wichtigen Entdekkungen und Erfindungen der Gelehrten Schwedens in diesem Jahrhunderte, und gerne verweile ich in dieser, für die Wissenschaften schönen Periode, wo allgemeines Interesse die wichtigen Erfindungen dieses Jahrhunderts begleitet; mit Vergnügen zähle ich hier die Verdienste einiger Männer aus der grossen Reihe derer auf, die mit Eifer, Nuzzen und Glück für die Mathematik und Naturlehre arbeiteten.

Schon 1720 vereinigten sich in Upsala mehrere Gelehrte, um vierteljährlich die Abhandlungen schwedischer Schriftsteller, die dem Auslande unbekannt waren, durch den Druck bekannt zu machen, vorzüglich durch die Bemühungen Benzelius[47]) unterstützt, und 1728 ward diese Gesellschaft durch eine Königliche Verordnung bestätigt; die physikalischen Wissenschaften, die besonders ein Gegenstand der Aufmerksamkeit und der Bemühung ihrer Mitglieder waren, verdanken ihr viele Bereicherung[48]).

Die Königlich schwedische Akademie der Wissenschaften ward 1739 gestiftet, durch Männer wie Höpken[49]), Bielke[50]), Linné und Triewald unter den glücklichsten Vorbedeutungen und 1751 von König Friedrich I. bestätigt. Den allgemeinen Beifall,

---

47) Eric Benzelius 1675 in Upsala gebohren, starb als Erzbischof 1743.

48) Ihre Arbeiten kamen bis 1750 anfangs vierteljährig unter dem Titel: acta Litteraria Sueciae und in der Folge unter dem Titel: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsaliensis heraus. (s. Weigels Einleitung zur allgemeinen Scheidekunst. Leipzig 1790. II. Stück. p. 457.)

49) Graf Höpken, Reichsrath, R. und C. aller K. O., gebohren 31. Mart. 1712 in Stockholm; starb 1789. s. Åminnelse-Tal d. 12. Mai 1790. af Schröderheim.

50) Graf Nils Adam Bielke, Reichsrath geb. zu Gothenburg 30. Jan. 1724, gestorben 20. Juni 1792. s. Åminnelse-Tal d. 13. Febr. 1793 af von Gedda.

den ihre Arbeiten in Europa erwarben, beweisen die Uebersezzungen derselben ins Dänische[51]), ins Lateinische[52]), Französische[53]) und Deutsche[54]). Die Reden bei Niederlegung der Präsidien[55]) enthalten für die Geschichte und den Wachsthum der Wissenschaften in einzelnen Perioden, treffliche Darstellungen. Die Gedächtnissreden[56]) im Rittersale, dem Andenken der Mitglieder gehalten, bewahren der Nachwelt die Verdienste und Lebenszüge derselben auf.

Reiche Beisteuern, Geschenke und Aufmunterungen vom königlichen Hause und einzelnen Privatpersonen sezten die Gesellschaft in den Stand für die Astronomie ein Observatorium[57]) zu erbauen; eine physikalische Lehrstelle einzurichten[58]), Instrumente anzuschaffen und die Naturlehre durch die Unterstützung der Reisen eines Kalms nach Nordamerika; eines Hasselquist nach dem Orient; eines Löffling nach Südamerika und eines Hornstedt nach Südasien zu bereichern, und durch Preisfragen wichtige Gegenstände neu bearbeitet zu sehen[59]).

Unter dieser trefflichen Einrichtung blühten nun die Wissenschaften, von Schwedens weisen Regenten befördert, neu belebt empor, Männer traten auf, deren Verdienste Europa anerkennt, deren Erfindungen die Nachwelt mit Dank nennt.

Martin Trievald[60]), berühmt in Edinburg, wo er zuerst die Naturlehre nach Newtons neuer, die cartesianische Philosophie verdrängenden und auf Erfahrung gegründeten Methode vortrug; berühmt in seinem Vaterlande durch Verbreitung dieser Kenntnisse, durch seine Vorlesungen auf dem Ritterhause, seine Me-

---

51) vom Jahr 1757—1765 in 8 Bänden. s. Brünnich Lit. Dan. Bibl. S. 172.

52) Analecta Transalpina. Venetiae 1762. T. I. II.

53) Mit Aufsätzen der Kön. Ac. d. W. zu Upsala zusammen: Collection Academique T. XI. de la Partie etrang. cont. les Mem. de l'Acad. d. Sc. à Stockholm. Paris 1772.

54) der Königl. S. A. d. W. Abhandlungen 1739—79. von Holzbrecher und Kästner.

55) Tals hållet för Kongl. Ak. vid Präsidii Nedläggande.

56) Åminnelse-Tals.

57) 1748 angefangen — 1753 vollendet.

58) 1759.

59) s. Weigels Einleitung zur allgemeinen Scheidekunst. II St. p. 495.

60) 1691 in Stockholm gebohren, legte sich in England vorzüglich auf Mechanik und Naturlehre. Kehrte 1726 nach Schweden zurück, wo er eine Feuermachine anlegte. Er starb 1747. als Capitain Mechanikus bei der Fortification. s. Åminnelse-Tal öfver Trievald, af Laurel 23. Dec. 1747.

thode die Luft auf den Schiffen zu verbessern[61]), seine Kunst unter dem Wasser zu leben[62]), Erfindungen die so neu, als wohlthätig, allen Dank verdienten, hat seinem Vaterlande unvergessliche Dienste geleistet[63]).

In diesem Zeitraume lebte zum Flor der Wissenschaften ein Klingenstierna[64]), den allein seine Verdienste um den Unterricht Gustav III. unsterblichen Nahmen gegeben haben; ein Mann der neben dem Verdienste das Interesse für die Naturlehre durch seine von Versuchen und Erfahrungen begleiteten Vorlesungen belebt zu haben, das grosse Verdienst hatte, diese für das gemeine Leben so brauchbare Wissenschaft zum Gegenstand des früheren Unterrichtes auf Schulen und Gymnasien zu machen. Bekannt mit den grossen Geistesproducten der Ausländer erregte er ihre Bewunderung durch seine Berechnung für die achromatischen Fernröhre. Dem unsterblichen Newton schien es unmöglich die Abirrung der Lichtstrahlen und die damit verbundenen Regenbogenfarben in den dioptrischen Fernröhren zu vermeiden, ermüdet von vielen fruchtlosen Versuchen gab er es auf und nahm seine Zuflucht wieder zu Spiegelteleskopen; Klingenstierna war es aufbehalten nach einer der tiefsten Rechnungen über die Brechung der Lichtstrahlen eine Zusammensezzung von Glasarten vorzuschlagen[65]), die diesem Uebel abhalf und der Astronomie

---

61) s. Gezelii l. c. T. IV. p. 293. K. V. A. 1744.

62) Tractat om Konsten at kunna lefva under vatnet.

63) Seine Föreläsningar i Naturkunnigheten 2. Thl. 1735—36. und seine Abhandl. in d. s. A. d. W. 1739—40—47. in englischen und französischen Zeitschriften, dienen als Beweise seiner Kenntnisse. s. Åminnelse-Tal öfver Trievald. af Prof. Laurel i Stockholm 1748.

64) Samuel Klingenstierna 1698 in der Gegend von Lindköping gebohren eröfnete zu Upsala eine mathematische Schule und arbeitete in der Soc. der Wissens. in Marburg; durch Wolf, dessen Schüler er war, empfohlen, ward er 1728 Prof. in Upsala, wo er zuerst seine Vorlesungen mit Versuchen begleitete, in der Folge ward er Informator des Kronprinzen Gustav III. Staatssecretair und R. des K. N. O. starb d. 26. October 1765. — s. Minne öf St. S. Klingenstierna. Handlingar rörande Svenska Akademiens Högtidsdag 1793. und Prof. Strömers Åminnelse-Tal d. 27. Jul. 1768.

65) Die von ihm über diesen Gegenstand herausgegebene gekrönte Preisschrift (Tentamen de definiendis aberrationibus luminis in lentibus sphaericis refracti, et de perficiendo telescopio dioptrico. Petropol. 1762. 4.) erschöpft den Gegenstand gänzlich. Seine Anmärkningar til Mouschenbroeks Physik, und seine Abhandlungen in den V. Ac. Handl. XVI. 3. XVIII. 3. XXI. 2. sind Beweise seiner tiefen Kenntnisse, so auch astronomiae Physicae juxta Newtonii principia Breviarium. Upsalae 1751. und mehrere vorzügliche akademische Preisschriften.

wichtig war, eine Idee die Euler ahnete und Dollond in der Folge durch Zusammensezzung des Flint- und Crownglases glücklich zu Stande brachte, eine Erfindung die den Nahmen Klingenstierna und Dollond in der Astronomie und Naturlehre unsterblich macht. Neben ihm glänzet am nordischen Himmel Celsius[66], zu früh für die Wissenschaften untergegangen, obgleich nicht minder wohlthätig für sie. Er hob die Astronomie in seinem Vaterlande zu der Höhe empor, deren sie sich im Auslande freuete. Er legte den Grund zum Bau des Observatoriums zu Upsala[67]. Von Paris aus folgte er einem Maupertuis, Clairaut und le Monnier nach Torneå, um durch Gradmessungen und Vergleichungen derselben mit den in Peru angestellten, über die Gestalt der Erde entscheiden zu können. Seine grosse Reihe angestellter Beobachtungen über das Nordlicht[68], seine Bestimmung des festen Punctes auf dem Thermometer[69], haben seinem Nahmen ein bleibendes Denkmahl gestiftet und seine vielen Schriften[70] ihn als einen Mann von gründlichen Einsichten und ausgezeichnetem Fleisse gezeigt.

So unsterblich der Nahme Linné[71] für die Naturgeschichte seyn wird; so gross seine Entdekkungen sind, so kühn seine systematische Ordnung der Natur entworfen ist, eben so einzig und schön ist in gewisser Hinsicht seine Idee über die Entstehung der Erde, und über die Ursachen der grossen Revolution, die ihre äussere Rinde verkündet. Die Abnahme des Wassers in den weiten Reichen des Oceans, eine Untersuchung, die geraume Zeit die Physiker, vorzüglich in Schweden beschäftigte;

---

66) Andreas Celsius 1705. in Stockholm gebohren, Professor Astronomiae in Upsala, starb 1744. s. Åminnelse-Tal af Höpken 27. Nov. 1745.

67) 1737. anfangs auf seine Kosten.

68) de lumine Boreali, Norimberg. 1733, er bemerkte zuerst mit Hjorter (K. Observator. 1696 in Jemtland gebohren, starb 1751. s. Åminnelse-Tal af Wargentin 18. Apr. 51.) die Abweichung der Magnetnadel beim Nordschein.

69) Sv. Ak. Handl. 1742.

70) Von seinen vielen Schriften verdienen bemerkt zu werden. Arithmetica 1726. erlebte 3 Auflagen 1739. 1754. — Underrättelse huru man efter Solens ojämna rörelse bör rätt stella et urwerk. Nork. 1728. (Unterricht, wie man nach dem ungleichen Laufe der Sonne eine Uhr richtig stellen soll.) Tankar om Cometens igenkomst i Stockholm 1755. (Gedanken über die Wiederkunft des Kometen in Stockholm.) — Calendarier infrån år 1728—45.

71) Carl Linnée 1707. im Mai zu Stenbrohult in Småland gebohren, Prof. d. Med. u. Bot. in Upsala, R. des K. N. O. starb 10. Jan. 1778. s. Aminnelse-Tal af Abraham Bäck 1778.

für die ein Mallet, Kalm, Härlemann, wider die Brovallius und andre stritten[72]), ward unter seinen Händen die Grundlage eines Systems über die Entstehung der bewohnbaren Erde. Ihm war die ganze Erde anfangs ein grosser Ocean, auf dem nur anfangs der höchste hervorragende Wipfel bewohnbar seyn konnte; das Wasser nahm ab und in verfliessenden Jahrtausenden gieng das bewohnbare Land aus dem Meere hervor. Eine Hypothese die von ihm mit Scharfsinn und schönen Beobachtungen unterstüzt und ausgeführt ward[73]).

Sein Blick, der weitumfassend das ganze Reich der Natur umfieng und in ein System einzuengen vermochte, musste in der grossen Haushaltung der Natur Entdekkungen machen, die so neu, als interessant, nicht nur für die Naturgeschichte, auch für die Naturlehre reiche Ausbeute lieferten[74]).

Was Linné für die Naturgeschichte war, das war Bergmann[75]) für die Chemie, schon in dieser Hinsicht darf ich hier seinen Nahmen nicht übergehen, seit in neuern Zeiten diese Wissenschaft einen so wesentlichen Antheil an der Vervollkommnung der Naturlehre in einzelnen Theilen genommen hat. Aber auch für die Naturlehre selbst unmittelbar sind Bergmann's Verdienste unverkennbar. Ausser seinen Abhandlungen über Electrität, Regenbogen und Nordschein[76]) verdient vorzüglich seine Erdbeschreibung[77]) unsern Dank. Hier findet man die schönsten Resultate dessen, was sein und seiner Vorgänger Bemühen, ihr scharfer Beobachtungsgeist über die Natur und die Veränderungen der Erde und die regelmässig und regellos auf derselben vorfallenden Erscheinungen beobachtet und erforscht haben. — Dies

---

72) s. Brovallius om Wattu Minskningen, (von der Abnahme des Wassers.) Stockholm 1735. — Wallerius Hydrologia, eller Watturiket 1743. übersetzt von Denso.

73) Oratio de Telluris habitabilis incremento. in Amoen. T. II. auch besonders gedruckt. — de Tellure habitabili, Leiden 1744. 8vo.

74) Oeconomia naturae, in Amoenitatibus.

75) Torbern Olof Bergmann 1735. zu Marienstadt gebohren, Prof. der Chem. zu Upsala, starb 1784.

76) s. Vetensk. Ac. Handl. XX, 4. XXIII, 1. XXIV, 4. XXV, 3—4, XXVI, 2. XXVIII, 3.

77) Bergmanns physikalische Erdbeschreibung, aus dem Schwed. übers. von Lamb. H. Röhl. Greifswald 1780.

Werk und das eines Mallets[78]) mathematischen Inhalts[79]), treffliche Charten und Globen, und die dadurch ausgebreitete Kenntniss unsers Erdballes verdanken wir der, grösstentheils durch Bergmanns Bemühungen gestifteten cosmographischen Gesellschaft[80]), die durch Mitglieder wie Ferner, Mallet, Arrhenius, Zegolström, Melanderhjelm, Prosperin, Åkermann u. a. für diesen Theil der Naturlehre rühmlichst sorgte. Seinen Verlust betrauert mit Schweden Europa[81]).

Auch sein Freund Scheele[82]), unser Landsmann, den aber Schweden mit Freuden unter seine Bürger zählte, folgte ihm nach zwei Jahren, und die unsterblichen Verdienste beider Männer um die Chemie machten den doppelten Verlust für die Wissenschaften um so schmerzhafter. Nie ward Scheele, weder in seiner Lebensperiode, noch in der Folgezeit, durch einen andern in der Menge einzelner Erfindungen und Entdekkungen, die eben so neu, als unerwartet, musterhaft angestellt und brauchbar in der Anwendung waren, übertroffen. Was er für die Chemie that, ist in den Jahrbüchern dieser Wissenschaft mit Dank und bleibendem Ruhme niedergelegt[83]); was er für die Naturlehre leistete, eben so rühmlich bekannt. Er ist es gewissermassen, der nach dem Zeugniss eines berühmten deutschen Chemikers[84]), als der erste Schöpfer des neuen französischen Systemes angesehen werden kann, eines Systemes, das den Nahmen des unglücklichen Lavoisier unsterblich macht. Er war es, der durch scharfsinnige Versuche und genaue Beobachtungen den reinen Theil der atmosphärischen Luft (Feuerluft von ihm genannt) als allgemeine Säure entdekte, der im Reiche der Natur neue Elemente auffand, der

---

78) Fridrich Mallet geb. 10 Mart. 1728 in Stockholm, Prof. d. Geometr. in Upsala, starb 27 Jun. 1797. s. Åminnelse-Tal af Nordmark d. 5. Sept. 1798.

79) Mallets allgemeine oder mathematische Beschreibung der Erdkugel, aus dem Schwed. v. Röhl. Greifswald 1774.

80) im Jahr 1758.

81) s. Hjelms Gedächtnissrede v. 9 Mai 1786. ins Deutsche übers. Greifswald 1790.

82) Carl Wilhelm Scheele, in Stralsund 1742 gebohren, Apotheker in Köping, starb 1786.

83) s. Crells chemische Annalen 1787. II St. s. 177.

84) s. C. W. Scheele sämmtliche phys. und chemische Werke, v. S. T. Hermbstädt. I B. Vorrede XVII. Berlin 1793.

durch seine treffliche Behandlung des feinsten Gegenstandes [85]) die Bewundrung seines Zeitalters auf sich zog, und dem Auslande, das seinen Arbeiten mit Freuden entgegensah, den Mann in seinem Glanze zeigte, der so wenig zu glänzen, desto mehr zu nüzzen wünschte.

Auffallend ist in dieser Periode ein Mann, dessen origineller Geist, bewundernswürdige Thätigkeit, hervorstechende Talente und über alles lebendige Phantasie so auszeichnend, wie in spätern Jahren seine Schwächen unverkennbar sind. Samuel Swedenborg [86]) verdient hier als Mechaniker genannt zu werden; ein auszeichnender Fleiss, den seine vielen Schriften erweisen [87]), ein erfindungsreicher Kopf führten ihn auf mehrere wichtige Erfindungen im Bergbau und der Naturlehre. Er gab ursprünglich zuerst die Idee zu einer Luftpumpe an, die durch das Steigen und Fallen des Quecksilbers den leeren Raum hervorbringt [88]), eine von Baader, Hindenburg und Sadler in der Folge glücklich benuzte Erfindung. Für die Schärfe und Genauigkeit seines Beobachtungsgeistes reden seine Beobachtungen über die Abweichung der Magnetnadel. Mit lebendig warmer Phantasie umfasste er das grosse weite Reich der Natur, und gerne verzeiht man ihm, wenn der grosse Gegenstand ihn oft zu weit hinreisset, wenn seine Einbildungskraft die Grenzen der Erfahrung, der Erkenntniss überschreitet, und im Gebiete der Möglichkeit träumend umher wandelt.

Der Nahme Wargentin [89]) ist nicht nur in der Astronomie durch die vortrefflichen Tabellen über die Verfinsterung der Jupiterstrabanten [90]), deren Beobachtung hauptsächlich zur Bestimmung geographischer Längen dienet, und durch viele gleichzeitig angestellte Beobachtungen berühmt; auch die Naturlehre verdan-

---

85) Seine chemische Abhandlung über Luft und Feuer, zuerst Leipzig 1777 mit Bergmanns Vorrede 1780. ins Englische, 1781 ins Französische übersetzt, und 1782 neue Ausgabe Leipzig bei Crusius, die 1788 ins Lateinische übersetzt wird.

86) Samuel Swedenborg war 1688 in Stockholm gebohren, Assess. des Berkwerks-Collegiums, starb zu London 1773.

87) Nur hier verdienen besonders seine principia rerum naturalium, Dresdae et Lipsiae 1734. 3 B. Fol. genannt zu werden.

88) s. Acta eruditorum 1722. Mai p. 264.

89) Pehr Wargentin, Secret. d. Acad. d. W. R. d. N. O. d. 22. Sept. 1717 in Jemtland gebohren, starb 1784. s. Åminnelse-Tal af Melanderhjelm d. 29. Sept. 1784.

90) s. Berliner Samml. astron. Tabellen. III B. s. V. A. H. 1749.

ket ihm in der Lehre vom Nordscheine[91]), in der Lehre vom Winde[92]) treffliche Beobachtungen und Bemerkungen in vielen Abhandlungen der K. A. der Wissenschaften.

Wenn grosse Ideen, die wegen ihrer Kühnheit und Grösse der jezeitigen Periode vorauseilen, auch dann, wenn sie für die Vollendung noch nicht reif, oder durch Unvolkommenheit weniger brauchbar, als kühne Geistesprodukte die Aufmerksamkeit, ja die Bewunderung des Beobachters verdienen, so darf ich hier die Idee eines Mannes nicht übergehen, die wenigstens unverkennbar das Gepräge der Kühnkeit an sich trägt. Was Linné mit Bewunderung seines Zeitalters zu Stande brachte, die 3 Reiche der Natur systematisch zu ordnen, in Klassen, Geschlechter und Arten zu reihen, wagte Stockenstrand[93]) auf das ganze Universum, die sichtbare und unsichtbare Welt auszudehnen; so ordnete er das Erschaffene in 6 Klassen und wies jedem Reiche in diesen seinen Platz an. Wer wollte an diesem kühn gewagten Versuche das Mangelhafte, Unvollkommene tadeln? Ideen, wie diese, können nur in der Folgezeit der Vollendung entgegen reifen.

Je tiefer die Natur gewisse Erscheinungen und deren Gesetze in Dunkel hüllte, je mehr Anstrengung das Erforschen ihrer geheimen Würkungen, in der dem Auge verborgenen Werkstatt erfordert, desto ruhmvoller ist es, diesen ihren stillen Gang aus dem Dunkel hervorzuziehen. Die Electricität mit ihren Würkungen und deren Gesetzen war dem Beobachter lange ein Räthsel, nur ihre Erscheinungen waren bekannt; einem Wilke[94]) war es aufbehalten in diesem Theile der Naturlehre neues Licht anzuzünden und Epoche zu machen. Durch die Entdeckung der electrischen Würkungskreise[95]) ward er in den Stand gesetzt, die erste richtige Erklärung des leidener Versuches von Franklin genauer zu bestimmen und zu erklären[96]). Diese Untersuchungen, die im Grunde auch die Erfindung des Electricitätsträgers enthalten[97]), leiteten ihn schon damals auf die Idee, dass sich dieses Phaeno-

91) Geschichte der Wissenschaft vom Nordscheine, s. V. A. H. XXIV.

92) Kurze Anmerkungen vom Winde. s. V. A. H. XXIV. 1749.

93) Systema Naturae in sex regna divisum. Stockholm 1778.

94) Sam. Carl Wilke 1732 d. 6. Sept. zu Wismar gebohren, Prof. und Secret. d. Ak. d. W. R. d. K. N. O., starb 1797. — s. Progr. dissert. de electr. contrariis und Åminnelse-Tal 16 Sept. 1797. af Nordmark.

95) Dissertatio de electricitatibus contrariis. Rostochii 1757.

96) V. H. Handl. 1762. S. 213, von den entgegengesetzten Electricitäten bei der Ladung und den dazu gehörigen Theilen.

97) Handl. 1762. p. 206.

men aus zwey Materien, Feuer und Säure, besser als nach Franklin erklären lasse[98]). Er bewerkstelligte die Ladung mehrerer bis dahin ununtersuchter Körper[99]). Die Lehre vom Gewitter und dessen Identität mit der Electricität, stellte er durch Versuche in ein helles Licht[100]). Seine Inclinationscharte[101]), seine Beobachtungen über die jährlichen und täglichen Veränderungen der Magnetnadel in Stockholm[102]) haben diesen Theilen der Physik vortreffliche Beiträge geliefert. Seine Beobachtungen über den Nordschein und seine vortrefflichen Beobachtung über die Kälte des Schnees beim Schmelzen, worauf den scharfsinnign Beobachter eine gewöhnliche alltägliche Erscheinung führte[103]), sind glänzende Beweise seiner grossen, hervorstechenden Talente und Verdienste, die ich hier nur anzudeuten wagte.

Wenn ich die Männer, deren Namen im Auslande, so wie im Vaterlande mit Ruhm, Dankbarkeit und Achtung genannt werden, Nahmen wie Wallerius[104]), Alströmer[105]), Ferner[106]), Fag-

---

98) Handl. B. XXIII. B. XXV. — Benj. Franklins Briefe v. d. E. übers. v. Wilke. Leipz. 1758.

99) Handl. 1758. S. 250.

100) Handl. 1759. S. 79—159.

101) Handl. 1768.

102) Handl. 1777.

103) s. Handl. 1772. Wilke wollte Schnee auf einem kleinen Hofplatze durch siedendes Wasser schmelzen, es erfolgte aber nicht die erwartete Würkung, dies führte ihn, nach einer Reihe Versuche, auf den wichtigen Lehrsatz: dass beim Schmelzen des Schnees blos zur Erhaltung der Flüssigkeit eine Menge Wärme erfordert werde, die im Stande ist, eine eben so grosse Menge eiskaltes Wasser zu einer Hitze von 72° Cels. zu erheben, den Grund der Idee von specifischer Wärme. s. Åminnelse-Tal af Nordmark. S. 6.

104) Joh. Gotsch. Wallerius gebohren 172—, Prof, der Chemie und Metallurgie zu Upsal. R. d. W. O. M. d. A. d. W., starb 1785, eigentlich als Chemicus berühmt, doch müssen hier seine Tankar om Jordones danande, Stockh. 1776. Uebers. Meditationes de origine mundi 1779, und unter seinen Dissertationen, de materiali differentia luminis et ignis — an Color a sole? — de transmutatione aquarum, genannt werden. s. Fasciculi Disputationum academicarum Holmiae 1798. II Bde. —

105) Clas Alströmer, Com. R. C. d. W. O., M. d. A. d. W., gebohren d. 9. Aug. 1736 zu Alingsås, starb 5 Mart. 1794, er war ein grosser Freund und Beförderer der Wissenschaften, Schweden verdankt ihm manches in der Oekonomie und Baukunst. s. Åminnelse-Tal af Pehr Dubb.

106) Bengt Ferner, Canzell. R. d. N. O., M. d. A. d. W. hat viele meteorolog. Beobachtungen angestellt; s. Handl. XVI. 1—4. XVII. 4. XVIII. 3. XIX. 3.

got[107]), Ekeberg[108]), Meldercreutz[109]), Schenmark[110]), Hårleman[111]), Quist[112]), Lindquist[113]), Ekström[114]), Strömer[115]) Duraeus[116]) und andere hier blos anführe, ohne ihre einzelnen Verdienste um diese Wissenschaften aufzuzählen, so wird mich das vorgesetzte Ziel dieser Arbeit entschuldigen.

---

107) Jak. Faggot, Modell-Aufseher, Ober-Director des Landmesser-Comtoirs, M. d. A. d. W., gebohren d. 13 Mart. 1721, gestorben 1778. s. Åminnelse-Tal af Nicander d. 28 Nov. 1778, worin auch seine vielen Abhandlungen mathematischen Inhalts angeführt sind.

108) Carl Gustaf Ekeberg, Cap. b. d. K. Artillerie, M. d. A. d. W., 1716 d. 10 Jun. gebohren, starb den 4. Ap. 1784. s. Åminnelse-Tal af Sparman 1790. Er ist durch seine Reisen, und die auf denselben angestellten Beobachtungen über die Abweichungen der Magnetnadel u. a., so wie durch seine geographischen Kenntnisse berühmt. s. C. Ekebergs Ostindiska Resa 1770—71. gedruckt 1773.

109) Jon. Meldercreutz, Prof. der Mathem. zu Upsala 1751, Hauptm. und Lehrer an der Kriegsschule zu Stockholm, gebohren 173—, starb 1786.

110) Nicolaus Schenmark, Prof. der Math. zu Lund, gebohren in Ostgothland 1720, starb 28 Sept. 1788. s. Oratio funebris in ejus memoriam a Math. Norberg. Lund 1788. Mehrere astronomische Bestimmungen, Beobachtungen und Berechnungen, Bestimmungen der geographischen Lage mehrerer Orte Schwedens finden sich von ihm in Handl. XVI—XXX. seine Geometria analytica Stockh. 1785. ist als Compend. schätzbar.

111) Bar. Carl Hårlemann, Ober-Intendant, R. d. N. O., Mitgl. d. A. d. W., gebohren in Stockholm, starb 1753, ist als Baumeister in Schweden bekannt. s. Åminnelse-Tal af Tessin d. 19. Mart. 1753.

112) Bengt Quist, gebohren 1727, Assess. im Bergw. Colleg., Director der sämmtlichen Schmiedearbeiten und Mitgl. d. A. d. W., besonders als Chemicus merkwürdig. s. Handl. XXIX—XXXVIII.

113) Joh. Heinr. Lindqvist, Math. Prof. in Åbo, M. d. A. d. W., starb 1798. einige mathem. Abhandlungen von ihm s. Handl. XXVII—XXXIX.

114) Daniel Ekström, Direct. und mathemat. Instrumentenmacher, M. d. A. d. W. s. Åminnelse-Tal af Wargentin 14 Jun. 1758. Er ist besonders als Künstler berühmt, seine Instrumente geben den englischen an Genauigkeit und Feinheit nichts nach. — Sein geographisches Instrument. s. Handl. 1743. ist ein sehr verbessertes Astrolab.

115) Martin Strömer, Astron. Prof. in Upsala, M. d. A. d. W. Von ihm hat man Inledning til Geometria plana. Stockh. 1749. — Läran om klotet och sphaeriska Trigonometrien. Upsala, eine Uebersetzung des Euklides und mehrere Dissertationen mathemat. und astronomischen Inhalts.

116) Samuel Duraeus, Prof. d. Phys. zu Upsala, starb 1789. von ihm Utkast til föreläsningar över naturkunnigheten (Entwurf zu Vorlesungen über die Naturlehre). Upsala 1759. Om Logarithmerne 1751. nebst vielen physikalischen Dissertationen.

Ich wende mich nun zu den Männern, welche das günstige Schicksal zum Flor der Wissenschaften erhielt, von denen wir zu Erwartungen berechtigt sind, die eben so gross, als durch vorhergegangene, bekannte Verdienste gerecht und billig sind. Und wenn ich um den Schein der Schmeichelei zu vermeiden hier kürzer bin; so fehlt es mir darum nicht an Stoff zu ihrem Lobe.

Es freuen sich die Wissenschaften der Erhaltung eines Chapman[117]), dessen tiefen Einsichten und weitumfassenden Kenntnissen in der Mathematik die Schiffsbaukunst[118]), die Artilleriewissenschaft[119]), und so manche andere Disciplinen, treffliche Bereicherung verdanken. Seine Theorie der Anker[120]) trägt das Gepräge tiefer mathematischer Kenntnisse, und ist als die vorzüglichste mit Dank als lange entbehrt anzusehen. Seine Untersuchungen über den Widerstand, den die Körper in Flüssigkeiten erleiden[121]), die er durch Gustav Adolphs milde Unterstützungen mit Eifer fortzusetzen im Stande ist, lassen über diese schwierige Materie viel Licht erwarten.

Die vielen genauen astronomischen und meteorologischen Beobachtungen haben den Nahmen Melander, nun Melanderhjelm, dem Vaterlande und dem Auslande rühmlichst bekannt gemacht[122]). Seine weitere Bestimmung und Ausführung der Theorie des Mondes von d'Alembert[123]), neue Methoden schwierige Astronomische Bestimmungen zu finden[124]), glücklich gewagte, mit Scharfsinn, aus gemachten Beobachtungen, hergeleitete Hypothesen[125]) über Erscheinungen am Himmel, haben seinen Nahmen der Nachwelt aufbewahret.

Gemeinnüzzige Erfindungen und Entdekkungen, die für das gemeine Leben fruchtbare Folgen haben, verschaffen der Wissen-

117) Fridrich von Chapmann, Vice-Admiral, C. d. W. O., R. d. S. O., Mitglied der Akademie der Wissenschaften.

118) Tr. de la Construction des Vaisseaux trad. du Sued. Handl. XXIX. 1. XXIX. 4. LVIII. 1.

119) Handl. 1798. XIX.

120) Handl. 1796. XVII.

121) Handl. T. XVI. 1795. LXVI. 2.

122) Dan. Melanderhjelm, Prof. der Astr. in Upsala, R. d. K. N. O., Mitgl. d. Ak. d. W.

123) Handl. XXI, 3.

124) Fundamenta Astronomiae. V. I—II. Stockh. 1779. — Handl. XXVI—XXX. nebst einer grossen Anzahl astron. Dissertationen.

125) Handl. 1798. 1. Q. — Newtons Tract. de Quadratura Curvarum, in usum studiosae juventutis explicationibus illustratus a Daniel Melander. Upsal. 1762.

schaft, der sie ihren Ursprung verdanken, die grösste und ausgedehnteste Achtung und dem Erfinder bleibenden Dank; darum darf ich hier der Bemühungen Akens[126]) und Nyströms[127]) nicht vergessen, die sich durch Feuerlöschungsmittel um das allgemeine Wohl verdient gemacht haben. Die Erfahrung hat ihre Entwürfe bewährt gefunden und die Versuche, die von diesem unter den Augen des Königs und des Herzogs zu Ladugårdsfelde angestellt wurden, haben ihm den Beyfall und die Belohnung des Königs erworben.

Noch glänzen die Nahmen eines Planman[128]), Prosperin[129]), Nicander[130]), Nordmark[131]), dessen sich diese Akademie einst als ihres Lehrers freuete, Landerbeck[132]), Tegman[133]), Hjelm[134]), Lindtgreen[135]), Hultén[136]), Reg-

---

126) s. Crell's chem. Annalen 1794. 1 Stük. XII Stük.

127) s. Afhandling om Eldsläkande Ämnen, ingifven til K. V. A. af Nyström 1793. s. Weigels Magazin. I Bandes 2 Stück. Berlin 1794.

128) Andr. Planman, Phys. Prof. in Åbo, M. d. A. d. W., hat mehrere astron. Beobachtungen angestellt. s. Handl. XX—XXXIII.

129) Eric Prosperin, Prof. Astron. in Upsala, M. d. A. d. W. astron. Beobachtungen und Berechnungen von ihm über Kometen, über Uranus u. s. w. finden sich in den Handl. LIII. LVI. XXXI. u. a. a. O.

130) Heinrich Nicander, Secr. d. A. d. W., hat über die parabolische Gestalt der Pflugscharre, Handl. XXXVII. XXXIX. über die Theorie der Wirzischen Spiralpumpe LIV. und mehrere astronomische Beobachtungen geschrieben.

131) Zacharias Nordmark, Phys. Prof. in Upsala, M. d. Ak. d. W., hat ausser einer grossen Anzahl mathematischer und physikalischer Dissertationen, und mehreren mathematischen Abhandl. vorzüglich neue Beobachtungen über den Grad der Wärme der einfachen Lichtstrahlen angestellt. s. Handl. LVI. LVIII.

132) Nils Landerbeck, Math. Prof. in Upsal., M. d. A. d. W., über die verbesserte Luftpumpe, und Auflösungen die Mechanik betreffend s. Handl. XXXV. XXXIX.

133) Peter Tegman, Math. Prof. M. d. A. d. W., von ihm sind mehrere mathemat. Disputationen.

134) Pet. Jacob Hjelm, Probierer des Königl. Bergwerk-Collegium, hat sich besonders als Chemikus gezeigt.

135) Lidtgreen, Astron. Observ. in Lund, hat sich durch mehrere gleichzeitige astron. Beobachtungen verdient gemacht. s. Handl. LVII. LVIII.

136) Andr. Hultén, Prof. d. Astron. in Greifsw. M. d. A. d. W. seine Dissertationen, de methodis Tangentium ante Newton. usitatis Ups. 1786., de vestigiis Method. flux. atque Calcul. Diff. ante Newton. et Leibnit. obviis, Gryphiae 1792 sind in Hinsicht der Geschichte der Math. merkwürdig; so wie de Aequationibus, radices aliquot aequales habentibus 96. 97. Theoremata magni-

nér[137]), u. a. in den Jahrbüchern der Geschichte dieser Wissenschaften; neben ihnen die Nahmen der Deutschen, grösstentheils verehrungswürdige Lehrer dieser Akademie, denen das Ausland die Bekanntschaft mit der schwedischen Gelehrsamkeit verdanket.

Die grosse Zahl dieser für Mathematik und Physik wichtiger Männer, die Aufzählung ihrer Verdienste, von denen ich hier nur den unvollkommensten Umriss zu entwerfen wagte, erfüllt uns mit Dankbarkeit und Freude; sie lässt an des Jahrhunderts Neige die Wissenschaften mit Freude in eine lachende, für sie seegensreiche Zukunft blicken.

---

tudini telluris computandae inservitura 94. de normalibus ad curvas geometr. ducendis 97. de limitibus aequationum 98. gekannt zu werden verdienen.

137) Regnér Doc. i Natur - Lär. i Upsal. Inledning til Natur - Läran. Upsala 1785.

XXV.

Neue Bestimmungsweise des durch kleine Oeffnungen gebeugten Lichtes.

Von

Herrn *E. Bacaloglo*

in Bucarest.

I. Die Schwierigkeiten und die Länge der Rechnungen, welche, sei es nach der Schwerd'schen oder nach der von dieser wenig verschiedenen Integrationsmethode, zu der Bestimmung des durch kleine Oeffnungen gebeugten Lichtes führen, würden vielleicht den Versuch zu einer einfacheren und eine allgemeinere Anwendung gewährenden Bestimmung des gebeugten Lichtes nicht unzweckmässig erscheinen lassen.

Schon Billet (Traité d'Optique physique t. I, p. 200, 217) hat darauf aufmerksam gemacht, dass die Resultirende des durch einen schmalen Spalt gebeugten Lichtes dieselbe Phase hat, wie der durch dessen Mitte gehende Strahl, und ebenso hat beim Parallelogramme die Resultirende dieselbe Phase wie der Strahl, welcher durch den Durchschnittspunkt der beiden Diagonalen geht; allein er hat diese Sätze nur als Consequenzen der durch jene langen Rechnungen gewonnenen Formeln hingestellt und suchte dieselben nicht weiter zu benutzen. Dahlander hat später (Pogg. Ann. Bd. 110) jene Sätze verallgemeinert und unabhängig von den letzteren Formeln abgeleitet; er stellte den Satz auf, dass bei jeder Oeffnung, welche einen Mittelpunkt hat, die Resultirende dieselbe Phase hat wie der Strahl, welcher durch jenen Mittelpunkt geht, und zeigte die Anwendung dieses Satzes, welcher jedoch auf den schwierigeren Fall des Trapezes, des Dreieckes und auf denjenigen von Curvensegmenten nicht ausgedehnt werden kann.

Es sollen nun im Folgenden zwei Formeln aufgestellt werden, welche sich zu der Bestimmung des durch eine beliebige Oeffnung gebeugten Lichtes eignen, wenn man nur in jener Oeffnung einen einzigen geradlinigen Durchmesser nachweisen kann. Sämmtliche bis jetzt untersuchte Fälle, das Trapez, Parallelogramm, Dreieck, der Kreis, die Ellipse, resp. Kreis-, Ellipsen-, Parabelsegmente u. s. w., lassen sich mittelst jener Formeln behandeln, welche auch die Benutzung der ursprünglichen Parameter gestatten, wodurch man eine leichtere Uebersicht der gefundenen Resultate gewinnt. Die Ableitung dieser Formeln ist möglichst einfach und bedarf keineswegs der oben gedachten Sätze; sie wird jedoch noch weiter vereinfacht durch Benutzung des ersten, nach welchem die Resultirende des durch einen Spalt gebeugten Lichtes dieselbe Phase hat wie der durch dessen Mitte gehende Strahl. Der Beweis ist leicht zu führen, wie Dahlander gezeigt hat; man braucht nur die Wege des Lichtes p', q' und p'', q'' durch zwei von der Mitte gleich entfernte Punkte mit dem Wege durch die Mitte selbst p, q zu vergleichen, um daraus zu schliessen, dass

$$p'-p=p-p'', \quad q'-q=q-q'';$$

folglich ist:

$$p'+q'-(p+q)=p+q-(p''+q'');$$

oder auch:

$$(1) \quad \frac{2\pi}{\lambda}[p'+q'-(p+q)]=-\frac{2\pi}{\lambda}[p''+q''-(p+q)]=\varphi,$$

und die drei entsprechenden Strahlen werden dargestellt durch

$$a\sin\alpha, \quad a\sin(\alpha+\varphi), \quad a\sin(\alpha-\varphi);$$

also ist die Resultirende der beiden letzteren:

$$(2) \qquad a[\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha-\varphi)]=2a\cos\varphi\sin\alpha$$

und hat dieselbe Phase wie der Mittelstrahl.

II. Die Aufstellung der Formeln, welche den Gegenstand dieses Aufsatzes bilden, beruht wesentlich auf der Kenntniss des Ausdruckes für das durch einen Spalt gebeugte Licht in einer etwas allgemeineren Form als die bis jetzt in Anwendung gebrachte. Man nimmt für gewöhnlich an, dass die Durchschnittslinien der auf die Richtung der einfallenden und der gebeugten Strahlen senkrecht gelegten Ebenen mit der Ebene des Spaltes zusammenfallen und der Längsrichtung dieses letzteren parallel

sind. Ich will von dieser Beschränkung absehen und den allgemeinen Fall behandeln, wo KL (Taf. III. Fig. 1.) den Spalt bezeichnet, dessen Ebene mit der der Figur zusammenfällt. Bezeichnen ferner NE und NG die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den auf den einfallenden und gebeugten Strahlen senkrecht stehenden Ebenen; $-\Phi$ und X die Neigungswinkel der ersteren gegen jede der letzteren; BF eine beliebige Richtung in der Ebene des Spaltes, bestimmt durch die Winkel φ oder φ'; $-\mu'$ und μ die Neigung dieser Richtung BF gegen jede der beiden Normalebenen; so findet man zunächst durch die bekannten Projectionsmethoden:

$$(3) \; . \; . \; . \; . \; . \sin\mu = \sin\varphi \sin X, \quad \sin\mu' = \sin\varphi' \sin\Phi.$$

Es wird demnach die Phase für den Punkt P, dessen Entfernung von der Mitte M des Spaltes $= x$ ist:

$$\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')x = \frac{2\pi}{\lambda}(\sin\varphi \sin X - \sin\varphi' \sin\Phi)x,$$

und die Resultirende der beiden, durch die symmetrisch liegenden Punkte P und P' gebeugten Strahlen nach (2):

$$2\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')x\right]\sin\alpha.$$

Die Vibrationsintensität des durch den Spalt KL gebeugten Lichtes wird demnach:

$$2\int_0^{\frac{\gamma}{2}} dx \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')x\right],$$

woraus durch Integration und Einführung der Constanten:

$$(4) \; . \; . \; . \; . \; . \; u = A\cos\Phi \frac{\sin\left[\frac{\pi\gamma}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')\right]}{\frac{\pi\gamma}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')}$$

$$= A\cos\Phi \frac{\sin\left[\frac{\pi\gamma}{\lambda}(\sin\varphi \sin X - \sin\varphi' \sin\Phi)\right]}{\frac{\pi\gamma}{\lambda}(\sin\varphi \sin X - \sin\varphi' \sin\Phi)}.$$

Es sei nun $ABCD$ (Taf. III. Fig. 2.) eine beliebige Oeffnung und BD ein Durchmesser derselben. Man denke sich die Oeffnung in parallele, dem Durchmesser BD conjugirte Querstreifen getheilt. Die Vibrationsintensität des durch einen derselben

$EF=2x$ gebeugten Lichtes wird nach (4), mit Weglassung der Constanten, ausgedrückt durch:

$$u=\frac{\sin\left[\frac{2\pi x}{\lambda}(\sin\mu-\sin\mu')\right]}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\mu-\sin\mu')}.$$

Da diese Resultirende dieselbe Phase hat, wie der durch die Mitte G von EF gehende Strahl, so kann man sich die ganze Oeffnung weggelassen denken mit Ausnahme des einzigen Durchmessers DB, wenn man dafür sorgt, dass sämmtliche durch dessen verschiedene Punkte gehende Strahlen mit der entsprechenden Grösse u multiplicirt werden. Bezeichnen aber ν und $-\nu'$ die Neigungswinkel des Durchmessers DB gegen die beiden Normalebenen, so findet man leicht, dass die Phase des durch den beliebigen Punkt G des Durchmessers DB gehenden Strahles $=\frac{2\pi y}{\lambda}(\sin\nu-\sin\nu')$ ist, wenn $y=DG$. Das durch die ganze Oeffnung $ABCD$ gebeugte Licht wird also abhängen von den beiden Integralen:

(5)

$$M=\int_0^{DB}dy\sin\varepsilon\frac{\sin\left[\frac{2\pi x}{\lambda}(\sin\mu-\sin\mu')\right]}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\mu-\sin\mu')}\cos\left[\frac{2\pi y}{\lambda}(\sin\nu-\sin\nu')\right],$$

$$N=\int_0^{DB}dy\sin\varepsilon\frac{\sin\left[\frac{2\pi x}{\lambda}(\sin\mu-\sin\mu')\right]}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\mu-\sin\mu')}\sin\left[\frac{2\pi y}{\lambda}(\sin\nu-\sin\nu')\right];$$

woraus man x oder y mittelst der Gleichung der Curve ADC eliminiren wird. Man hat übrigens zwischen den Winkeln ν, ν', χ, χ', X, Φ folgende mit (3) analoge Relationen:

(6) . . . . $\sin\nu=\sin\chi\sin X$, $\sin\nu'=\sin\chi'\sin\Phi$.

III. Die Anwendung der Formeln (5) auf das Parallelogramm (Taf. III. Fig. 1.) ist äusserst einfach. Bemerkt man, dass der erste Faktor unter den Integralzeichen constant und

$$=\frac{\sin\left[\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\mu-\sin\mu')\right]}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\mu-\sin\mu')}$$

ist, so ergiebt sich:

$$M = ab\sin\varepsilon\,\frac{\sin\left[\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')\right]}{\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')}\cdot\frac{\sin\left[\frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\nu - \sin\nu')\right]}{\frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\nu - \sin\nu')},$$

$$N = ab\sin\varepsilon\,\frac{\sin\left[\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')\right]}{\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')}\cdot\frac{1-\cos\left[\frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\nu - \sin\nu')\right]}{\frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\nu - \sin\nu')};$$

woraus

$$u = \cos\Phi\,.\sqrt{M^2+N^2}$$

$$= A\cos\Phi\,\frac{\sin\left[\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')\right]}{\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\mu - \sin\mu')}\cdot\frac{\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\nu - \sin\nu')\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\nu - \sin\nu')},$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (3) und (6):

$$(7)\;.\;.\;.\;u = A\cos\Phi\,\frac{\sin\left[\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\varphi\sin X - \sin\varphi'\sin\Phi)\right]}{\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\varphi\sin X - \sin\varphi'\sin\Phi)}$$

$$\times\frac{\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\chi\sin X - \sin\chi'\sin\Phi)\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\chi\sin X - \sin\chi'\sin\Phi)}.$$

Nimmt man das einfallende Licht normal auf die Ebene des Spaltes an, so findet man:

$$(8)\;.\;.\;.\;.\;u = A\cos\Phi\,\frac{\sin\left(\frac{\pi a\sin\mu}{\lambda}\right)}{\frac{\pi a\sin\mu}{\lambda}}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi b\sin\nu}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b\sin\nu}{\lambda}}$$

$$= A\cos\Phi\,\frac{\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\sin X\right)}{\frac{\pi a}{\lambda}\sin\varphi\sin X}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\chi\sin X\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\chi\sin X}.$$

IV. Das Dreieck bietet nicht viel mehr Schwierigkeiten. Es sei (Taf. III. Fig. 3.) $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $AD = d$; es bezeichnen α, α'; β, β'; γ, γ'; δ, δ' die Winkel dieser vier Gera-

den mit jeder der beiden Normalebenen. Die Integrale (5) erhalten dann folgende Form:

$$M=\int_0^d dy\sin\varepsilon\frac{\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha-\sin\alpha')\frac{\frac{1}{2}a}{d}y\right]}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha-\sin\alpha')}\cdot\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\delta-\sin\delta')y\right],$$

$$N=\int_0^d dy\sin\varepsilon\frac{\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\alpha-\sin\alpha')\frac{\frac{1}{2}a}{d}y\right]}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha-\sin\alpha')}\cdot\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\delta-\sin\delta')y\right];$$

oder, wenn man die Producte durch Summen ersetzt:

$$M=\frac{\frac{1}{2}\sin\varepsilon}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha-\sin\alpha')}$$

$$\times\left\{\begin{aligned}&\int_0^d dy\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{2}[\sin\alpha-\sin\alpha']+d[\sin\delta-\sin\delta']\right)\frac{y}{d}\right]\\&+\int_0^d dy\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{2}[\sin\alpha-\sin\alpha']-d[\sin\delta-\sin\delta']\right)\frac{y}{d}\right]\end{aligned}\right\},$$

$$N=\frac{\frac{1}{2}\sin\varepsilon}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha-\sin\alpha')}$$

$$\times\left\{\begin{aligned}&\int_0^d dy\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{2}[\sin\alpha-\sin\alpha']-d[\sin\delta-\sin\delta']\right)\frac{y}{d}\right]\\&-\int_0^d dy\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{2}[\sin\alpha-\sin\alpha']+d[\sin\delta-\sin\delta']\right)\frac{y}{d}\right]\end{aligned}\right\}.$$

Bemerkt man, dass*)

$$d(\sin\delta-\sin\delta')+\frac{a}{2}(\sin\alpha-\sin\alpha')=b(\sin\beta-\sin\beta'),$$

$$d(\sin\delta-\sin\delta')-\frac{a}{2}(\sin\alpha-\sin\alpha')=c(\sin\gamma-\sin\gamma');$$

und integrirt zwischen den angegebenen Grenzen, so ergiebt sich

*) Es brauchen nur durch die Punkte A, B, C, D acht Normalebenen zu den gebeugten und einfallenden Strahlen gedacht zu werden.

$$M = \frac{\frac{1}{2} d \sin \varepsilon}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha')}$$

$$\times \left\{ \frac{1 - \cos\left[\frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\beta - \sin\beta')\right]}{\frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\beta - \sin\beta')} - \frac{1 - \cos\left[\frac{2\pi c}{\lambda}(\sin\gamma - \sin\gamma')\right]}{\frac{2\pi c}{\lambda}(\sin\gamma - \sin\gamma')} \right\},$$

$$N = \frac{\frac{1}{2} d \sin \varepsilon}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha')}$$

$$\times \left\{ - \frac{\sin\left[\frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\beta - \sin\beta')\right]}{\frac{2\pi b}{\lambda}(\sin\beta - \sin\beta')} + \frac{\sin\left[\frac{2\pi c}{\gamma}(\sin\gamma - \sin\gamma')\right]}{\frac{2\pi c}{\gamma}(\sin\gamma - \sin\gamma')} \right\};$$

woraus

$$(9) \quad \ldots \quad u^2 = M^2 + N^2 = \left[\frac{S\cos\Phi}{\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha')}\right]^2$$

$$\times \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\beta - \sin\beta')\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\beta - \sin\beta')}\right)^2 + \left(\frac{\sin\left[\frac{\pi c}{\lambda}(\sin\gamma - \sin\gamma')\right]}{\frac{\pi c}{\lambda}(\sin\gamma - \sin\gamma')}\right)^2 \\ \quad - 2\frac{\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\beta - \sin\beta')\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\beta - \sin\beta')} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi c}{\lambda}(\sin\gamma - \sin\gamma')\right]}{\frac{\pi c}{\lambda}(\sin\gamma - \sin\gamma')} \\ \quad \times \cos\left[\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha')\right] \end{array} \right\}.$$

S bezeichnet den Flächeninhalt des Dreieckes, und die Winkel α, α'; β, β'; γ, γ' hängen von den ursprünglichen Parametern φ, φ'; χ, χ'; ψ, ψ'; X, Φ durch folgende Relationen ab:

(10)

$$\sin\alpha = \sin\varphi \sin X, \quad \sin\beta = \sin\chi \sin X, \quad \sin\gamma = \sin\psi \sin X;$$
$$\sin\alpha' = \sin\varphi' \sin\Phi, \quad \sin\beta' = \sin\chi' \sin\Phi, \quad \sin\gamma' = \sin\psi' \sin\Phi.$$

V. Betrachten wir nun das Trapez. Es sei (Taf. III. Fig. 4.) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $EF = e$. Bezeichnen wir mit α, α' die Neigungswinkel der Seite a oder c gegen die beiden Normalebenen; mit β, β'; δ, δ'; ζ, ζ' die den Geraden b, d, e entsprechenden Neigungswinkel, so ist $x = \frac{a}{2} + \frac{c-a}{2e} y$ und

$$M = \frac{\sin\varepsilon}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha')}$$

$$\times \int_0^e dy \sin\left[\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha') + \frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{c-a}{e}(\sin\alpha - \sin\alpha')y\right]$$

$$\times \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\zeta - \sin\zeta')y\right],$$

$$N = \frac{\sin\varepsilon}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha')}$$

$$\times \int_0^e dy \sin\left[\frac{\pi a}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha') + \frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{c-a}{e}(\sin\alpha - \sin\alpha')y\right]$$

$$\times \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\sin\zeta - \sin\zeta')y\right].$$

Werden hierin die Sinusse der Summe zerlegt und folgende Abkürzungen:

(11)

$$A = \frac{\pi a}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha'), \quad B = \frac{\pi b}{\lambda}(\sin\beta - \sin\beta'), \quad C = \frac{\pi c}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha'),$$

$$D = \frac{\pi d}{\lambda}(\sin\delta - \sin\delta'), \quad E = \frac{\pi e}{\lambda}(\sin\zeta - \sin\zeta')$$

eingeführt, so wird:

$$M = \frac{\sin\varepsilon}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha')}$$

$$\times\left\{\sin A \int_0^e dy \cos(C-A)\frac{y}{e}\cos 2E\frac{y}{e} + \cos A \int_0^e dy \sin(C-A)\frac{y}{e}\cos 2E\frac{y}{e}\right\},$$

$$N = \frac{\sin\varepsilon}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\alpha - \sin\alpha')}$$

$$\times\left\{\sin A \int_0^e dy \cos(C-A)\frac{y}{e}\sin 2E\frac{y}{e} + \cos A \int_0^e dy \sin(C-A)\frac{y}{e}\sin 2E\frac{y}{e}\right\}.$$

Bezeichnen wir mit P, Q, R, T diese vier Integrale, in derselben Ordnung, in welcher sie geschrieben sind, und bemerken wir, dass (siehe IV. Anm.):

$$e(\sin\zeta - \sin\zeta') + \frac{c-a}{2}(\sin\alpha - \sin\alpha') = b(\sin\beta - \sin\beta') \quad \text{od.} \quad E + \frac{C-A}{2} = B,$$

$$e(\sin\zeta - \sin\zeta') - \frac{c-a}{2}(\sin\alpha - \sin\alpha') = d(\sin\delta - \sin\delta') \quad - \quad E - \frac{C-A}{2} = D,$$

$$b(\sin\beta - \sin\beta') - d(\sin\delta - \sin\delta') = (c-a)(\sin\alpha - \sin\alpha') \quad - \quad B - D = C - A,$$

so finden wir:

$$P+T=\int_0^e dy\cos 2D\frac{y}{e}=\frac{e\sin 2D}{2D}=e\frac{\sin D\cos D}{D},$$

$$P-T=\int_0^e dy\cos 2B\frac{y}{e}=\frac{e\sin 2B}{2B}=e\frac{\sin B\cos B}{B},$$

$$R+Q=\int_0^e dy\sin 2B\frac{y}{e}=\frac{e}{2}\cdot\frac{1-\cos 2B}{B}=e\frac{\sin^2 B}{B},$$

$$R-Q=\int_0^e dy\sin 2D\frac{y}{e}=\frac{e}{2}\cdot\frac{1-\cos 2D}{D}=e\frac{\sin^2 D}{D};$$

woraus sich ergiebt durch einfache Rechnungen:

$$M=\frac{\frac{a+c}{2}e\sin\varepsilon}{A+C}\left(\frac{\sin D}{D}\sin(A-D)+\frac{\sin B}{B}\sin(A+B)\right),$$

$$N=\frac{\frac{a+c}{2}e\sin\varepsilon}{A+C}\left(\frac{\sin D}{D}\cos(A-D)-\frac{\sin B}{B}\cos(A+B)\right);$$

daraus folgt:

$$(12)\;\ldots\ldots\; u^2=M^2+N^2=\left(\frac{S\cos\Phi}{A+C}\right)^2$$
$$\times\left[\left(\frac{\sin B}{B}\right)^2+\left(\frac{\sin D}{D}\right)^2-2\frac{\sin B}{B}\cdot\frac{\sin D}{D}\cos(A+C)\right],$$

oder auch:

$$(13)\;\ldots\ldots\; u^2=\left(\frac{S\cos\Phi}{\frac{\pi(a+c)}{\lambda}(\sin\alpha-\sin\alpha')}\right)^2$$
$$\times\left\{\begin{array}{l}\left(\dfrac{\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\beta-\sin\beta')\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\beta-\sin\beta')}\right)^2+\left(\dfrac{\sin\left[\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\delta-\sin\delta')\right]}{\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\delta-\sin\delta')}\right)^2\\ \quad-2\dfrac{\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\beta-\sin\beta')\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}(\sin\beta-\sin\beta')}\cdot\dfrac{\sin\left[\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\delta-\sin\delta')\right]}{\frac{\pi d}{\lambda}(\sin\delta-\sin\delta')}\\ \qquad\qquad\times\cos\left[\frac{\pi(a+c)}{\lambda}(\sin\alpha-\sin\alpha')\right]\end{array}\right\},$$

worin S den Flächeninhalt des Trapezes bezeichnet, und die Winkel α, α'; β, β'; δ, δ' dieselben Werthe wie in (10) haben; nur ist hier δ, δ' statt γ, γ' zu schreiben.

VI. Wird das einfallende Licht senkrecht auf die Ebene des Trapezes angenommen, wozu nöthig ist, $\Phi=0$ oder $\alpha'=\beta'=\delta'=0$ zu setzen, so kommt:

(14)

$$u^2=\left(\frac{S}{A+C}\right)^2\cdot\left[\left(\frac{\sin B}{B}\right)^2+\left(\frac{\sin D}{D}\right)^2-2\frac{\sin B}{B}\cdot\frac{\sin D}{D}\cos(A+C)\right]$$

$$=\left(\frac{S}{\frac{\pi(a+c)}{\lambda}\sin\varphi\sin X}\right)^2$$

$$\times\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\sin\left[\frac{\pi b}{\lambda}\sin\chi\sin X\right]}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\chi\sin X}\right)^2+\left(\frac{\sin\left[\frac{\pi d}{\lambda}\sin\psi\sin X\right]}{\frac{\pi d}{\lambda}\sin\psi\sin X}\right)^2\\ -2\frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\sin\chi\sin X\right)}{\frac{\pi b}{\lambda}\sin\chi\sin X}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\psi\sin X\right)}{\frac{\pi d}{\lambda}\sin\psi\sin X}\cos\left[\frac{\pi(a+c)}{\lambda}\sin\varphi\sin X\right]\end{array}\right\}.$$

Bemerkt man, dass $d\varphi=d\chi=d\psi$ ist, und u von zwei independenten Variabeln φ und X abhängt, so findet man durch die bekannten Methoden als Bedingungsgleichungen für die Maxima und Minima von u die beiden Gleichungen:

(15)

$$\left(\frac{\sin B}{B}-\frac{\sin D}{D}\cos(A+C)\right)\frac{B\cos B-\sin B}{B^2}b\cos\chi$$
$$+\left(\frac{\sin D}{D}-\frac{\sin B}{B}\cos(A+C)\right)\frac{D\cos D-\sin D}{D^2}d\cos\psi$$
$$+\frac{\sin B}{B}\cdot\frac{\sin D}{D}\sin(A+C)(a+c)\cos\varphi=u^2(A+C)(a+c)\cos\varphi,$$

$$\left(\frac{\sin B}{B}-\frac{\sin D}{D}\cos(A+C)\right)\frac{B\cos B-\sin B}{B^2}b\sin\chi$$
$$+\left(\frac{\sin D}{D}-\frac{\sin B}{B}\cos(A+C)\right)\frac{D\cos D-\sin D}{D^2}d\sin\psi$$
$$+\frac{\sin B}{B}\cdot\frac{\sin D}{D}\sin(A+C)(a+c)\sin\varphi=u^2(A+C)(a+c)\sin\varphi;$$

welche zu gleicher Zeit bestehen müssen. Aus diesen Gleichungen sowohl, als auch aus (14), lassen sich einige Minima und Maxima bestimmen.

1) $\sin(A+C)=0$ oder $\frac{\pi(a+c)}{\lambda}\sin\varphi\sin X=2m\pi$

und zu gleicher Zeit:

$$B=D \quad \text{oder} \quad b\sin\chi=d\sin\psi.$$

Man erkennt leicht, dass dieser Fall eintritt, wenn die Durchschnittslinie der Normalebene auf die gebeugten Strahlen mit der Trapezebene der Halbirungslinie der Parallelseiten dieses letzteren parallel läuft. Man hat also eine Reihe von isolirten dunkeln Punkten, welche auf einer zu dieser Halbirungslinie senkrechten Geraden liegen. Die dazwischen liegenden Maxima werden durch eine transcendente Gleichung gegeben.

2) $B = D = m\pi$ oder $\frac{\pi b \sin\chi \sin X}{\lambda} = \frac{\pi d \sin\psi \sin X}{\lambda} = m\pi$

oder auch:

$$\frac{\pi \frac{c-a}{2} \sin\varphi \sin X}{\lambda} = m\pi;$$

so hat man denselben Fall wie in 1), nämlich eine Reihe von dunkeln Punkten, welche auf einer zu der Halbirungslinie Senkrechten liegen und zwischen den vorigen dunkeln Punkten vertheilt sind.

3) $A + C = 0$ oder $\varphi = 0$

und zugleich:

$$B = D \quad \text{oder} \quad b \sin\chi = d \sin\psi.$$

In diesem Falle ist die Durchschnittslinie der Normalebene mit der Ebene des Trapezes parallel den Parallelseiten dieses letztern. Der entsprechende Theil des räumlichen Gebildes projicirt sich als eine auf den Parallelseiten senkrechte Gerade, auf welcher die Minima und die Maxima in derselben Weise wie im Falle eines Spaltes vertheilt sind. Die zugehörige Formel ist:

$$u = S \frac{\sin\left(\frac{\pi b}{\lambda} \sin\chi \sin X\right)}{\frac{\pi b}{\lambda} \sin\chi \sin X}.$$

4) Die Formel (14) reducirt sich noch auf Null und giebt hiermit Minimalörter, wenn zugleich $\sin B = 0$ und $\sin D = 0$ oder

$$\frac{\pi b}{\lambda} \sin\chi \sin X = m\pi \quad \text{und} \quad \frac{\pi d}{\lambda} \sin\psi \sin X = n\pi.$$

Diese Minima liegen auf den Durchschnittspunkten zweier Systeme von Geraden, welche resp. auf den nicht parallelen Seiten des Trapezes senkrecht stehen.

5) $\sin(A + C) = 0$ oder $\frac{\pi(a + c)}{\lambda} \sin\varphi \sin X = 2\, m\pi$

und zu gleicher Zeit:

$$\frac{\sin B}{B} = \frac{\sin D}{D}.$$

Der Fall 1) ist ein specieller Fall des jetzigen, welcher ebenfalls nur Minimalörter giebt. Da der Quotient $\frac{\sin B}{B}$ oder $\frac{\sin D}{D}$, sich stetig ändernd, in den verschiedenen Quadranten folgende Maximal- und Minimalwerthe

$$1 \ldots 0 \ldots -0{,}217 \ldots 0 \ldots +0{,}128 \ldots 0 \ldots -0{,}091 \ldots$$

u. s. w.

annimmt (S. Pogg. Ann. CX, 482 und dieses Archiv XXXVI, 17.), so folgt daraus, dass derselbe zwischen zwei Nullwerthen zweimal denselben Werth erreichen wird, und wenn die diesen letzteren entsprechenden, in verschiedenen Quadranten liegenden Bogen B und D heissen, so wird damit der obigen Gleichung $\frac{\sin B}{B} = \frac{\sin D}{D}$ Genüge geleistet.

6) $\sin(A+C) = 0$ oder $\frac{\pi(a+c)}{\lambda} \sin\varphi \sin X = (2m+1)\pi$

und zu gleicher Zeit:

$$\frac{\sin B}{B} + \frac{\sin D}{D} = 0;$$

ein dem vorhergehenden analoger Fall. Die entsprechenden Werthe von B und D liegen zwischen zwei auf einander folgenden Maxima.

VII. Der Kreis lässt sich am leichtesten behandeln. Es sei R dessen Radius, $\Phi = 0^0$, und man setze in den Formeln (5) $\varphi = 90^0$, $\chi = 0^0$, was wegen der Symmetrie des Kreises gestattet ist. Alsdann verschwindet das zweite Integral, und das erste, welches nun die Vibrationsintensität ausdrückt, reducirt sich auf:

$$u = \frac{\lambda}{\pi \sin X} \int_{-R}^{+R} dy \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} \sin X\right),$$

oder durch Anwendung von Polarcoordinaten:

$$(16) \ldots u = \frac{R\lambda}{\pi \sin X} \int_0^\pi d\varphi \sin\varphi \sin\left(\frac{2\pi R}{\lambda} \sin X \sin\varphi\right),$$

welche Formel ich früher schon (Pogg. Ann. CX, 492) aus den Schwerd'schen abgeleitet und näher untersucht habe.

Es ist zu bemerken, dass der Halbmesser der dunkeln (resp.

hellen) Ringe, welche man durch eine kreisförmige Oeffnung sieht, dem reciproken Werthe $\frac{1}{R}$ des Halbmessers der letzteren proportional ist; für eine zweite Oeffnung vom Radius R_1 sind jene Ringe proportional dem Werthe $\frac{1}{R_1}$. Der äussere und innere Radius der durch eine ringförmige Oeffnung gesehenen Ringe verhalten sich demnach zu einander wie $R_1 : R$, und die Dimensionen dieser Ringe in Bezug auf ihren inneren Radius werden repräsentirt durch $\frac{R_1 - R}{R}$, wie es Herschel vermuthet hat.

VIII. Betrachten wir endlich ein Parabelsegment. Nehmen wir wieder an, dass das einfallende Licht normal auf die Oeffnung fällt, und dass diese symmetrisch in Bezug auf die Parabelachse ist. Aus der Gleichung der Parabel $x^2 = 2py$ folgt $xdx = pdy$, woraus [(5)]:

17)

$$M = \frac{\sin\varepsilon}{\frac{\pi p}{\lambda}\sin\varphi\sin X}\int_0^x dx.x\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\varphi\sin X\right)\cos\left(\frac{\pi x^2}{\lambda p}\sin\chi\sin X\right),$$

$$N = \frac{\sin\varepsilon}{\frac{\pi p}{\lambda}\sin\varphi\sin X}\int_0^x dx.x\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\varphi\sin X\right)\cos\left(\frac{\pi x^2}{\lambda p}\sin\chi\sin X\right);$$

welche Formeln sich durch Reihen integriren lassen. Ich will mich auf den Aequatorialschnitt beschränken und die Erscheinung auf diesem zu bestimmen versuchen. Dies wird erreicht, wenn $\varphi = 90^0$ und $\chi = 0^0$ gesetzt wird, wodurch die zweite der Formeln (17) verschwindet, die erste aber sich auf folgende:

$$u = \frac{\sin\varepsilon}{\frac{\pi p}{\lambda}\sin X}\int_0^x dx\,.\,x\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin X\right)$$

reducirt, welche die Vibrationsintensität des Lichtes auf dem Aequatorialschnitte ausdrückt. Daraus erhält man durch Integration folgende merkwürdige Formel:

(18)

$$u = \frac{2px}{\left(\frac{2\pi p}{\lambda}\sin X\right)^2}\left[\frac{\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin X\right)}{\frac{2\pi x}{\lambda}\sin X} - \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin X\right)\right].$$

Die dunkeln Stellen werden bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{2\pi x}{\lambda}\sin X = \text{tang}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\sin X\right);$$

woraus erhellet, dass auf dem hier betrachteten Aequatorialschnitte die Minima dieselbe Stelle wie die Maxima eines Spaltes einnehmen, dessen Breite gleich der Sehne des Parabelsegments sein würde. Ist $x = p$, d. i. wird das Parabelsegment durch die Sehne begrenzt, welche durch den Brennpunkt der Parabel geht, so wird:

$$u = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{\pi\sin X}{\lambda}\right)^2}\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi p}{\lambda}\sin X\right)}{\frac{\pi p}{\lambda}\sin X} - \cos\left(\frac{\pi p}{\lambda}\sin X\right)\right].$$

IX. Das Princip, auf welchem die in II. aufgestellten Formeln (5) beruhen, behält seine Gültigkeit auch für den Fall, wo die Begrenzungslinie der Oeffnung, durch welche das Licht gebeugt werden soll, keinen geradlinigen Durchmesser hat; man stösst aber bei Anwendung der entsprechenden Formeln auf Schwierigkeiten, welche man, wegen der Unvollkommenheit der Rechnungsmethoden, im Allgemeinen nicht im Stande ist, zu bewältigen. Man kann nämlich für jede gegebene Oeffnung $ACBA$ (Taf. III. Fig. 5.) den geometrischen Ort AGM der Mitten eines beliebigen Systems von parallelen Sehnen BC, EF...., d. i. einen krummlinigen Durchmesser der Begrenzungscurve $BEAFC$, mittelst der Gleichung dieser letzteren, bestimmen. Bezeichnen aber x_1, $-x_2$ die Abscissen der Punkte E, F; y ihre gemeinschaftliche Ordinate, $r = AG$ und θ die Polarcoordinaten des krummlinigen Durchmessers AGM, und bemerkt man, dass $y = r\sin\theta$, woraus $dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$, dass ferner $\chi = \varphi - \theta$, $\chi' = \varphi' - \theta$, $\varepsilon = 90^0$; so nehmen die Formeln (5) folgende Gestalt an:

$$M = \frac{1}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\varphi\sin X - \sin\varphi'\sin\Phi)}\int_0^r (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)$$
$$\times \sin\left[\frac{\pi(x_1+x_2)}{\lambda}(\sin\varphi\sin X - \sin\varphi'\sin\Phi)\right]$$
$$\times \cos\left[\frac{2\pi r\sin\theta}{\lambda}(\sin[\varphi-\theta]\sin X - \sin[\varphi'-\theta]\sin\Phi)\right],$$

$$N = \frac{1}{\frac{\pi}{\lambda}(\sin\varphi\sin X - \sin\varphi'\sin\Phi)}\int_0^r (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)$$
$$\times \sin\left[\frac{\pi(x_1+x_2)}{\lambda}(\sin\varphi\sin X - \sin\varphi'\sin\Phi)\right]$$
$$\times \sin\left[\frac{2\pi r\sin\theta}{\lambda}(\sin[\varphi-\theta]\sin X - \sin[\varphi-\theta)\sin\Phi)\right],$$

worin $x_1 + x_2$ durch r und θ zu ersetzen ist; auch muss man r oder θ mittelst der Gleichung des krummlinigen Durchmessers eliminiren.

Im Mai 1861.

XXVI.

Ueber die Berechnung des sphärischen Vierecks im Kreise aus seinen Seiten.

Von

Herrn Professor Dr. *Kambly*

in Breslau.

Herr Professor König schliesst seine im 34sten Bande des Archivs Nr. III. enthaltene dankenswerthe Mittheilung über die Fläche des sphärischen Vierecks mit den Worten: „Gewiss giebt es auch für $\operatorname{tang}\frac{F}{4}$ einen Ausdruck, der für $d=0$ in die $\operatorname{tang}\frac{f}{4}$ des Simon Lhuilier übergeht; aber wie findet man ihn?" In der That hat diese Vermuthung auf den ersten Blick viel für sich, und es liegt nahe, die Lhuilier'sche Formel auf das in einen Kugelkreis einbeschriebene sphärische Viereck in derselben Weise zu erweitern, wie die Formel für den Flächeninhalt des ebenen Dreiecks auf das ebene Viereck ausgedehnt werden kann. Hiernach würde, wenn man den halben Perimeter eines solchen Kugelvierecks mit s und den Ueberschuss seiner Winkelsumme über 360^0 mit E bezeichnet,

$$\tang\frac{E}{4} = \sqrt{\tang\frac{s-a}{2}\tang\frac{s-b}{2}\tang\frac{s-c}{2}\tang\frac{s-d}{2}}$$

sein.

Man überzeugt sich aber sehr leicht, dass diese Formel nicht richtig ist, da sie für die Hälfte der Kugeloberfläche, für welche sie doch auch gelten müsste, $E = 180^0$ statt $E = 360^0$ ergiebt.

Ausserdem stimmt sie, wie nachher gezeigt werden soll, auch nicht zu den für den speciellen Fall der Gleichheit der Seiten leicht zu entwickelnden Formeln. Bemerkenswerth ist hierbei jedoch, dass aus der erwähnten Gleichung sich Ausdrücke für $\cos\frac{E}{2}$ und $\sin\frac{E}{2}$ ergeben, welche unter der Voraussetzung, dass eine Seite gleich Null wird, in die bekannten Formeln für den sphärischen Excess des Kugeldreiecks übergehen. Zunächst hat man nämlich:

$$\frac{1-\cos\frac{E}{2}}{1+\cos\frac{E}{2}} = \frac{\sin\frac{b+c+d-a}{4}\sin\frac{a+c+d-b}{4}\sin\frac{a+b+d-c}{4}\sin\frac{a+b+c-d}{4}}{\cos\frac{b+c+d-a}{4}\cos\frac{a+c+d-b}{4}\cos\frac{a+b+d-c}{4}\cos\frac{a+b+c-d}{4}}$$

$$= \frac{(\cos\frac{c+d}{2} - \cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2} - \cos\frac{c-d}{2})}{(\cos\frac{c+d}{2} + \cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{c-d}{2})},$$

folglich:

$$\cos\frac{E}{2} = \frac{\left\{\begin{array}{l}(\cos\frac{c+d}{2}+\cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c-d}{2})\\ -(\cos\frac{c+d}{2}-\cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c-d}{2})\end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l}(\cos\frac{c+d}{2}+\cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c-d}{2})\\ +(\cos\frac{c+d}{2}-\cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2}-\cos\frac{c-d}{2})\end{array}\right\}}$$

$$= \frac{\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{c+d}{2}\cos\frac{c-d}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{c+d}{2} + \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{c-d}{2}}$$

$$= \frac{\cos a + \cos b + \cos c + \cos d}{4(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2} + \sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2})}.$$

Endlich ist:

$$\sin\frac{E}{2} = (1+\cos\frac{E}{2})\tang\frac{E}{4}$$

$$= \frac{\left\{ 2(\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{c+d}{2} + \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{c-d}{2} + \cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{c-d}{2}\cos\frac{c+d}{2}) \right\}}{(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{c+d}{2}+\cos\frac{c-d}{2})}$$

$$\times\sqrt{\tang\frac{s-a}{2}\tang\frac{s-b}{2}\tang\frac{s-c}{2}\tang\frac{s-d}{2}}$$

$$= \frac{2(\cos\frac{c+d}{2}+\cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c-d}{2})}{(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{c+d}{2}+\cos\frac{c-d}{2})}$$

$$\times\sqrt{\tang\frac{s-a}{2}\tang\frac{s-b}{2}\tang\frac{s-c}{2}\tang\frac{s-d}{2}}$$

$$= \frac{(\cos\frac{c+d}{2}+\cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c-d}{2})}{2(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2})}$$

$$\times\sqrt{\tang\frac{s-a}{2}\tang\frac{s-b}{2}\tang\frac{s-c}{2}\tang\frac{s-d}{2}}.$$

Bringt man nun den Zähler des Bruches in die Wurzel hinein, welche nach der vorangehenden Entwickelung

$$= \sqrt{\frac{4\sin\frac{b+c+d-a}{4}\sin\frac{a+c+d-b}{4}\sin\frac{a+b+d-c}{4}\sin\frac{a+b+c-d}{4}}{(\cos\frac{c+d}{2}+\cos\frac{a-b}{2})(\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c-d}{2})}}$$

ist, so hebt sich der Nenner des Radicandus auf, und der Zähler wird:

$$16\sin\frac{b+c+d-a}{4}\sin\frac{a+c+d-b}{4}\sin\frac{a+b+d-c}{4}\sin\frac{a+b+c-d}{4}$$

$$\times\cos\frac{b+c+d-a}{4}\cos\frac{a+c+d-b}{4}\cos\frac{a+b+d-c}{4}\cos\frac{a+b+c-d}{4}$$

$$=\sin\frac{b+c+d-a}{2}\sin\frac{a+c+d-b}{2}\sin\frac{a+b+d-c}{2}\sin\frac{a+b+c-d}{2},$$

also:

$$\sin\frac{E}{2}=\frac{\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)\sin(s-d)}}{2(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2})}\ ^{*)}.$$

Wahrscheinlich ist nun die Uebereinstimmung der gefundenen Ausdrücke für $\sin\frac{E}{2}$, $\cos\frac{E}{2}$ und $\tang\frac{E}{4}$ mit den entsprechenden Formeln für das Kugeldreieck dem Herrn Prouhet, Répétiteur à l'École impériale Polytechnique, ausreichend erschienen, um sie für richtig zu halten und ihre Begründung zu verlangen. Das Januarheft der ehemals Gerono- und Terquem'schen, jetzt Gerono- und Prouhet'schen „Mathematischen Annalen" enthält nämlich die von P. (Prouhet) gestellte (633ste) question, jene drei Formeln für die aire d'un quadrilatère sphérique inscrit zu entwickeln.

Wunderbarer Weise hat bis jetzt trotz des rühmlichen Eifers, welcher in Frankreich für die Lösung jener questions rege ist, noch kein Mitarbeiter des Journals die Richtigkeit der erwähnten Gleichungen in Zweifel gezogen; auch Herrn Prouhet selbst scheint dadurch, dass jene Aufgabe bisher ungelöst geblieben ist, über die Geltung der Formeln noch kein Bedenken erregt worden zu sein. Dass sie jedoch falsch sind, lässt sich an dem vorerwähnten speciellen Beispiele leicht nachweisen.

Ist nämlich $a=b=c=d$, demnach $A=B=C=D$, und bezeichnet man den sphärischen Radius des umschriebenen (Ecken-) Kreises mit r, so erhält man aus jedem der gleichschenkligen Dreiecke, deren Seiten a, r, r sind:

$$\tang r=\frac{\tang\frac{a}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\ ^{**)},\quad \text{also}\quad \sec r^2=\frac{\cos\frac{A^2}{2}+\tang\frac{a^2}{2}}{\cos\frac{A^2}{2}},$$

andererseits aber aus den Dreiecken, deren Seiten a, a und $2r$ sind, da $\sin\frac{E}{2}=-\cos\frac{S}{2}$ ist, auch:

$$\tang r=\frac{\sin r}{\cos\frac{a^2}{2}\sin A}\ ^{**)},\quad \text{also}\quad \cos r=\cos\frac{a^2}{2}\sin A;$$

demnach:

---

*) Eben so leicht ist die Entwickelung der Formeln für $\sin\frac{E}{2}$ und $\tang\frac{E}{4}$ aus $\cos\frac{E}{2}$.

**) S. meine Sphärische Trigonom., Uebungsaufgab. 16 und 17.

$$\frac{\cos\frac{A^2}{2}}{\cos\frac{A^2}{2}+\tang\frac{a^2}{2}}=\cos\frac{a^4}{2}\sin A^2$$

und

$$\cos\frac{a^4}{2}\sin\frac{A^2}{2}\cos\frac{A^2}{2}+\cos\frac{a^4}{2}\tang\frac{a^2}{2}\sin\frac{A^2}{2}=\tfrac{1}{4},$$

mithin

$$\sin\frac{A^4}{2}-\frac{1}{\cos\frac{a^2}{2}}\sin\frac{A^2}{2}=\frac{1}{4\cos\frac{a^4}{2}},$$

woraus

$$\sin\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}}}{\cos\frac{a}{2}},\quad \cos\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\cos a}}{\cos\frac{a}{2}},\quad \sin A=\frac{\sqrt{\cos a}}{\cos\frac{a^2}{2}},$$

$$\tang\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{\cos a}},\quad \cos A=-\tang\frac{a^2}{2}\quad\text{und}\quad \tang r=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\cos a}}$$

folgt.

Sucht man nun den sphärischen Excess (ε) eines der gleichschenkligen Dreiecke, welche die Hälfte des Vierecks sind, mittelst der bekannten Formel für den Cosinus des halben Excesses eines sphärischen Dreiecks:

$$\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos C}{\cos\frac{c}{2}},$$

so ergiebt sich für den vorliegenden Fall, da $\varepsilon=\frac{1}{2}E$ ist, nach einigen leichten Umformungen:

$$\cos\frac{E}{4}=\frac{\sqrt{\cos a}}{\cos\frac{a^2}{2}}=\sin A,\quad \sin\frac{E}{4}=\tang\frac{a^2}{2},$$

$$\cos\frac{E}{2}=-\cos 2A=1-2\tang\frac{a^4}{2}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man unmittelbar, da

$$E=4A-360^0,\quad\text{also}\quad \cos\frac{E}{2}=-\cos 2A$$

ist. Eben so folgt:

$$\sin\frac{E}{2}=-\sin 2A=\frac{2\sqrt{\cos a}\tang\frac{a^2}{2}}{\cos\frac{a^2}{2}}\quad\text{und}\quad \tang\frac{E}{4}=\frac{\sin\frac{a^2}{2}}{\sqrt{\cos a}}.$$

Im Widerspruche mit diesen Formeln, welche sich auch an-

derweitig verificiren lassen, erhält man aus den Prouhet'schen Gleichungen für den Fall $a=b=c=d$:

$$\cos\frac{E}{2}=\frac{\cos a}{\cos\frac{a^4}{2}+\sin\frac{a^4}{2}},\quad \sin\frac{E}{2}=\frac{\frac{1}{2}\sin a^2}{\cos\frac{a^4}{2}+\sin\frac{a^4}{2}}\ \text{und}\ \tan\frac{E}{4}=\tan\frac{a^2}{2},$$

Ausdrücke, welche, mit den vorher entwickelten zusammengestellt, zu nichtidentischen Gleichungen führen. Zugleich geht aus dem völligen Mangel an Analogie zwischen den beiden Formelgruppen mit ziemlicher Gewissheit hervor, dass die im Eingange erwähnte Verallgemeinerung nicht möglich ist.

Um die Aufgabe für das ungleichseitige Kugelviereck im Kreise aufzulösen, bedarf man der beiden Fundamental-Gleichungen

$$\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C=\cos c\cos d+\sin c\sin d\cos A$$

und

$$\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C=\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\sin A,$$

in welchen A den von c und d, C den von a und b eingeschlossenen Winkel bedeutet, und von denen die erste sich unmittelbar ergiebt, wenn man die den Winkeln A und C gegenüber liegende Diagonale (BD) aus beiden Dreiecken darstellt und die Werthe gleichsetzt, während die zweite durch Elimination von $\tan r$ aus den beiden Gleichungen

$$\tan r=\frac{\sin\frac{BD}{2}}{\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\sin A}\ \text{und}\ \tan r=\frac{\sin\frac{BD}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin C}$$

gewonnen wird.

Man erhält, wenn man

$$1+\cos a+\cos b+\cos a\cos b=(a,\,b),$$
$$1+\cos c+\cos d+\cos c\cos d=(c,\,d)$$

und

$$\cos c\cos d-\cos a\cos b=(a,\,b,\,c,\,d)$$

setzt:

$$\cos^2 A-\frac{2\sin c\sin d\,(a,\,b,\,c,\,d)\,(a,\,b)}{(c,\,d)\sin a^2\sin b^2-(a,\,b)\sin c^2\sin d^2}\cos A$$

$$=\frac{(a,b,c,d)^2(a,b)-\sin a^2\sin b^2[(a,b,c,d)+\cos a+\cos b-\cos c-\cos d]}{(c,\,d)^2\sin a^2\sin b^2-(a,\,b)^2\sin c^2\sin d^2},$$

also Winkel A und das Uebrige in bekannter Weise.

Nachschrift.

Breslau, 27. Juni 1863.

Herr Prouhet hat in dem mir vor einigen Tagen zugekommenen Mai-Hefte der Nouvelles Annales die oben bemerkten Formeln als falsch zurückgenommen, indem er in einem „Erratum“ als Grund ein Versehen in einem Vorzeichen angiebt, welches sei: d'autant plus perfide, qu'elle conduisait à des résultats fort vraisemblables. Was das für ein Fehler sein soll, kann ich nicht ergründen; wahrscheinlich verhält sich die Sache so, wie ich in meinem Artikel vermuthet habe. — Hiernach erscheint nun mein Aufsatz als überflüssig, und ich ersuche Sie, wenn Sie diese Ansicht haben, mir denselben gütigst zurückschicken zu wollen, da ich kein Brouillon von ihm besitze. Freilich könnte für deutsche Mathematiker, welche das Gerono'sche Journal nicht lesen, es immer noch wünschenswerth sein, zu erfahren, wie sich die von Herrn Professor König angeregte Frage erledige. Sollten Sie aus diesem Grunde Sich noch für die Aufnahme entscheiden, so bitte ich nur in einer Bemerkung hinzuzufügen, dass der Artikel Ihnen (doch mindestens 14 Tage) vor Veröffentlichung des Mai-Heftes zugekommen ist.

Wenige Tage vor Empfang des Terquem'schen Journals wurde mir auch der 39ste Band Ihres Archivs wieder zuückgegeben, in welchem ich Ihre interessante Mittheilung aus P. Serret's Geometrie fand. Nunmehr ist es mir ganz unbegreiflich, wie Prouhet seine Formeln aufstellen konnte, da beide von Serret angegebene Formeln, von denen die zweite übrigens sehr leicht aus der ersten folgt, meine Behauptung bestätigen und — auch mit Begehung eines Fehlers im Vorzeichen — nicht zu den Prouhet'schen Formeln führen.

Schliesslich bleibt immer noch die Frage, ob die Formel für $\sin\frac{1}{2}E$ sich ohne stereographische Projection aus den am Schlusse meiner Abhandlung mitgetheilten Formeln werde ableiten lassen *).

L. Kambly.

---

*) Ich habe es aus, aus vorstehendem Briefe des Herrn Professor Kambly von selbst ersichtlichen Gründen für zweckmässig gehalten, den mir eingesandten Aufsatz doch noch aufzunehmen mit der vorstehenden Nachschrift. Der Herausgeber.

XXVII.

Ueber einige Eigenschaften solcher Tetraeder, deren sechs Kanten eine Kugel berühren. (Tangenten-Tetraeder).

Von

Herrn Doctor *Gustav Junghann*
in Gotha.

Im XXXIV. Bande S. 370. dieses „Archivs" habe ich den Gedanken ausgesprochen, dass sich neben die ebene und sphärische Trigonometrie wohl eine dritte Disciplin hinstellen liesse, welche die dreiseitige Ecke (eine der fünf Grundformen räumlicher Ausdehnung: Linie, Fläche, Körper, Winkel, Ecke) für den algebraischen Ausdruck stereometrischer Gesetze als selbständiges Rechnungselement mit den übrigen Grundformen in Verbindung brächte, und zwar vermittels gewisser Eckenfunctionen, analog den Winkelfunctionen Sinus, Tangens u. s. w., durch welche die Trigonometrie die Winkel als Rechnungselement in den algebraischen Ausdruck planimetrischer Gesetze eingeführt. Diesen Gedanken habe ich seitdem ausgeführt in einem Buche, welches unter dem Titel „Tetraedrometrie", erster Theil: „die Goniometrie dreier Dimensionen" 1862, zweiter Theil: „die Eckenfunctionen in Verbindung mit Längen-, Flächen und Körpergrössen" 1863. Bei E. F. Thienemann in Gotha erschienen ist. Den ersten Theil hat Herr Professor Scherk die Güte gehabt im „Literarischen Bericht Nr. CLV. des Archivs von 1862, Band XXXIX. freundlichst zu empfehlen. — Jener Grundgedanke hat sich bei der Bearbeitung in überraschend höherem Gerade fruchtbar er-

wiesen, als ich im Jahre 1860 ahnte, und ich glaube mit dem genannten Buche dargethan zu haben, dass die Tetraedrometrie für die Stereometrie eine eben so wesentliche und nothwendige Ergänzung ist, wie die Trigonometrie für die Planimetrie.

Bei diesen Untersuchungen boten sich einige meines Wissens noch nicht bemerkte Eigenschaften der in der Ueberschrift bezeichneten Tetraeder dar, welche ich zwar auf tetraedrometrischem Wege gefunden, aber nicht in das Buch aufgenommen habe, theils weil dasselbe überhaupt nicht die Aufgabe hat, sich mit besonderen Arten des Tetraeders zu beschäftigen, sondern allgemein gültige Formeln entwickelt, theils weil diese Eigenschaften sich noch einfacher ohne Tetraedrometrie entwickeln lassen. Diese mitzutheilen ist der Zweck des folgenden Aufsatzes.

§. 1.

Es seien die Seiten des Dreiecks ABC (Taf. III. Fig. 8.):

$$BC=l,\ AC=m,\ AB=n$$

und drei von den Eckpunkten A, B, C ausgehende, im Punkte O zusammentreffende Gerade:

$$AO=u,\ BO=p,\ CO=q;$$

so dass l und u, m und p, n und q Gegenkanten des Tetraeders $OABC$ sind, welches mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet werde. Ferner werden bezeichnet die Dreiecke:

$$ABC=\varDelta_0,\quad OBC=\varDelta_1,\quad OAC=\varDelta_2,\quad OAB=\varDelta_3.$$

Von einem Punkte K im Inneren des $\mathfrak{T}$ seien auf diese Dreiecke die Normalen KD_0, KD_1, KD_2, KD_3 gefällt, und von demselben Punkte auf die sechs Kanten l, m, n, u, p, q die Normalen KL, KM, KN, KU, KP, KQ. — Die Flächenwinkel der Ecke O heissen:

$$\varDelta_2\varDelta_3=\alpha,\quad \varDelta_1\varDelta_3=\beta,\quad \varDelta_1\varDelta_2=\gamma$$

und die Flächenwinkel am Dreieck $\varDelta_0$:

$$\varDelta_0\varDelta_1=\alpha',\quad \varDelta_0\varDelta_2=\beta',\quad \varDelta_0\varDelta_3=\gamma';$$

so dass α und α', β und β', γ und γ' einander gegenüber liegende Flächenwinkel sind.

§. 2.

Als bekannt darf vorausgesetzt werden, dass es nicht für

jedes Tetraeder eine Kugel giebt, welche alle Kanten berührt, wie es für jedes eine umschriebene und eine (den Flächen) eingeschriebene giebt. Vielmehr ist deren Möglichkeit an gewisse Eigenschaften des Tetraeders gebunden. Von diesen hat Crelle im ersten Bande der „Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen" Berlin 1821 S. 118. die eine bemerkt:

> Im Tangenten-Tetraeder sind die drei Summen je zweier Gegenkanten einander gleich,

welche leicht zu beweisen ist:

Ist in Taf. III. Fig. 8. K das Centrum der Kugel, welche die Kanten des $\mathfrak{T}$ in L, M, N, U, P, Q berührt (so dass $KL = KM = \ldots = k$), so ist, weil die von einem Punkte an eine Kugel gezogenen Tangenten gleiche Länge haben:

$$\begin{aligned}
OU &= OP = OQ = o,\\
AU &= AM = AN = a,\\
BL &= BP = BN = b,\\
CL &= CM = CQ = c;
\end{aligned}$$

worin o, a, b, c die für diese Längen gewählten Bezeichnungen sind. Demnach ist:

$$\left.\begin{aligned}
o+a=u, \quad b+c=l,\\
o+b=p, \quad a+c=m,\\
o+c=q, \quad a+b=n;
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und die erwähnte Eigenschaft folgt ganz einfach daraus, dass

$$(o+a)+(b+c)=(o+b)+(a+c)=(o+c)+(a+b)$$

d. h.:

$$u+l \quad = \quad p+m \quad = \quad q+n. \tag{2}$$

Crelle leitet diesen Satz ab aus den durch die Kanten ausgedrückten Werthen von o, a, b, c. Diese nämlich sind zugleich Tangenten an den Kreisen, welche die Durchschnitte der Flächen Δ_0, Δ_1, Δ_2, Δ_3 mit der Kugel K darstellen, deren Mittelpunkte D_0, D_1, D_2, D_3 sind, und welche jenen Dreiecken eingeschrieben sind. Nach bekannten planimetrischen Betrachtungen ergiebt sich daraus:

(3)

$$o = \tfrac{1}{2}(-l+p+q) = \tfrac{1}{2}(u-m+q) = \tfrac{1}{2}(u+p-n),$$

$$a = \tfrac{1}{2}(-l+m+n) = \tfrac{1}{2}(u+m-q) = \tfrac{1}{2}(u-p+n),$$

$$b = \tfrac{1}{2}(l - m + n) = \tfrac{1}{2}(l + p - q) = \tfrac{1}{2}(-u + p + n),$$

$$c = \tfrac{1}{2}(l + m - n) = \tfrac{1}{2}(l - p + q) = \tfrac{1}{2}(-u + m + q);$$

aus deren jeden zwei Werthen für o oder a oder b oder c der obige Lehrsatz folgt.

Ausserdem ergeben sich daraus noch die folgenden Gleichungen:

(4)

$$o - a = p - n = q - m, \quad b - c = n - m = p - q,$$

$$o - b = q - l = u - n, \quad a - c = n - l = u - q,$$

$$o - c = p - l = u - m; \quad a - b = m - l = u - p;$$

d. h. die Differenz zweier Abschnitte einer Kante ist gleich der Differenz der daranstossenden Seiten jedes der Dreiecke, welche in jener Kante zusammenstossen.

Aus (1) folgt weiter:

$$ul = ob + oc + ab + ac,$$

$$pm = oa + oc + ab + bc,$$

$$qn = oa + ob + ac + bc;$$

woraus sich ergiebt:

$$\left.\begin{array}{r} -ul + pm + qn = 2(oa + bc), \\ ul - pm + qn = 2(ob + ac), \\ ul + pm - qn = 2(oc + ab); \end{array}\right\} \qquad (5)$$

und daraus wieder:

$$ul + pm + qn = 2(oa + ob + oc + bc + ac + ab), \qquad (6)$$

d. h. die Summe der Rechtecke je zweier Gegenkanten ist gleich der doppelten Summe der Rechtecke je zweier Abschnitte einer Kante.

Nach einem bekannten planimetrischen Satze besteht für den Inhalt Δ_0 eines ebenen Dreiecks, dessen Seiten l, m, n sind, die Gleichung:

$$16\Delta_0^2 = (l + m + n)(-l + m + n)(l - m + n)(l + m - n),$$

also ist nach (3):

$$\left.\begin{aligned}\Delta_0^2 &= (a+b+c)abc,\\ \Delta_1^2 &= (o+b+c)obc,\\ \Delta_2^2 &= (o+a+c)oac,\\ \Delta_3^2 &= (o+a+b)oab.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

§. 3.

Unter „**Aussenraum eines Tetraeders**“ verstehe ich den unvollständig begrenzten Raum, den eine Tetraederfläche mit den über sie hinausgeführten Erweiterungen der drei anderen bestimmt. Die drei Ecken solches Raumes heissen: „**Aussenecken**“.

Es kann nun ein Tetraeder auch in dem Sinne Tangenten-Tetraeder sein, dass seine Kanten eine Kugel berühren, deren Centrum in einem der vier Aussenräume liegt. Wir wollen ein solches ein „**anschliessendes** Tangenten-Tetraeder“ nennen im Gegensatz zu dem bis jetzt betrachteten „**umschliessenden**“. Das Dreieck, in dessen Aussenraume das Centrum der Kugel liegt, heisse „**Anschlussdreieck**“.

Für ein anschliessendes Tangenten-Tetraeder erleiden nun die Gleichungen 1)—7) bestimmte Abänderungen.

Ist etwa Δ_0 dass Anschlussdreieck, so ist:

$$\left.\begin{aligned} o-a &= u, & b+c &= l,\\ o-b &= p, & a+c &= m,\\ o-c &= q; & a+b &= n;\end{aligned}\right\} \qquad (1^*)$$

also ist:

$$l-u = m-p = n-q = -o+a+b+c. \qquad (2^*)$$

Im anschliessenden Tangenten-Tetraeder sind die drei Differenzen der Seiten des Anschlussdreiecks und ihrer Gegenkanten einander gleich.

Kann ein Tetraeder ein umschliessendes und anschliessendes Tangenten-Tetraeder zugleich sein?

Wenn dies stattfinden soll, so muss zugleich sein:

$$l+u = m+p = n+q,$$

$$l-u = m-p = n-q;$$

also auch $l = m = n$ und $u = p = q$, also:

Zwei von den Kanten berührte Kugeln können nur für ein gleichschenkliges Tetraeder auf gleichseitiger Basis stattfinden.

Ferner ist:

(3*)

$$o = \tfrac{1}{2}(l + p + q) = \tfrac{1}{2}(u + m + q) = \tfrac{1}{2}(u + p + n),$$
$$a = \tfrac{1}{2}(-l + p + q) = \tfrac{1}{2}(-u + m + q) = \tfrac{1}{2}(-u + p + n),$$
$$b = \tfrac{1}{2}(l - m + n) = \tfrac{1}{2}(l - p + q) = \tfrac{1}{2}(u - p + n),$$
$$c = \tfrac{1}{2}(l + m - n) = \tfrac{1}{2}(l + p - q) = \tfrac{1}{2}(u + m - q);$$

(4*)

$$o + a = p + n = q + m, \quad b - c = n - m = q - p,$$
$$o + b = q + l = u + n, \quad a - c = n - l = q - u,$$
$$o + c = p + l = u + m; \quad a - b = m - l = p - u.$$

Ferner aus (1*):

$$ul = ob + oc - ab - ac,$$
$$pm = oa + oc - ab - bc,$$
$$qn = oa + ob - ac - bc;$$

also:

$$\left.\begin{aligned} -ul + pm + qn &= 2(oa - bc), \\ ul - pm + qn &= 2(ob - ac), \\ ul + pm - qn &= 2(oc - ab); \end{aligned}\right\} \qquad (5^*)$$

und daraus:

$$ul + pm + qn = 2(oa + ob + oc - bc - ac - ab). \qquad (6^*)$$

Im anschliessenden Tangenten-Tetraeder ist die Summe der Rechtecke je zweier Gegenkanten gleich der doppelten Summe der Rechtecke je zweier Abschnitte derjenigen Kanten, welche die Kugel in ihren Verlängerungen berühren weniger der doppelten Summe der Rechtecke je zweier Abschnitte der Seiten des Anschlussdreiecks.

Endlich ist:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_0^2 &= (a+b+c)abc,\\ \Delta_1^2 &= (o-b-c)obc,\\ \Delta_2^2 &= (o-a-c)oac,\\ \Delta_3^2 &= (o-a-b)oab.\end{aligned}\right\} \quad (7^*)$$

§. 4.

Die rechtwinkeligen Dreiecke KUO, KPO, KQO sind wegen der gemeinschaftlichen Hypotenuse KO und der gleichen Katheten $KU = KP = KQ$ congruent, also ist:

$$\angle KOU = \angle KOP = \angle KOQ = \varrho_0$$

der Winkel, welchen die Axe des der Ecke O umschriebenen Kegels mit dessen Seite macht.

Beschreiben wir um O mit einem beliebigen Radius $O\alpha$ eine Kugelfläche, auf welcher sich das der Ecke O entsprechende sphärische Dreieck $\alpha\beta\gamma$ abzeichnet, und wird dieses von der Axe OK in δ geschnitten, so ist:

$$\delta\alpha = \delta\beta = \delta\gamma = \varrho_0,$$

also auch:

$$\angle\delta\beta\gamma = \angle\delta\gamma\beta, \quad \angle\delta\alpha\gamma = \angle\delta\gamma\alpha, \quad \angle\delta\alpha\beta = \angle\delta\beta\alpha;$$

also:

$$\delta\beta\gamma + \delta\gamma\beta = \beta + \gamma - \delta\beta\alpha - \delta\gamma\alpha = \beta + \gamma - \delta\alpha\beta - \delta\alpha\gamma = \beta + \gamma - \alpha,$$

also:

$$\delta\beta\gamma = \delta\gamma\beta = \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta + \gamma),$$

$$\delta\alpha\gamma = \delta\gamma\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta + \gamma),$$

$$\delta\alpha\beta = \delta\beta\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta - \gamma)\ ^{*}).$$

Nun ist:

$$\delta\beta\gamma = \angle KPD_1 = \delta_1\beta\alpha' = \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta - \gamma')$$

in der Ecke B. Der Winkel KPD_1 ist aber wieder gleich den Winkeln KLD_1 und KQD_1 wegen der Congruenz der eben so

*) Ueber den geometrischen Zusammenhang der einem sphärischen Dreieck und seinen Nebendreiecken um- und eingeschriebenen Kreise mit den Winkel- und Seitensummen s. meine „Tetraedrometrie“ Thl. I. §. 74.

bezeichneten rechtwinkligen Dreiecke. Diese Betrachtung ergiebt in vollständiger Zusammenstellung:

(8)

$$D_0LK = D_0MK = D_0NK = \tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta'+\gamma') = \tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta+\gamma') = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta'-\gamma),$$

$$D_1LK = D_1PK = D_1QK = \tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) = \tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta'+\gamma) = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta-\gamma'),$$

$$D_2UK = D_2MK = D_2QK = \tfrac{1}{2}(-\alpha'+\beta'+\gamma) = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta'-\gamma'),$$

$$D_3UK = D_3PK = D_3NK = \tfrac{1}{2}(-\alpha'+\beta+\gamma') = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta'+\gamma') = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma).$$

Aus jeder dieser Gleichungen geht hervor:

$$\alpha+\alpha' = \beta+\beta' = \gamma+\gamma', \qquad (9)$$

d. h.: In jedem umschliessenden Tangenten-Tetraeder sind die drei Summen je zweier gegenüberliegenden Flächenwinkel einander gleich.

§. 5.

Ist das Tangenten-Tetraeder ein anschliessendes, und ist etwa $\varDelta_0$ das Anschlussdreieck, so sind KA, KB, KC die Axen der Kegel, welche den Aussenecken an $\varDelta_0$ umschrieben sind. Diese Ecken haben die Winkel:

Nebenecke von A: α, $\pi-\beta'$, $\pi-\gamma'$;
„ „ B: $\pi-\alpha'$, β, $\pi-\gamma'$;
„ „ C: $\pi-\alpha'$, $\pi-\beta'$, γ.

Dagegen ist KO, wie vorher, die Axe des der Ecke O umschriebenen Kegels, welche die Winkel α, β, γ hat. — Daraus ergiebt sich:

(8*)

$$D_0LK = D_0MK = D_0NK$$
$$= \pi - \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta'+\gamma') = \pi - \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta+\gamma') = \pi - \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta'+\gamma),$$

$$D_1LK = D_1PK = D_1QK$$
$$= \tfrac{1}{2}(-\alpha+\beta+\gamma) = \tfrac{1}{2}(-\alpha'+\beta+\gamma') = \tfrac{1}{2}(-\alpha'+\beta'+\gamma),$$

$$D_2UK = D_2MK = D_2QK = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma) = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta'+\gamma') = \tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta'+\gamma),$$

$$D_3UK = D_3PK = D_3NK = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma) = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta'-\gamma') = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta-\gamma').$$

Aus jeder dieser Gleichungen geht hervor:

$$\alpha'-\alpha = \beta'-\beta = \gamma'-\gamma, \qquad (9^*)$$

d. h.: **Im anschliessenden Tangenten-Tetraeder sind die drei Differenzen je eines am Anschlussdreieck liegenden Flächenwinkels und seines Gegenwinkels einander gleich.**

Schreiben wir die letzte Gleichung in dieser Form:

$$\pi - \alpha' + \alpha = \pi - \beta' + \beta = \pi - \gamma' + \gamma,$$

so spricht sie den Lehrsatz aus:

Im anschliessenden Tangenten-Tetraeder sind die drei Summen der am Anschlussdreieck liegenden Aussenwinkel und ihrer inneren Gegenwinkel einander gleich.

oder auch:

Im Aussenraume des Anschlussdreiecks sind die drei Summen je zweier gegenüberliegenden Flächenwinkel einander gleich.

§. 6.

Ich bezeichne mit

$$\sigma_0 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma), \quad \sigma_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta' + \gamma'), \quad \sigma_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta + \gamma'),$$
$$\sigma_3 = \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta' + \gamma)$$

die halben Winkelsummen der vier Tetraederecken bei O, A, B, C, und mit

$$\varepsilon_0 = \sigma_0 - \tfrac{1}{2}\pi, \quad \varepsilon_1 = \sigma_1 - \tfrac{1}{2}\pi, \quad \varepsilon_2 = \sigma_2 - \tfrac{1}{2}\pi, \quad \varepsilon_3 = \sigma_3 - \tfrac{1}{2}\pi$$

die halben sphärischen Excesse derselben Ecken.

Jede dieser Ecken hat drei Nebenecken, welche je durch die Verlängerung der Kante von α oder α', β oder β', γ oder γ' (über den Scheitelpunkt hinaus) gebildet werden, und für jede Ecke in dieser Folge die **erste**, **zweite**, **dritte** Nebenecke heisse. Die dazu gehörigen σ und ε sollen in derselben Folge durch einmalige, zweimalige, dreimalige Accentuirung unterschieden werden, so dass die **unteren** Indices 0, 1, 2, 3 angeben, an welchem der Punkte O, A, B, C sich die zugehörige Ecke befindet, und die **oberen** Accente $'$, $''$, $'''$, welche von den drei Nebenecken der Tetraederecke gemeint ist*).

---

*) Ueber die Beziehungen zwischen den σ und den ε einer Ecke und Nebenecken, s. „Tetraedrometrie" I. p. 8.

Es ist demnach:

$$\sigma_1' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \pi - \beta' + \pi - \gamma') = \pi - \tfrac{1}{2}(-\alpha + \beta' + \gamma'),$$

$$\sigma_2'' = \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha' + \beta + \pi - \gamma') = \pi - \tfrac{1}{2}(\alpha' - \beta + \gamma'),$$

$$\sigma_3''' = \tfrac{1}{2}(\pi - \alpha' + \pi - \beta' + \gamma) = \pi - \tfrac{1}{2}(\alpha' + \beta' - \gamma).$$

Diese drei Winkel sind aber nach (8) einander gleich, also auch die Winkel:

$$\varepsilon_1' = \sigma_1' - \tfrac{1}{2}\pi = \varepsilon_2'' = \sigma_2'' - \tfrac{1}{2}\pi = \varepsilon_3''' = \sigma_3''' - \tfrac{1}{2}\pi.$$

Da dies nun auch für die Winkel der drei anderen Aussenräume gilt, so haben wir:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_1' = \varepsilon_2'' = \varepsilon_3''', \\ \varepsilon_0' = \varepsilon_2''' = \varepsilon_3'', \\ \varepsilon_0'' = \varepsilon_1''' = \varepsilon_3', \\ \varepsilon_0''' = \varepsilon_1'' = \varepsilon_2'; \end{array}\right\} \qquad (10)$$

d. h.: Am umschliessenden Tangenten-Tetraeder haben die je drei Aussenecken eines Aussenraumes gleiche sphärische Excesse, also auch gleiche Eckenräume.

§. 7.

Ist das Tangenten-Tetraeder anschliessend mit der Fläche Δ_0, so ist nach (8*):

(10*)

$$\begin{array}{llll} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 & \text{also auch} & & \varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_3, \\ \sigma_0 - \alpha = \sigma_2 - \alpha' = \sigma_3 - \alpha', & ,, & ,, & \varepsilon_0' = \varepsilon_2' = \varepsilon_3', \\ \sigma_0 - \beta = \sigma_1 - \beta' = \sigma_3 - \beta', & ,, & ,, & \varepsilon_0'' = \varepsilon_1'' = \varepsilon_3'', \\ \sigma_0 - \gamma = \sigma_1 - \gamma' = \sigma_2 - \gamma'; & ,, & ,, & \varepsilon_0''' = \varepsilon_1''' = \varepsilon_2'''. \end{array}$$

Die erste dieser Gleichungen sagt aus:

> Im anschliessenden Tangenten-Tetraeder haben die drei an der Anschlussebene liegenden (inneren) Tetraederecken gleiche sphärische Excesse, also auch gleiche Eckenräume.

Die zweite Gleichung (10*) enthält die sphärischen Excesse derjenigen Aussenecken, welche durch die Verlängerung der Kante AO über O, und der Kante BC über B und über C ge-

bildet werden. Statt der ersten dieser drei Ecken können wir auch ihre Scheitelecke nehmen, welche die Verlängerungen von BO und CO über O mit der Kante OA bilden. Fassen wir in ähnlicher Weise auch die dritte und vierte der Gleichungen (10*) auf, so haben wir den Lehrsatz:

> Am anschliessenden Tangenten-Tetraeder sind jede drei Ecken inhaltsgleich, welche durch die beiderseitige Verlängerung einer Seite des Anschlussdreiecks und durch die (einseitigen) Verlängerungen der beiden anderen Seiten des zugehörigen Seitendreiecks über den Gegenpunkt des Anschlussdreiecks hinaus am Tetraeder gebildet werden.

§. 8.

Eine höchst einfache Gleichung besteht zwischen dem Inhalt $\mathfrak{T}$ des Tangenten-Tetraeders, dem Radius k der von den Kanten berührten Kugel und den vier Kantenabschnitten o, a, b, c.

Aus dem ebenen Viereck KD_0LD_1, welches bei D_0 und D_1 rechte Winkel und bei L den Winkel α' hat, und dessen Diagonale $KL = k$ ist haben wir nach bekannten planimetrischen Sätzen die Gleichung:

$$k^2 \sin^2\alpha' = \overline{LD_0}^2 + \overline{LD_1}^2 - 2\overline{LD_0}\,.\,\overline{LD_1}\cos\alpha'.$$

Von dieser Gleichung ausgehend hat Crelle a. a. O. p. 121—125 die erwähnte Gleichung gefunden. Seine Herleitung ist aber sehr weitschweifig und schwerfällig, und zwar dadurch, dass er hartnäckig mit den Kanten des Tetraeders rechnet, statt auch andere Bestimmungsgrössen des Tetraeders zu benutzen. Der folgende Weg ist bedeutend kürzer.

$\overline{LD_0}$ und $\overline{LD_1}$ sind die Radien der dem Δ_0 und dem Δ_1 eingeschriebenen Kreise, also ist bekanntlich (vergl. Formel (1)):

$$\overline{LD_0} = \frac{2\Delta_0}{l+m+n} = \frac{\Delta_0}{a+b+c} = \frac{\Delta_0}{a+l},$$

$$\overline{LD_1} = \frac{2\Delta_1}{l+p+q} = \frac{\Delta_1}{o+b+c} = \frac{\Delta_1}{o+l}.$$

Für die Ersetzung von $\sin\alpha'$ und $\cos\alpha'$ bieten sich Ausdrücke aus folgender Betrachtung dar.

Errichtet man (Taf. III. Fig. 9) auf einem Seitendreieck des Tetraeders, etwa auf Δ_1, ein dreiseitiges Prisma $OBCAB'C'$, dessen eine Kante mit einer der drei Prismenkanten, etwa u, zusammenfällt, so ist das dieser Kante gegenüberüberliegende Seitenparallelogramm gebildet aus jener Kante u und ihrer Gegenkante l, welche unter ihrem Winkel (ul) zusammengesetzt sind, also:

$$BCB'C' = ul \sin(ul);$$

die beiden anderen Seitenflächen sind:

$$AOCB' = 2\Delta_2, \quad AOBC' = 2\Delta_3.$$

Als bekannt dürfen nun die beiden Sätze vom Prisma und vom Tetraeder vorausgesetzt werden *):

$$u^2 l^2 \sin^2(ul) = 4\Delta_2{}^2 + 4\Delta_3{}^2 - 8\Delta_2\Delta_3 \cos\alpha,$$

$$3\mathfrak{T}.u = 2\Delta_2\Delta_3 \sin\alpha;$$

wonach wir dann auch haben:

$$\cos\alpha' = \frac{\Delta_0{}^2 + \Delta_1{}^2 - \frac{1}{4}u^2l^2\sin^2(ul)}{2\Delta_0\Delta_1},$$

$$\sin\alpha' = \frac{3\mathfrak{T}.l}{2\Delta_0\Delta_1}.$$

Diese Werthe, in die obige Gleichung für k gesetzt, ergeben:

$$\frac{k^2 . 9\mathfrak{T}^2 l^2}{4\Delta_0{}^2\Delta_1{}^2} = \frac{\Delta_0{}^2}{(a+l)^2} + \frac{\Delta_1{}^2}{(o+l)^2} - \frac{\Delta_0{}^2 + \Delta_1{}^2 - \frac{1}{4}u^2l^2\sin^2(ul)}{(o+l)(a+l)}.$$

Setzt man hierin nach (7):

$$\Delta_0{}^2 = (a+l)abc, \quad \Delta_1{}^2 = (o+l)obc;$$

so erhält man nach ganz einfachen Reductionen:

$$\frac{k^2 . 9\mathfrak{T}^2 l^2}{4 . oab^2c^2} = \frac{1}{4}u^2l^2\sin^2(ul) - (o-a)^2 bc.$$

Nun ist nach **Carnot's** Entdeckung (vergl. meine „Tetraedrometrie" II. Nr. 304) für jedes Tetraeder:

---

*) Vergl. C. F. A. Jacobi's Bearbeitung von J. H. van Swinden's „Elem. d. Geom." Jena 1834 p. 446. (Nr. 905.) und p. 458. (Nr. 1006.) oder: C. A. Bretschneider „Lehrgebäude d. niedern Geom." Jena 1844 §. 677.

$$\cos(ul) = \frac{p^2 + m^2 - q^2 - n^2}{2ul},$$

und daher für ein umschliessendes Tangenten-Tetraeder (weil nach (2) $p + m = q + n$, also $p^2 + m^2 - q^2 - n^2 = (p + m)^2 - 2pm - (q + n)^2 + 2qn = -2pm + 2qn$ ist):

$$\cos(ul) = \frac{-pm + qn}{ul}, \tag{11}$$

und daraus

$$\sin^2(ul) = (1 + \cos(ul))(1 - \cos(ul))$$

$$= \left(\frac{ul - pm + qn}{ul}\right)\left(\frac{ul + pm - qn}{ul}\right),$$

also nach (5):

$$\tfrac{1}{4}u^2 l^2 \sin^2(ul) = (ob + ac)(oc + ab). \tag{12}$$

Setzt man dies in die letzte Gleichung für k und $\mathfrak{T}$, so ergiebt eine sehr einfache Reduction, bei welcher $l = b + c$ zu setzen ist:

$$\tfrac{3}{2}\mathfrak{T}k = oabc. \tag{13}$$

Für ein anschliessendes Tangenten-Tetraeder, dessen Anschlussdreieck Δ_0 ist, hat man von der Gleichung auszugehen:

$$k^2 \sin^2 \alpha' = \overline{LD_0}^2 + \overline{LD_1}^2 + 2\overline{LD_0} \cdot \overline{LD_1} \cos \alpha',$$

und darin

$$\overline{LD_0} = \frac{\Delta_0}{a + l}, \quad \overline{LD_0} = \frac{2\Delta_1}{-l + p + q} = \frac{\Delta_1}{o - l}$$

zu setzen, so wie in der ferneren Entwickelung statt aller aus §. 2. benutzten Nummern die entsprechenden besternten aus §. 2. zu nehmen. Dies führt dann auf dieselbe Gleichung (13).

XXVIII.

Ein geometrischer Satz.

Von

Herrn Gymnasial-Oberlehrer *W. Fischer*

in Kempen.

Satz. Beschreibt man über den Seiten eines Dreiecks gleichseitige Dreiecke und verbindet die Mittelpunkte derselben, so schliessen die Verbindungslinien ein gleichseitiges Dreieck ein.

Es hat dieser Satz Gültigkeit, sowohl wenn die gleichseitigen Dreiecke nach aussen hin, als auch, wenn dieselben nach innen über den Seiten eines Dreiecks beschrieben sind. Betrachten wir zunächst den ersten Fall.

Bezeichnet ABC ein beliebiges Dreieck, über dessen Seiten gleichseitige Dreiecke beschrieben sind, und benennt man den Mittelpunkt des über der Seite BC beschriebenen gleichseitigen Dreiecks mit α, eben so den Mittelpunkt des über der Seite AC beschriebenen gleichseitigen Dreiecks mit β und den des gleichseitigen Dreiecks über AB mit γ: so ist, wenn man die Linien $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$ und $\beta\gamma$ zieht, Dreieck $\alpha\beta\gamma$ ein gleichseitiges. Fällt man etwa von dem Punkte C aus auf $\alpha\beta$ die Senkrechte CD, welche innerhalb des Dreiecks ABC fallen möge, und verlängert dieselbe um sich selbst bis zum Punkte E, so ist, wenn man noch C mit α und E mit α verbindet:

$$\Delta\, CD\alpha \cong \Delta\, ED\alpha;$$

eben so, wenn man C und E mit β verbindet,

$$\Delta\, CD\beta \cong \Delta\, ED\beta.$$

Es wird also ein um den Punkt α mit dem Radius αC beschriebener Kreis durch die Punkte $C, E, B,$ und ein um den Punkt β mit dem Radius βC beschriebener Kreis durch die Punkte C, E, A gehen, da ja $\alpha C = \alpha E = \alpha B$ und $\beta C = \beta E = \beta A$ ist. Verbindet man daher noch den Punkt E mit B und A, so ist sowohl $\angle CEB$, als $\angle CEA = \frac{2\pi}{3}$, und daher auch $\angle AEB = \frac{2\pi}{3}$, und ein um γ mit γB als Radius beschriebener Kreis wird auch durch den Punkt E gehen, welches der Durchschnittspunkt für die um die gleichseitigen Dreiecke beschriebenen Kreise ist. Da nun $CE \perp \alpha\beta$ ist, so muss auch, wie leicht ersichtlich, $EB \perp \alpha\gamma$ und $AE \perp \beta\gamma$ sein. Es sind also die Schenkel der Winkel CEB, CEA, AEB senkrecht zu den Seiten des Dreiecks $\alpha\beta\gamma$ und daher die Winkel desselben einzeln gleich $\frac{\pi}{3}$, das heisst $\Delta\, \alpha\beta\gamma$ ist gleichseitig.

Wir nahmen vorhin an, dass die von der Ecke C des Dreiecks ABC auf $\alpha\beta$ gezogene Senkrechte innerhalb des Dreiecks ABC falle; fällt dieselbe nun nicht innerhalb, sondern ausserhalb dieses Dreiecks, was der Fall ist, wenn das Dreieck ABC einen stumpfen Winkel enthält, der zugleich $> \frac{2\pi}{3}$ ist, so ist, wenn die Bezeichnungen wie früher bleiben und C diesen Winkel bezeichnet: $\angle AEB = \frac{2\pi}{3}$, $\angle CEB = \frac{\pi}{3}$ und $\angle CEA = \frac{\pi}{3}$, wie sich leicht ergibt. Ferner ist dann $\angle CEB = \angle \beta\alpha\gamma$, da ihre Schenkel senkrecht auf einander stehen, und eben so $\angle CEA = \angle \alpha\beta\gamma$. Hieraus folgt dann, dass $\Delta\, \alpha\beta\gamma$ gleichseitig ist.

Liegt endlich der Scheitel des stumpfen Winkels C in der Seite $\alpha\beta$, was eintrifft, wenn der Winkel $C = \frac{2\pi}{3}$ ist, so ergibt sich der Beweis ohne weitere Construction.

Im zweiten Hauptfalle, wenn die gleichseitigen Dreiecke nach innen über den Seiten des gegebenen Dreiecks beschrieben sind, bleibt der Beweis dem Wesen nach derselbe wie vorhin.

Ganz einfach ergibt sich der trigonometrische Beweis für diesen Satz. Bezeichnen a, b, c die den Ecken A, B, C gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks ABC und verbindet man noch den Punkt A mit β und γ und C mit α und β, so ist:

$$\alpha\beta^2 = \alpha C^2 + \beta C^2 - 2\alpha C \cdot \beta C \cdot \cos \beta C \alpha$$

und

$$\beta\gamma^2 = \beta A^2 + \gamma A^2 - 2\beta A.\gamma A.\cos\beta A\gamma;$$

oder

$$\alpha\beta^2 = \left(\frac{a}{2\cos 30}\right)^2 + \left(\frac{b}{2\cos 30}\right)^2 - 2\frac{ab}{4\cos 30^2}.\cos(C+60)$$

und

$$\beta\gamma^2 = \left(\frac{c}{2\cos 30}\right)^2 + \left(\frac{b}{2\cos 30}\right)^2 - 2\frac{bc}{4\cos 30^2}.\cos(A+60).$$

Soll nun $\alpha\beta = \beta\gamma$ sein, so muss die Gleichung stattfinden:

$$\left(\frac{a}{2\cos 30}\right)^2 + \left(\frac{b}{2\cos 30}\right)^2 - 2\frac{ab}{4\cos 30^2}.\cos(C+60)$$

$$= \left(\frac{c}{2\cos 30}\right)^2 + \left(\frac{b}{2\cos 30}\right)^2 - 2\frac{bc}{4\cos 30^2}.\cos(A+60);$$

oder

$$a^2 - 2ab.\cos(C+60) = c^2 - 2bc.\cos(A+60);$$

oder

$$a^2 - 2ab.\cos C.\cos 60 + 2ab\sin C.\sin 60$$

$$= c^2 - 2bc.\cos A.\cos 60 + 2bc\sin A.\sin 60;$$

oder, da $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$ ist:

$$a^2 - 2ab\cos C\cos 60 + 2ab\sin C.\sin 60$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cos C - 2bc\cos A.\cos 60 + 2bc\sin A.\sin 60.$$

Wenn man reduzirt und für $\cos 60 = \frac{1}{2}$ setzt, ergibt sich:

$$2a\sin C.\sin 60 = b - a.\cos C - c.\cos A + 2c.\sin A.\sin 60,$$

oder, da $a = \dfrac{c.\sin A}{\sin C}$:

$$2c\sin A.\sin 60 = b - \frac{c.\sin A\cos C}{\sin C} - c.\cos A + 2c.\sin A.\sin 60,$$

oder

$$b = c.\frac{\sin A.\cos C + \cos A.\sin C}{\sin C} = c.\frac{\sin(A+C)}{\sin C};$$

also $b:c = \sin B:\sin C$, woraus die Richtigkeit der Behauptung hervorgeht.

XXIX.

Chemie und Geschichte der Himmelskörper

nach der Spectral-Analyse *).

Vortrag

gehalten in der feierlichen Sitzung der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien am 30. Mai 1862

von

Dr. *A.* Freih. *v. Baumgartner.*

Wir sind beim Studium der Natur meistens auf irdische Vorkommnisse beschränkt, und nur in wenigen Beziehungen war es bisher möglich, Ausserirdisches in den Kreis unserer Forschung einzubeziehen. Wir gelangen daher auch nur höchst selten zur Kenntniss von wahrhaft allgemeinen Naturgesetzen, denn was sich an irdischen Dingen als allgemein darstellt, hat oft im Weltganzen nur particuläre Giltigkeit. Das einzige, alles Materielle beherrschende Naturgesetz, das wir kennen, ist das Gesetz der Gravitation, und dieses ist aus den Bewegungen der Himmelskörper, im Vergleiche mit denen schwerer Körper auf der Erde abstrahirt worden. Es muss daher jeder Fortschritt, welcher unser Forschen in den weiten Raum des Weltalls hinausträgt und uns befähigt, Irdisches mit Ausserirdischem zu vergleichen, höchst willkommen sein. Einen solchen Fortschritt verdanken wir dem Eifer und Talente der gelehrten Heidelberger Professoren Bunsen und Kirchhoff. Diesen gelang es, aus dem Lichte, welches uns ein Körper, sei er auch Millionen Meilen entfernt, zusendet, die chemischen Bestandstoffe desselben herauszulesen.

---

*) Aus dem Almanach der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Zwölfter Jahrgang. 1862. mitgetheilt von dem Herausgeber.

Man hat diese Methode der chemischen Analyse passend mit dem Namen Spectral-Analyse bezeichnet. Sie kann unbedenklich unter die wichtigsten Erfindungen, wie sie kaum in einem Jahrhundert einmal vorkommen, gezählt werden. Darum glaube ich auch keinen Missgriff zu thun, wenn ich die Darstellung des Geistes und der Leistungen dieser Erfindung zum Gegenstande meiner heutigen Ansprache an eine hochansehnliche Versammlung wähle.

Ich beginne mit der Darstellung und theoretischen Erläuterung der neuen analytischen Methode: Lässt man in ein verfinstertes Zimmer durch eine kleine Oeffnung am Fensterladen directes Sonnenlicht eindringen und fängt es auf einer der Oeffnung gegenüber stehenden Wand auf; so sieht man auf letzterer einen lichten Fleck, welcher das vergrösserte Bild der Oeffnung darstellt. Wird das Licht durch ein dreiseitiges, z. B. senkrecht stehendes Prisma geleitet, so erscheint das Bild nicht mehr an der früheren Stelle, sondern ist in horizontaler Richtung abgelenkt und hat in der Richtung der Ablenkung eine etwa fünfmal grössere Ausdehnung als früher, während es in verticaler Richtung unverändert geblieben ist. Zugleich erscheint dieses Bild nicht mehr weiss, sondern trägt die Farben des Regenbogens und zwar in horizontalem Sinne aufeinanderfolgend. Das am wenigsten abgelenkte Ende des Bildes ist roth, das am meisten abgelenkte violett; in den Raum zwischen diesen theilen sich orange, gelb, grün und blau. Dieses ist nun das Farbenbild oder Spectrum des Sonnenlichtes. Es liefert den Beweis, dass das weisse Licht der Sonne aus Strahlen von verschiedener Brechbarkeit bestehe, dass das am wenigsten brechbare roth, das am meisten brechbare violett erscheine und dass überhaupt, was in subjectiver Beziehung Farbenverschiedenheit ist, in objectiver auf einer Verschiedenheit von Brechbarkeit beruhe. Aber die farbigen Strahlen, in welche das Sonnenlicht im Spectrum zerlegt erscheint, sind nicht immer schon einfache Strahlen. So lange die ganze Fläche des Sonnenspectrums continuirlich beleuchtet erscheint und darin eine plötzliche Aenderung in der Lichtstärke gar nicht bemerkt wird, sind selbst die farbigen Strahlen noch zusammengesetzt. Im Spectrum mit vollkommen homogenem (einfachem) Licht erscheinen, wie Fraunhofer zuerst nachgewiesen hat, unzählige auf der Längenrichtung des Bildes senkrechte Linien, die dunkler sind als der übrige Theil des Bildes, einige derselben sogar ganz schwarz. Die meisten nehmen sich wie feine dunkle Fäden aus, andere haben eine bedeutende Dicke. Sie sind immer vorhanden, aus welcher Substanz das Prisma besteht oder welchen brechenden Winkel es haben mag, erscheinen immer genau

an derselben Stelle des Spectrums, doch nicht an der Grenze zweier Farben, oft sogar mitten in derselben Farbe. Fraunhofer hat deren innerhalb der Grenzen des Lichtspectrums 574 gezählt. Jetzt weiss man, dass deren nahe an 2000 vorhanden sind.

So wie das Sonnenlicht, eben so kann man auch das Licht jedes anderen leuchtenden Körpers mittelst eines Prismas analysiren, vorausgesetzt, dass es stark genug ist, um noch in seinen einfachen Bestandtheilen wahrnehmbar zu sein. Unter den Himmelskörpern scheinen diejenigen, deren Licht von der Sonne stammt, auch mit dem Sonnenspectrum übereinstimmende Spectren zu geben, selbstleuchtende Körper aber, wie Fixsterne, hierin eine namhafte Selbstständigkeit zu behaupten. Am interessantesten sind für unsern Zweck vorerst die Spectra der glühenden festen oder tropfbaren Körper und jene der Flamme einer Oel- oder Gaslampe oder einer Kerze und der Metallgase. Glühende feste und tropfbare Körper geben immer ein continuirliches Spectrum, also ein solches, wo weder Beleuchtungsmaxima, noch -minima, weder lichte, noch dunkle Linien vorkommen. Dieses geschieht sogar, wenn ein solcher Körper wie immer fein zertheilt ist, so lange die Partikelchen nur noch als feste oder tropfbare Körper angesehen werden können. So z. B. gibt der hell leuchtende Theil der Flamme einer Oel- oder Leuchtgaslampe ein continuirliches Spectrum, weil sich daselbst glühende, aus dem Brennstoffe ausgeschiedene Kohlentheile befinden und wie compacte Kohle wirken. Glühende Gase hingegen und somit auch jener Theil einer Kerzen- oder Lampenflamme, welchem solche glühende, feste Theilchen nicht beigemengt sind, liefern, wenn ihr Licht überhaupt die dazu nöthige Stärke hat, ein Spectrum mit hellen Linien, welchen natürlich die, dem Ort, wohin sie im Spectrum fallen, entsprechende Farbe zukommt und die manchmal durch dunkle Stellen von einander getrennt sind. Besonders interessant sind wegen der daselbst vorkommenden lichten Linien die Spectra glühender Metallgase.

Es gelingt nur bei zur Verflüchtigung geneigten Metallen, solche Gase durch gewöhnliche Erhitzungsmittel zu erhalten; bei strengeren Metallen gelangt man nur zum Zwecke, wenn man sie in einer chemischen Verbindung anwendet, die leicht verflüchtigt werden kann, wie dieses mit vielen Chlorverbindungen der Fall ist; aber auch die strengsten Metalle lassen sich als glühendes Gas darstellen, wenn man sie als Dräthe braucht, zwischen denen ein starker elektrischer Funke überschlägt. Dieser Funke ist nämlich selbst das glühende Metallgas, gebildet durch die von den Drathenden losgerissenen glühenden Metalltheile und vermischt

mit glühender Luft. Vielfache Versuche mit derlei Gasen haben gelehrt, dass jedes Metallgas eigene, diesen Stoff charakterisirende lichte Linien an bestimmten Stellen des Spectrums gebe, aus deren Vorkommen man mit voller Bestimmtheit auf die Gegenwart dieses Stoffes in dem Körper, von welchem das Licht stammt, schliessen kann. Diese Linien sind dieselben, das Metallgas mag unmittelbar von unverbundenem Metall oder von einer Metallverbindung gewonnen sein; an einem Gemenge mehrerer Metalle gibt das Spectrum die jedem Gemengtheil entsprechenden lichten Linien. So z. B. zeigt das Natriumspectrum eine sehr scharf begrenzte helle Linie im Gelb, es mag dieser Stoff an Sauerstoff, Chlor, Jod oder Brom, an Borsäure, Phosphorsäure u. s. w. gebunden sein. Eine bedeutende Anzahl ähnlicher Linien erscheint im Calciumspectrum, darunter eine sehr helle im Grün, im Lithiumspectrum eine im Roth u. s. f. Aus solchen Linien ist die Anwesenheit des ihn charakterisirten Stoffes ohne irgend eine chemische Operation durch den blossen Anblick des Spectrums schon zu erkennen, und es erweiset sich dieses analytische Mittel viel empfindlicher als irgend ein anderes bisher bekanntes. Es verräth z. B. die Anwesenheit eines Natrumsalzes auch noch dann, wenn davon weniger als $\frac{1}{3,000.000}$ eines Milligramms vorkommt und erst 41 Millionen solcher Theile das Gewicht eines Thautropfens haben. In dem kleinen Raum, den das Lichtspectrum eines Metalles einnimmt, ist sonach nicht blos die Analyse dieses Lichtes, sondern auch die des Metalles verzeichnet, von dem das Licht kommt.

Es liegt die Versuchung nahe, diese Art der Analyse auch auf ausserirdische leuchtende Körper, namentlich auf die Sonne anzuwenden. Hier stösst man aber gleich am Eingange auf eine bedeutende Schwierigkeit. Während nämlich in dem Spectrum der irdischen Körper lichte, farbige Linien erscheinen, zeigt uns das Sonnenspectrum gerade das Gegentheil, nämlich nur dunkle oder gar schwarze Linien, und zwar in einer Anzahl, wie wir sie an Spectren irdischer Stoffe nicht gewahr werden. Dem unermüdlichen Eifer und dem Genie der Erfinder der Spectral-Analyse glückte es jedoch, auch diese Schwierigkeit zu beheben. Sie wiesen nämlich durch Versuche nach, das Spectrum einer Gasflamme, das seiner Natur nach lichte Linien führt, werde umgekehrt, wenn man durch das Gaslicht Strahlen eines Körpers von angemessener Leuchtkraft, der für sich ein continuirliches Spectrum gibt, gehen lässt. Es ist schon erwähnt worden, dass das Spectrum einer Lithiumflamme eine helle rothe Linie führt. Diese liegt an einer Stelle, wohin im Sonnenspectrum eine dunkle

Linie nicht fällt. Schwaches Sonnenlicht, durch diese Flamme geleitet, vermindert die Helligkeit dieser Linie, volles, starkes Sonnenlicht hingegen verwandelt sie augenblicklich in eine schwarze und kehrt sonach das Lithiumspectrum förmlich um. Diese Umkehrung ist aber nicht etwa ein geheimnissvoller Act der Natur, sondern die nothwendige Folge eines von Kirchhoff entdeckten Naturgesetzes. Ein Gas, das Lichtstrahlen von bestimmter Brechbarkeit aussendet, besitzt nämlich auch das Vermögen, Strahlen derselben Brechbarkeit, wenn sie durch dasselbe geleitet werden, auszulöschen, und es ist das Verhältniss der ausgesendeten zu den absorbirten bei derselben Temperatur für alle Körper gleich. Da nun eine Lithiumflamme rothe Strahlen aussendet, so muss sie auch vom Sonnenlichte, welches durch diese Flamme geleitet wird, einen aliquoten Theil der rothen Strahlen absorbiren, die übrigen aber durchlassen. Das zum Vorschein kommende Spectrum beider Lichtquellen wird gebildet vom Lichte der Lithiumflamme und von dem Theile des Sonnenlichtes, welchen die Lithiumflamme durchlässt. Es werden sonach alle Stellen des Lithiumspectrums durch das Sonnenlicht verstärkt, jedoch die Stelle, wohin die rothe Lithiumlinie fällt, weniger als die übrigen; die Helligkeit dieser Stelle muss sonach gegen die der Umgebung zurückstehen und, wenn das Sonnenlicht stark genug ist, die sonst helle rothe Linie durch Contrast mit der Nachbarschaft schwarz aussehen.

Kann man nun annehmen, dass das auf der Erde anlangende Sonnenlicht Gaslicht ist, dem die Strahlen eines festen oder tropfbaren Körpers beigemengt sind, der für sich ein continuirliches Spectrum gibt; so ist das Sonnenspectrum, wie wir es zu Gesicht bekommen, eigentlich das negative Bild jenes Spectrums, welches das glühende Gas für sich geben würde, und es müssten an jeder Stelle, wo jetzt dunkle Linien erscheinen, helle farbige ihren Platz haben und ein untrügliches Zeichen der Anwesenheit jener Stoffe im leuchtenden Gas sein, deren Spectrum solche Linien eigen sind. Man braucht sonach nur anzunehmen, dass die Sonne ein in starker Glühhitze befindlicher fester oder tropfbarer, mit einer ebenfalls, aber minder stark glühenden Gasatmosphäre umgebener Körper sei, und alle Erscheinungen sind in vollen Einklang gebracht. Diese Ansicht über die Natur des Sonnenkörpers ist auch die einfachste und den Erscheinungen auf der Erde am meisten analoge. Sie hat schon im Alterthum den meisten Anhang gehabt und wurde nur aufgegeben und mit einer viel künstlicheren vertauscht, theils um die Sonnenflecken und die Nichtpolarisation des directen Sonnenlichtes erklären zu können, theils um der Sonne Bewohnbarkeit zu vindiciren, da man nun einmal glaubte, ein Himmelskörper könne keinen grossen Zweck haben, wenn

nicht auf ihm Menschen oder menschenähnliche Geschöpfe ihr Wesen trieben. In der Voraussetzung, dass der Sonnenkörper eine glühende feste oder tropfbare, mit einer ausdehnsamen glühenden Hülle umgebene Masse sei, deutet jede im Sonnenspectrum vorkommende dunkle Linie einen Stoff in der Sonnenatmosphäre an, der an derselben Stelle eine farbige Linie geben würde, wenn nicht das Licht des Centralkörpers der Sonne eine Umkehrung des Spectrums zur Folge hätte. Die Körper nun, welche in eine sehr heisse Flamme gebracht, um daselbst in Gas verwandelt zu werden, genau an derselben Stelle ihre charakteristischen hellen Linien hervortreten lassen, wohin dunkle Linien im Sonnenspectrum fallen, müssen in der Sonnenatmosphäre vorkommen. Auf diesem Wege hat man in der Sonnenatmosphäre Eisen, Calcium, Magnesium, Natrium, Chrom, in geringer Menge auch Baryum, Kupfer, Zink gefunden, konnte aber Gold, Silber, Aluminium, Cadmium, Zinn, Blei, Antimon, Arsenik, Strontium und Lithium nicht entdecken; selbst Silicium ist wahrscheinlich nicht ein Bestandtheil dieser Atmosphäre. Es ist einleuchtend, dass die Stoffe, welche in der Sonnenatmosphäre vorkommen, auch sich im innern Sonnenkörper finden müssen. Die erst genannten acht Körper bilden aber bei weitem noch nicht den ganzen Inbegriff des Stoffinventars der Sonnenatmosphäre. Ein leuchtendes Metallgas, welches aus diesen acht Stoffen zusammengesetzt ist, gibt zwar ein Spectrum mit einer ansehnlichen Zahl von lichten Linien, weil mancher Stoff deren mehrere liefert, wie z. B. Eisen mehr als sechszig; allein es fehlt noch viel, dass dabei jeder dunklen Linie im Sonnenspectrum eine derartige lichte Linie entspräche. Darum ist die Sonnenatmosphäre viel mehr zusammengesetzt, als jene acht Metalle anzeigen. Dass aber unter den Bestandtheilen derselben auch bisher unbekannte Elemente vorkommen, wird man erst wissen, wenn die lichten Spectrallinien aller bekannten Elemente an ihrem Platze den dunklen Linien des Sonnenspectrums gegenübergestellt sind und es sich ergibt, dass noch dunkle Linien übrig bleiben, denen keine helle entspricht. Aber auch dann haben wir nur die Ueberzeugung erlangt, dass es in der Sonne für uns neue Stoffe gebe, keineswegs aber welcher Art und Natur sie sind. Es bleibt daher nicht blos wünschenswerth, dass die Spectral-Analyse noch weitere Ausdehnung erfahre, sondern auch, dass andere Mittel, die chemische Natur der Himmelskörper kennen zu lernen, nicht hintangesetzt werden. Wir kennen davon bisher nur eines, nämlich die auf dem gewöhnlichen Wege vorgenommene Analyse der Meteoriten. Man hat nämlich Grund zu der Annahme, dass sie Bruchstücke von Körpern sind, die im Weltraum um einen Centralkörper kreisen,

wie der Mond um unsere Erde, die wenn sie der letzteren nahe genug kommen und der überwiegenden Macht ihrer Anziehung ausgesetzt werden, auf sie herabfallen. Hier erreichen wir also ausserirdische Stoffe nicht blos mit unseren Schlüssen, sondern mit den Händen, können sie nach allen Richtungen untersuchen und mit ursprünglich irdischen Stoffen vergleichen. Das Ergebniss solcher Untersuchungen besteht in Folgendem: Alle Theile eines Meteorites unterliegen dem Gesetze der Schwere, ja es ist die Grösse der sie beherrschenden Schwere nach Bessel genau dieselbe wie bei Stoffen entschieden irdischer Abkunft. Ein Pendel von Meteoritenmasse vollbringt eine Schwingung genau in derselben Zeit, wie ein aus irdischem Stoff bestehendes von gleicher Länge. Die Molecüle der Meteoriten sind, wie die der Körper, welche die Erde als ihre Mutter erkennen, bald zu zerreiblichen, bald zu harten, bald zu schwammigen und porösen, bald zu dichten Massen verbunden. Ihr specifisches Gewicht fällt zwischen 1·70 und 7·90, wechselt also von der Dichte des Bimssteines bis zu jener des Eisenbleches. Das Durchschnittliche des specifischen Gewichtes von einer grossen Anzahl Meteoriten ist nach Reichenbach 5, während 5·4 das specifische Gewicht des ganzen Erdballes ist.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Umstand, dass alle bisher angestellten chemischen Analysen von Meteoriten, und es sind deren einige hundert ausgeführt worden, keinen Grundstoff kennen lehrten, der nicht auch auf der Erde reichlich vorkommt. Die in Meteoriten, deren Fall wirklich beobachtet worden ist und dem letzten Jahrhundert angehört, gefundenen Stoffe, nach der Häufigkeit ihres Vorkommens geordnet, sind: Kieselerde, Eisen, Talkerde, Schwefel, Nickel, Kalkerde, Chrom, Mangan, Thonerde, Kali, Kohlenstoff, Kobalt, Kupfer, Blei, Zinn, Chlor, Phosphor. Der Sauerstoff ist in die leichten Metalle eingerechnet, da diese als Oxyde aufgeführt erscheinen. Vergleicht man diese Vorkommnisse mit den in der Sonne mittelst der Spectral-Analyse nachgewiesenen Körpern, so findet man: 1. Alle Stoffe, welche in der Sonne reichlich vorkommen, sind auch in der Meteoritenmasse und auf der Erde, und zwar in grosser Menge vorhanden: Eisen spielt in allen eine hervorragende Rolle. 2. Von den in der Sonne nur in geringen Quantitäten vorgefundenen drei Stoffen kommt nur einer, nämlich das Kupfer, auch in Meteoriten vor. 3. Von den eilf in der Sonne als fehlend nachgewiesenen irdischen Stoffen weiset die chemische Analyse in den Meteoriten nur drei, nämlich Aluminium, Zinn und Blei, nach. Gold und Silber, das Ziel so vieler Bestrebungen auf Erden und die Quelle so vielen Unheils auf Erden, fehlen in der Sonne und in den Meteoriten.

Sonne, Erde und die im Weltraume kreisenden Körper, von denen die Meteoriten stammen, sind daher einander nicht fremd, haben vielmehr eine unverkennbare Familienähnlichkeit. Manche Kinder derselben Mutter sind einander weniger ähnlich. Es kann daher gewiss nicht ohne Grund angenommen werden, dass die ungeheuren Massen, welche im Weltraume gemessenen Schrittes in vorgezeichneten Bahnen seit Jahrtausenden ihren Festzug halten, aus weit zerstreuten materiellen Theilchen derselben Natur gebildet sind. Nebelflecken, Kometenschweife u. dgl. können gleichsam als zurückgebliebene Muster eines früheren Zustandes des gesammten Weltstoffes angesehen werden; ja es hat den Anschein, als fänden derlei Bildungen noch gegenwärtig statt, indem bereits Nebelflecken, deren Dasein im Himmelsraume als zweifellos galt, heute nicht mehr aufgefunden werden. Zerstreute Partikelchen müssen nämlich der ihnen von ihrem Schöpfer eingepflanzten Schwere folgen, wenn sie nicht durch die abstossende Kraft der Wärme von einander fern gehalten werden, wie bei unsern Gasen, oder nicht erst ein Widerstand besiegt werden muss, wie bei den in der Luft schwebenden Staubtheilchen. Sie werden sich ihrem gemeinschaftlichen Schwerpunkte nähern, erst langsam, dann immer rascher und rascher, und endlich sich zu einer Masse zusammenballen, wie sie uns die Körper im Weltraum darstellen. Nach der Ballung ist aber die gesammte Kraft an die geballte Masse übergegangen und muss hier als Erschütterung der Molecüle auftreten, die wir im Sinne der neueren Theorie als Wärme auffassen. Diese Erschütterung wird vom Aether aufgenommen, und ihre Fortpflanzungsrichtung ist es, was wir Strahl nennen. Solche Strahlen sind aber nicht immer Lichtstrahlen, sondern nach Maassgabe der Wellenlänge, oder, was dasselbe ist, der Brechbarkeit, und nur nach Verschiedenheit dieser, auch Wärme- oder chemische Strahlen. Die Strahlen von geringster Brechbarkeit bis zur Brechbarkeit der rothen Lichtstrahlen werden nur als Wärmestrahlen empfunden und können nur die Empfindungsnerven afficiren; solche von der Brechbarkeit der rothen Lichtstrahlen bis zu jener der violetten sind Wärmestrahlen, insofern sie auf den Sehnerv wirken; Strahlen von der Brechbarkeit der grünen Lichtstrahlen an über jene der violetten hinaus bis zu einem bestimmten Maximum wirken chemisch, und diese sind es, welche die photographischen Wirkungen hervorbringen. Dunkle Wärmestrahlen sendet jeder Körper bei jeder Temperatur aus. So wie man aber seine Temperatur erhöht, kommen zu den früheren andere von grösserer Brechbarkeit. Bei einer bestimmten Temperatur, die übrigens für alle Körper dieselbe ist, erlangen diese Strahlen die Brechbarkeit der rothen Lichtstrahlen, und der Körper fängt

an zu glühen und zwar roth. Bei weiterer Temperatursteigerung kommen zu den rothen Strahlen orangefarbige, dann gelbe, grüne, blaue, endlich violette. In letzterem Zustande verlassen den Körper Strahlen von jedem Grade der Brechbarkeit bis zu den violetten, und er leuchtet mit Weissgluth. Diese erreicht er aber von Roth an durch viele Farbennüancen. Beim Abkühlen kehren diese Erscheinungen in umgekehrter Ordnung zurück, bis der Körper zu leuchten aufhört.

Wendet man diese Gesetze auf die im Weltraume zerstreute Elementarmaterie an, die sich zu geballten Massen vereinet, so ersieht man, dass, nachdem der Ballungsact vollzogen ist, in dem Product eine hohe Temperatur herrschen müsse, und zwar eine desto höhere, je grösser die vereinte Masse ist. Man hat unter sehr zulässigen Voraussetzungen diese Wärmeentwickelung für die Planeten der Sonne und die Sonne selbst berechnet und gefunden, dass die erzeugte Temperatur höher ist, als nöthig, um alle bekannten Stoffe in Gas zu verwandeln, und dass einer solchen totalen Umwandlung nur der Gasdruck selbst ein Ziel setzen kann. Die Anwesenheit vieler selbst metallischer Stoffe in der Atmosphäre eines solchen Körpers unter solchen Umständen kann nicht befremden. So hohe Temperatur kann sich, selbst wenn sie dem ordentlichen Abkühlungsprocesse Preis gegeben ist, unter den obwaltenden Umständen Jahrtausende lang über der Grenze der Glühhitze erhalten. Die Abkühlung kann nur durch Ausstrahlung von Wärme vor sich gehen, da ein Weltkörper isolirt im Raume schwebt und Wärmemittheilung durch Leitung nicht vorkommt. Indessen muss auch unter solchen Umständen die Zeit ihr Recht geltend machen, und es werden zuerst die Körper von geringster Masse, dann die grösseren und immer grösseren über die Grenze der Glühhitze abkühlen und zu dunklen Körpern werden. In dem Planetensystem der Sonne ist dieser Process bereits bis auf den Centralkörper in allen Theilen vollbracht, und die Planeten und deren Satelliten tragen nur mehr an ihrer Kugelgestalt und ihrer Abplattung die Spuren eines ehemaligen glühend-flüssigen Zustandes an sich, sind aber dabei geeignet, lebende Wesen zu unterhalten. Unsere Erde lässt aus der Zunahme der Temperatur gegen ihren Mittelpunkt hin schliessen, dass noch jetzt ihr Kern glühend heiss und flüssig ist. An den Monden und den kleineren Planeten mag auch dieser Zustand zu den überwundenen gehören und die ganze Masse bereits erstarrt sein. Da beim Erstarrungsprocesse Wasser und Luft aufgenommen wird, so kann man darin den Grund finden, warum unser Mond ein wasserloser, starrer, von nur kaum merklicher

Atmosphäre umgebener Körper ist. Es darf nicht befremden, dass gerade der Centralkörper unseres Planetensystems noch in der Lage ist, Licht und Wärme seinen Angehörigen zuzusenden. Die Sonne ist durch das Uebergewicht ihrer Masse der Mittelpunkt der Bewegung, aber durch eben dieses Uebergewicht auch der Körper, dessen primitive Temperatur am höchsten stehen musste, und bei dem die Abkühlung relativ am langsamsten vor sich geht, und der noch leuchtet, wenn alles um ihn her der Nacht verfallen ist. Allein wenn der Wärmeverlust nicht durch einen besonderen Process Ersatz findet, wird auch dieser Körper dem Lose nicht entgehen, dem alles Erschaffene zu unterliegen scheint, und gleich der Erde und den Planeten zu einer dunklen, finsteren Masse werden. Was von der Sonne gesagt ist, gilt auch von dem Heer der Fixsterne. Die selbst den Sonnenkörper überwiegende Masse einzelner solcher Körper sichert denselben wohl eine längere Dauer des Glühzustandes, doch mag vielleicht die Färbung im Lichte einzelner solcher Körper und der bereits an mehreren beobachtete stätige Farbenwechsel dahin deuten, dass sie bereits nicht mehr Strahlen von jedem Grade der Brechbarkeit aussenden, unter die Weissglühhitze gesunken sind und dem dunklen Zustande entgegeneilen. Vielleicht rührt das Verschwinden von Fixsternen, wie dieses beobachtet worden ist, davon her, dass sie bereits zu dunklen Körpern geworden sind, wie unsere Erde und die übrigen Planeten der Sonne. Wir Erdenbewohner können somit an der Sonne das Bild unserer Erde sehen, wie sie einst war, und am Monde jenes, wie sie einst sein wird.

Es möge mir zum Schlusse erlaubt sein, für einen Augenblick zu dem Agens zurückzukehren, von dem wir ausgegangen sind, zum Licht. Einst war das Licht nur als Diener des Auges angesehen, so wie die Sterne am Himmel nur als die den Festzug der Nacht begleitenden Fackelträger. Bald war dem Licht das Nebenamt übertragen, die Wärme auf dem Wege zur Erde zu begleiten; man erkennt aber jetzt, dass Begleiter und Begleiteter in Eins zusammenfallen. Es ist dem menschlichen Beobachtungsgeiste längst nicht entgangen, dass dort, wo jenes Agens einwirkt, geheimnissvolle chemische Wirkungen vor sich gehen, nun weiss man aber, dass es die eigentliche Quelle aller chemischen Kraft ist, dass Lichtstrahlen zeichnen, malen und portraitiren, dass sie Schriften und Denkmäler aller Länder und Zeiten mit der vollkommensten Treue copiren. Der Gelehrte kann mittelst solcher Copien über das Alterthum und die fernsten Länder Aufklärung geben, ohne sein Studirzimmer zu verlassen, ähnlich dem Astronomen, dem es an der Hand des Gravitationsgesetzes mög-

lich ist, Sterne zu entdecken, ohne den Himmel anzusehen. Nun aber leistet das Licht noch mehr als irgend eine zeichnende Kunst zu leisten vermag. Es kündigt uns mit der Form zugleich den materiellen Zustand des gezeichneten Objectes an, es ist der wahre Götterbote, der jeden Auftrag mit pünktlicher Genauigkeit und grösster Eile vollzieht.

Dem Licht in der materiellen Natur gleicht in seiner Macht und seiner Wirkung nichts so sehr als das Licht des Geistes. Dieses hohe Gut gehört aber seiner Natur nach einem anderen Reiche an, es wird nicht in überschwenglicher Fülle durch einen Verdichtungsprocess hervorgerufen, von dem die Zeiten durch Jahrtausende zehren können, wie das Licht der Sonne und der Fixsterne, sondern muss successive geweckt, und wenn es besteht, fortwährend gepflegt werden, wie die heilige Flamme im Tempel der Vesta. Zu solcher Pflege sind wir durch unseren erlauchten Stifter berufen, zu solcher gewährt uns die Vorsorge unsers allergnädigsten Herrn und Kaisers die Mittel. Für diese väterliche Vorsorge spreche ich nun im Namen der gesammten Akademie hiermit den wärmsten und tief empfundenen Dank aus, und wende mich an Eure Excellenz unsern hohen Curator-Stellvertreter mit der Bitte, diesen unsern Dank an die Stufen des allerhöchsten Thrones gelangen lassen zu wollen.

XXX.

Ueber bestimmte Integrale.

(Fortsetzung von Thl. XL. Nr. XXII.)

Von

Herrn Dr. *L. Oettinger*,

Grossherzoglich Badischem Hofrathe und ordentlichem Professor der Mathematik an der Universität zu Freiburg i. B.

V.

§. 56.

Die im vorigen Abschnitte behandelten irrationalen Integrale führen positive Exponenten. Diess wird der Fall sein, wenn $q > r$ in den Gleichungen §. 46. Nr. 4) und 5) angenommen wird. Bei jedem Werthe von r unterliegt q keiner Schranke. Wird aber $r > q$ angenommen, so entsteht eine neue Gruppe von Integralen, worin der irrationale Ausdruck mit negativem Exponenten erscheint. Die Zahl dieser Integrale ist bei bestimmtem r beschränkt. Mit der eben genannten Gruppe hat sich hauptsächlich Euler a. a. O. beschäftigt und einige wenige Fälle behandelt. Eben so Legendre. Die im vorigen Abschnitte behandelten Integrale finden sich dort nicht vor. Wir wenden uns nun zu denen mit negativem Exponenten.

Setzt man $q = 1$, $r = 2$ in Nr. 4) §. 46., so erhält man:

1)

$$\int_0^1 x^{2m+p-1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \lg x \partial x = -\frac{(2+p)^{m|2} \cdot 1^{\frac{p}{2}|1} \cdot 1^{-\frac{1}{2}|1}}{(2m+p) \cdot (1+p)^{m|2} \cdot 1^{\frac{p-1}{2}|1}} \times \int_0^1 x^{2m+p-1} \frac{(x-1)}{x^2-1} \partial x.$$

Hier ist:

2)

$$\int_0^1 x^{2m+p-1}\frac{(x-1)}{x^2-1}\partial x = \int_0^1 \frac{x^{2m+p-1}}{1+x}\partial x.$$

Wird $p=1, 2$ gesetzt und werden die Werthe der hiedurch entstehenden Integrale $\int_0^1 \frac{x^{2m}\partial x}{1+x}$, $\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\partial x}{1+x}$ aus Nr. 9) und Nr. 10) §. 2. eingeführt, so erhält man nach den gehörigen Reductionen folgende zwei Integralformen:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1^{m|2}.\pi}{2.2^{m|2}}[\lg 2-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots.-\frac{1}{2m})]$$
$$= -\frac{1.3.5\ldots.(2m-1)\pi}{2.2.4.6\ldots.2m}[\lg 2-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots.-\frac{1}{2m})],$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2^{m|2}}{1^{m+1|2}}[-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots.+\frac{1}{2m+1}]$$
$$= -\frac{2.4.6\ldots.2m}{1.3.5\ldots.(2m+1)}(-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots.+\frac{1}{2m+1}).$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

5)

$$\int_0^1 \frac{\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\lg 2,$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = +\lg 2-1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{4}(\lg 2-\tfrac{1}{2}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2}{3}(-\lg 2+\frac{5}{6}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{3\pi}{16}(\lg 2-\frac{7}{12}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{8}{15}(-\lg 2+\frac{47}{60}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{5\pi}{32}(\lg 2 - \frac{37}{60}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{16}{35}(-\lg 2 + \frac{319}{420}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{35\pi}{256}(\lg 2 - \frac{533}{840}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^9 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{128}{315}(-\lg 2 + \frac{1879}{2520}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10} \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{63\pi}{512}(\lg 2 - \frac{1627}{2520}),$$

u. s. w.

Die ersten sechs Integrale hat Euler a. a. O. mitgetheilt. Das erste hievon hat auch Legendre entwickelt (Traite d. fonct. ellipt. II. p. 393.).

§. 57.

Setzt man $r=3$, $q=2$ in Nr. 4) §. 46., so entsteht:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+p-1} \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{(3+p)^{m|3} . 1^{\frac{p}{3}|1} . 1^{-\frac{1}{3}|1}}{(3m+p)(2+p)^{m|3} . 1^{\frac{p-1}{3}|1}} \times \int_0^1 x^{3m+p-1} \frac{x^2-1}{x^3-1} \partial x.$$

Hier ist:

2)

$$\int_0^1 x^{3m+p-1} \frac{x^2-1}{x^3-1} \partial x = \int_0^1 \frac{x^{3m+p-1}}{1+x+x^2} \partial x + \int_0^1 \frac{x^{3m+p}}{1+x+x^2} \partial x.$$

Wird nun $p=1, 2, 3$ gesetzt und werden die Werthe der hiedurch entstehenden Integrale $\int_0^1 \frac{x^{3m} \partial x}{1+x+x^2}$, $\int_0^1 \frac{x^{3m+1} \partial x}{1+x+x^2}$, $\int_0^1 \frac{x^{3m+2} \partial x}{1+x+x^2}$ aus Nr. 4) §. 16. in Nr. 1) und 2) eingeführt, so erhält man nach den erforderlichen Reductionen folgende drei Integralformen:

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m}\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{2.1^{m|3}.\pi}{3.3^{m|3}.\sqrt{3}}\left[\tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m}) - (1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m-2})\right],$$

da $1^{\frac{1}{3}|1}.1^{-\frac{1}{3}|1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ nach Nr. 7) §. 50. ist.

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1}\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$$

$$= -\frac{5^{m|3}.1^{\frac{2}{3}|1}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{(3m+2).4^{m|3}.1^{\frac{1}{3}|1}}\left[-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m+1}-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{3m-1})\right]$$

$$= -\frac{4.2^{m|3}.\pi^2}{81.1^{m+1|3}(1^{\frac{1}{3}|1})^3}\left[-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m+1}-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}\ldots\frac{1}{3m-1})\right],$$

da $1^{-\frac{1}{3}|1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}.1^{\frac{1}{3}|1}}$ und $1^{\frac{2}{3}|1} = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}.1^{\frac{1}{3}|1}}$ nach Nr. 5) und Nr. 12) §. 50. ist.

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{3^{m|3}}{2^{m+1|3}}\left[-\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+\ldots\frac{1}{3m+2} - \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m})\right].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

6)

$$\int_0^1 \frac{\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}),$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = -\frac{4.\pi^2}{81.(1^{\frac{1}{3}|1})^3}(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1),$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{2}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{2}{3}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{2\pi^2}{81.(1^{\frac{1}{3}|1})^3}\left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{3}{4}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{1}{10}\left(-\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{11}{30}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{4\pi}{27\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\frac{3}{4}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^2}} = -\frac{10\pi^2}{81.7(1^{\frac{1}{3}|1})^3}\left(-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{97}{140}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{9}{40}\left(-\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{13}{40}\right),$$

u. s. w.

Hierin ist:

$$1^{-\frac{1}{3}|1} = 1{,}3541179392, \quad \lg 1^{-\frac{1}{3}|1} = 0{,}13165649168402.$$

Setzt man $r=3$, $q=1$ in Nr. 4) §. 46., so entsteht:

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+p-1}\lg x}{(1-x^3)^{\frac{1}{3}}}\partial x = -\frac{(3+p)^{m|3}.1^{\frac{p}{3}|1}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{(3m+p)(1+p)^{m|3}.1^{\frac{p-2}{3}|1}}$$

$$\times \int_0^1 \frac{x^{rm+p-1}(x-1)}{x^3-1}\partial x.$$

Hier ist:

$$\int_0^1 \frac{x^{rm+p-1}(x-1)}{x^3-1}\partial x = \int_0^1 \frac{x^{3m+p-1}}{1+x+x^2}\partial x.$$

Wird $p=1$, 2, 3 gesetzt, und werden die Werthe der entsprechenden Integrale aus §. 16. Nr. 4) eingeführt, so ergeben sich nach den nöthigen Reductionen folgende drei Integralformen:

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m}\lg x \partial x}{(1-x^3)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= -\frac{1^{m|3}.1^{\frac{1}{3}|1}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{2^{m|3}.1^{-\frac{1}{3}|1}}\left[\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{3m-1}-\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m-2}\right)\right]$$

$$= -\frac{4.1^{m|3}.\pi^2}{9.2^{m|3}(1^{-\frac{1}{3}|1})^3}\left[\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{3m-1}-\left(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m-2}\right)\right],$$

da $1^{\frac{1}{3}|1} = \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}\,.\,1^{-\frac{1}{3}|1}}$ nach Nr. 5) §. 50. und $1^{-\frac{2}{3}|1} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}\,.\,1^{-\frac{1}{3}|1}}$ nach Nr. 10) §. 50. ist.

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1}\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2.2^{m|3}.\pi}{3.3^{m|3}.\sqrt{3}}\left[\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\ldots.\frac{1}{m})\right.$$
$$\left. - (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{3m-1})\right],$$

da $1^{\frac{2}{3}|1}.1^{-\frac{2}{3}|1} = \dfrac{4\pi}{3\sqrt{3}}$ nach Nr. 7) §. 50. ist.

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= -\frac{3^{m|3}}{1^{m+1|3}}\left[-\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{7} + \ldots.\frac{1}{3m+1} - \frac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.\frac{1}{m})\right]$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

10)

$$\int_0^1 \frac{\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{4\pi^3}{27.\sqrt{3}(1^{-\frac{1}{3}|1})^3},$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = +\tfrac{1}{2}\lg 3 + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - 1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2\pi^2}{9(1^{-\frac{1}{3}|1})^3}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \tfrac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{6}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{3}{4}(-\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{11}{12}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{8\pi^2}{45}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{11}{20}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^7\lg x\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{10.\pi}{27\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{5}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x \partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{9}{14}\left(-\tfrac{1}{2}\lg 3 - \frac{\pi}{6\sqrt{3}} + \frac{25}{28}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^9 \lg x \partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{7.\pi^2}{45(1^{-\frac{2}{3}|1})^3}\left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{159}{280}\right),$$

u. s. w.

Hier ist:

$$1^{-\frac{2}{3}|1} = 2{,}6789385348, \quad \lg 1^{-\frac{2}{3}|1} = 0{,}42796274931426.$$

Von diesen Integralen hat Euler (Integr.-Rechn. Bd. IV. S. 172.) das erste in Nr. 6) angegeben. Die erste Form in Nr. 10) ist nach ihm wegen der darin vorkommenden transcendenten Grössen nicht darstellbar.

§. 58.

Wird $r = 4$, $q = 2$ in Nr. 4) §. 46. gesetzt, so entsteht:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+p-1}\lg x \partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{(4+p)^{m|4}.1^{\frac{p}{4}|1}.1^{-\frac{1}{2}|1}}{(4m+p)(2+p)^{m|4}.1^{\frac{p-2}{4}|1}} . \int_0^1 \frac{x^{4m+p-1}\partial x}{1+x^2}.$$

Wird hierin $p = 1, 2, 3, 4$ gesetzt und werden die Werthe der hieraus sich ergebenden Integrale $\int_0^1 \frac{x^{4m}\partial x}{1+x^2}$, $\int_0^1 \frac{x^{4m+1}\partial x}{1+x^2}$, ... aus §. 9. Nr. 6) eingeführt, so erhält man hieraus nach den nöthigen Reductionen folgende vier Integralformen:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m}\lg x \partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1^{m|4}.1^{\frac{1}{4}|1}\sqrt{\pi}}{3^{m|4}.1^{-\frac{1}{4}|1}}\left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{4m-1}\right)\right]$$

$$= -\frac{1^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{4.3^{m|4}(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\left[\frac{\pi}{4} - \left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{4m-1}\right)\right],$$

da $1^{\frac{1}{4}|1} = \frac{\pi.\sqrt{2}}{4.1^{-\frac{1}{4}|1}}$ nach §. 50. Nr. 5) ist.

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}\lg x \partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1^{m|2}.\pi}{4.2^{m|2}}\left[\tfrac{1}{2}\lg 2 - \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2m}\right)\right],$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{7^{m|4}.1^{\frac{3}{4}|1}.\sqrt{\pi}}{(4m+3).5^{m|4}.1^{\frac{1}{4}|1}}\left[-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1}\right]$$

$$= -\frac{3^{m|4}.\pi.\sqrt{2\pi}}{16.1^{m+1|4}(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left[-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1}\right],$$

da $1^{\frac{3}{4}|1} = \frac{3\pi.\sqrt{2}}{16.1^{\frac{1}{4}|1}}$ nach §. 50. Nr. 12) ist.

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{2^{m|2}}{2.1^{m+1|2}}\left[-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1})\right].$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

6)

$$\int_0^1 \frac{\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{16(1^{-\frac{1}{4}|1})^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi\lg 2}{8},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{16(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left(-\frac{\pi}{4}+1\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{4}(-\lg 2+1),$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{12(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi}{16}\left(\lg 2-\frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{3\pi.\sqrt{2\pi}}{80(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{13}{15}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^7\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{6}\left(-\lg 2+\frac{5}{6}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^8\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{5.\pi\sqrt{2\pi}}{84(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{76}{105}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^9\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{3\pi}{32}\left(\tfrac{1}{2}\lg 2-\frac{7}{24}\right),$$

u. s. w.

Das zweite und vierte Integral in Nr. 6) hat Euler a. a. O. S. 174. und S. 175. angegeben. Ferner hat er S. 176. folgendes Integral:

7)

$$\int_0^1 \frac{\lg x \partial x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

angegeben. Man findet dieses, wenn man den ersten und dritten Ausdruck in Nr. 6) mit einander verbindet, und am einfachsten dadurch, dass man die erste Form in Nr. 2) und Nr. 4) wählt. Es ist dann:

$$\int_0^1 \frac{\lg x \partial x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2 \lg x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1^{\frac{1}{4}|1} . \pi \sqrt{\pi}}{4 . 1^{-\frac{1}{4}|1}} \cdot \frac{1^{\frac{3}{4}|1} . \sqrt{\pi}}{3 . 1^{\frac{1}{4}|1}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1^{\frac{3}{4}|1} . \pi^2}{3 . 4 . 1^{-\frac{1}{4}|1}}\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}\left(1-\frac{\pi}{4}\right),$$

da $\frac{1^{\frac{3}{4}|1}}{1^{-\frac{1}{4}|1}} = \frac{3}{4}$ nach Nr. 4) §. 50. ist. Man sieht, mit welchem Scharfsinne Euler bei den ihm zu Gebote stehenden Mitteln verfuhr. Er fügt die Bemerkung bei: Obschon beide Integrale für sich auf unentwickelbare Formeln führen, so habe er doch schon längst gezeigt, dass das Produkt beider Integrale dem Flächenraum des Kreises, dessen Durchmesser 1 ist, gleich oder $\frac{\pi}{4}$ sei, und dass man durch die Verbindung beider das angegebene schöne Theorem erhalte. Ferner fügt er bei, dass man unzählig viele andere Theoreme dieser Art ableiten könne, welche für sich betrachtet eine sehr tiefe Untersuchung erfordern, die aber nach dem hier Mitgetheilten sehr leicht angegeben werden können. Verbindet man das erste und siebente Integral mit einander, so ist:

8)

$$\int_0^1 \frac{\lg x \partial x}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^6 \lg x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1^{\frac{1}{4}|1} . \pi \sqrt{\pi}}{4 . 1^{-\frac{1}{4}|1}} \cdot \frac{1^{\frac{3}{4}|1} . \sqrt{\pi}}{5 . 1^{\frac{1}{4}|1}}\left(\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{3 . \pi^2}{80}\left(\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}\right)$$

nach den nöthigen Reductionen. In den vorstehenden Integralen ist:

$$1^{-\frac{1}{4}|1} = 1{,}2254167025, \quad \lg 1^{-\frac{1}{4}|1} = 0{,}08828379548265;$$

die übrigen Werthe sind oben §. 53. angegeben.

§. 59.

Setzt man $r=6$, $q=3$, so erhält man aus §. 46. Nr. 4):

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{(6+p)^{m|6}.1^{\frac{p}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{(6m+p)(3+p)^{m|6}.1^{\frac{p-3}{6}|1}}.\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}\partial x}{1+x^3}.$$

Wird nun $p=1, 2, 3, \ldots. 6$ gesetzt und werden die entsprechenden Werthe für das begleitende Integral aus Nr. 9) §. 13. eingeführt, so entstehen nach den gehörigen Reductionen folgende sechs Integralformen:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{m|6}.1^{\frac{1}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{4^{m|6}.1^{-\frac{1}{3}|1}}\left[\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-(1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}-\ldots-\frac{1}{6m-2})\right],$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+1}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$= -\frac{8^{m|6}.1^{\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{(6m+2).5^{m|6}.1^{-\frac{1}{6}|1}}\left[-\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}\ldots.-\frac{1}{6m-1})\right],$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+2}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{m|2}.\pi}{6.2^{m|2}}\left[\tfrac{1}{3}\lg 2-\tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots.-\frac{1}{2m})\right],$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$= -\frac{10^{m|6}.1^{\frac{2}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{(6m+4).7^{m|6}.1^{\frac{1}{6}|1}}\left[-\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}-\ldots.+\frac{1}{6m+1}\right],$$

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}}$$

$$= -\frac{11^{m|6}.1^{\frac{5}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{(6m+5).8^{m|6}.1^{\frac{1}{3}|1}}\left[\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}-\ldots.+\frac{1}{6m+2}\right],$$

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{2^{m|2}}{3.1^{m+1|2}}\left[-\tfrac{1}{3}\lg 2+\tfrac{1}{3}\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2m+1}\right)\right].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 \frac{\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{\frac{1}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{1^{-\frac{1}{3}|1}}\left(\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{2.1^{-\frac{1}{6}|1}}\left(-\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{\pi\lg 2}{18},$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{\frac{2}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{4.1^{\frac{1}{6}|1}}\left(-\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+1\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{\frac{5}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{5.1^{\frac{1}{3}|1}}\left(\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\tfrac{1}{9}(-\lg 2+1),$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{\frac{1}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{4.1^{-\frac{1}{3}|1}}\left(\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{3}{4}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^7\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{5.1^{-\frac{1}{6}|1}}\left(-\tfrac{1}{3}\lg 2+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\frac{3}{10}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^8\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{\pi}{36}\left(\lg 2-\frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^9\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{\frac{2}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{7.1^{\frac{1}{6}|1}}\left(-\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{25}{28}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{1^{\frac{5}{6}|1}.\sqrt{\pi}}{8.1^{\frac{1}{3}|1}}\left(\tfrac{1}{3}\lg 2-\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\frac{17}{40}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{11}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^6}} = -\frac{2}{27}\left(-\lg 2+\frac{5}{6}\right),$$

u. s. w.

Ausser den früher schon angegebenen Werthen mögen noch folgende hier stehen:

$$1^{-\frac{1}{6}|1} = 1{,}12878702996,\quad 1^{-\frac{5}{6}|1} = 5{,}56631272838,$$

$$\lg 1^{-\frac{1}{6}|1} = 0{,}05261201060482,\quad \lg 1^{-\frac{5}{6}|1} = 0{,}74556785775330.$$

Wird $r=6$, $q=2$ in Nr. 4) §. 46. gesetzt, so erhält man:

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{(6+p)^{m|6}.1^{\frac{p}{6}|1}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{(6m+p)(2+p)^{m|6}.1^{\frac{p-4}{6}|1}}.\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}\partial x}{1+x^2+x^4}.$$

Wird hierin $p=1, 2, 3, \ldots. 6$ geschrieben und werden die Werthe für das begleitende Integral aus §. 18. Nr. 2) eingeführt, so erhält man nach den nöthigen Reductionen folgende sechs Integralformen:

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1^{m|6}.1^{\frac{1}{6}|1}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{3^{m|6}.\sqrt{\pi}}\Big[\tfrac{1}{4}\lg 3+\frac{\pi}{4\sqrt{3}}-(1+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{13}+\ldots\frac{1}{6m-5})$$
$$+\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{2m-1})\Big],$$

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+1}\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1^{m|3}.1^{\frac{1}{3}|1}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{2.2^{m|3}.1^{-\frac{1}{3}|1}}\Big[\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{3m-2})$$
$$+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+\ldots.\frac{1}{3m-1})\Big]$$
$$= -\frac{2.1^{m|3}.\pi^2}{9.2^{m|3}(1^{-\frac{1}{3}|1})^3}\Big[\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{3m-2})$$
$$+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+\ldots.\frac{1}{3m-1})\Big],$$

12)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+2}\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= -\frac{9^{m|6}.1^{-\frac{2}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{2(6m+3).5^{m|6}.1^{-\frac{1}{6}|1}}\Big[-\tfrac{1}{4}\lg 3-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}-\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{2m-1})$$
$$+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots.\frac{1}{6m-1}\Big],$$

13)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3}\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2^{m|3}.\pi}{3.3^{m|3}.\sqrt{3}}\Big[\tfrac{1}{4}\lg 3-\frac{\pi}{12\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{8}+\ldots\frac{1}{3m-1})$$
$$+\tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.\frac{1}{m})\Big],$$

14)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}\lg x\partial x}{(1-x^8)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{11^{m|6}.1^{\frac{5}{6}|1}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{(6m+5).1^{m+1|6}.1^{\frac{1}{6}|1}}\Big[-\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \Big(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots\frac{1}{6m-1}\Big) + 1 + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{13} + \ldots\ldots\frac{1}{6m+1}\Big]$$

$$= -\frac{5^{m|6}.\pi.1^{-\frac{2}{3}|1}}{18.1^{m+1|6}(1^{\frac{1}{6}|1})^2}\Big[-\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \Big(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots\frac{1}{6m-1}\Big) + 1 + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{13} + \ldots\ldots\frac{1}{6m+1}\Big],$$

da $1^{\frac{5}{6}|1} = \frac{5.\pi}{18.1^{\frac{1}{6}|1}}$ nach Nr. 12) §. 50. ist.

15)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{3^{m|3}}{2.1^{m+1|3}}\Big[-\tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}} - \tfrac{1}{6}\Big(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m}\Big) + \tfrac{1}{2}\Big(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m+1}\Big)\Big].$$

Die Reduction zu Nr. 11) ist oben zu Nr. 7) §. 57. gegeben.

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

16)

$$\int_0^1 \frac{\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1^{\frac{1}{6}|1}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{\sqrt{\pi}}\Big(\tfrac{1}{4}\lg 3 + \frac{\pi}{4\sqrt{3}}\Big),$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{\pi^3}{27(1^{-\frac{1}{3}|1})^3\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1^{-\frac{2}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{6.1^{-\frac{1}{6}|1}}\Big(\tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{4\sqrt{3}}\Big),$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\Big(\tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}}\Big),$$

$$\int_0^1 \frac{x^4\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{\pi.1^{-\frac{2}{3}|1}}{18(1^{\frac{1}{6}|1})^2}\Big(-\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + 1\Big),$$

$$\int_0^1 \frac{x^5\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\tfrac{1}{2}\Big(-\tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\Big),$$

$$\int_0^1 \frac{x^6\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1^{\frac{1}{6}|1}.1^{-\frac{2}{3}|1}}{3\sqrt{\pi}}\Big(\tfrac{1}{4}\lg 3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\Big),$$

$$\int_0^1 \frac{x^7\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{\pi^2}{9(1^{-\frac{1}{3}|1})^2}\left(\frac{\pi}{6\sqrt{3}} - \frac{1}{4}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^8\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{1^{-\frac{2}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{10.1^{\frac{1}{6}|1}}\Big(-\tfrac{1}{4}\lg 3 + \frac{\pi}{4\sqrt{3}} - \frac{2}{15}\Big),$$

$$\int_0^1 \frac{x^9\lg x\partial x}{(1-x^6)^{\frac{2}{3}}} = -\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}\Big(\tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{12\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\Big),$$

u. s. w.

Wird $r=6$, $q=4$ in §. 46. Nr. 4) gesetzt, so entsteht:

17)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}\lg x\,\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}}$$

$$=-\frac{(6+p)^{m|6}.1^{\frac{p}{6}|1}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{(6m+p)(4+p)^{m|6}.1^{\frac{p-2}{6}|1}}.\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}(x^4-1)\,\partial x}{(x^6-1)}.$$

Hier ist:

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}(x^4-1)\,\partial x}{x^6-1}=\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}(x^2+1)}{1+x^2+x^4}=\int_0^1 \frac{x^{6m+p+1}\partial x}{1+x^2+x^4}$$
$$+\int_0^1 \frac{x^{6m+p-1}\partial x}{1+x^2+x^4}.$$

Wird hierin $p=1, 2, 3, \ldots. 6$ gesetzt und werden die Werthe der beiden Integrale aus Nr. 2) §. 18. eingeführt, so ergeben sich nach den erforderlichen Reductionen folgende sechs Integralformen:

18)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m}\lg x\,\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}}=-\frac{1^{m|6}.1^{\frac{1}{6}|1}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{5^{m|6}.1^{-\frac{1}{6}|1}}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots.+\frac{1}{6m-1}\right.$$
$$\left.-(1+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{6m-5})\right]$$

$$=-\frac{1^{m|6}.1^{-\frac{1}{3}|1}.\pi}{3.5^{m|6}(1^{-\frac{1}{6}|1})^2}\left[\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\ldots.\frac{1}{6m-1}-(1+\tfrac{1}{7}+\ldots.\frac{1}{6m-5})\right],$$

da $1^{\frac{1}{6}|1}=\frac{\pi}{3.1^{-\frac{1}{6}|1}}$ nach Nr. 5) §. 50. ist.

19)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+1}\lg x\,\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}}=-\frac{1^{m|3}.\pi}{3.3^{m|3}.\sqrt{3}}\,[\tfrac{1}{4}\lg 3+\frac{\pi}{12\sqrt{3}}+\tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m})$$
$$-\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\ldots.\frac{1}{3m-2})],$$

da $1^{\frac{1}{3}|1}.1^{-\frac{1}{3}|1}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ nach Nr. 7) §. 50. ist.

20)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+2}\lg x\,\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}}=-\frac{3^{m|6}.1^{-\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{6.1^{m+1|6}.1^{\frac{1}{6}|1}}[-\tfrac{1}{4}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+1+\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{13}+\frac{1}{6m+1}$$
$$-\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\ldots.\frac{1}{2m-1})],$$

21)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+3}\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{5^{m|3}.1^{\frac{2}{3}|1}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{(6m+4).1^{m+1|3}.1^{\frac{1}{3}|1}}\Big[-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\dots\frac{1}{3m+1})$$
$$-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\dots\frac{1}{3m-1})\Big]$$

$$= -\frac{2.2^{m|3}.\pi^2}{81.1^{m+1|3}(1^{\frac{1}{3}|1})^3}\Big[-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}(1+\tfrac{1}{4}+\dots\frac{1}{3m+1})-\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\dots\frac{1}{3m-1})\Big],$$

da $1^{\frac{2}{3}|1}.1^{-\frac{1}{3}|1} = \frac{8\pi^2}{81(1^{\frac{1}{3}|1})^2}$ nach §. 57. Nr. 4) ist.

22)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+4}\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}}$$

$$= -\frac{2.11^{m|6}.1^{\frac{5}{6}|1}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{(6m+5).9^{m|6}.\sqrt{\pi}}\Big[\tfrac{1}{4}\lg 3-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}+\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\dots\frac{1}{2m+1})$$
$$-(\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{11}+\dots\frac{1}{6m-1})\Big],$$

23)

$$\int_0^1 \frac{x^{6m+5}\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{3^{m|3}}{2.2^{m+1|3}}\Big[-\tfrac{1}{4}\lg 3+\frac{1}{12\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\dots\frac{1}{3m+2})$$
$$-\tfrac{1}{6}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots\frac{1}{m})\Big].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

24)

$$\int_0^1 \frac{\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}\pi^2}{6(1^{-\frac{1}{6}|1})^2.\sqrt{3}},$$

$$\int_0^1 \frac{x\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{\pi}{3\sqrt{3}}(\tfrac{1}{2}\lg 3+\frac{\pi}{12\sqrt{3}}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^2\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{6.1^{\frac{1}{6}|1}}(-\tfrac{1}{4}\lg 3-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}+1),$$

$$\int_0^1 \frac{x^3\lg x\partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{2\pi^2}{81(1^{\frac{1}{3}|1})^3}(-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}),$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{2.1^{\frac{5}{6}|1}.1^{-\frac{1}{3}|1}}{5.\sqrt{\pi}}\left(\tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{1}{16}\left(-\lg 3 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + 1\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}.\pi}{15(1^{-\frac{1}{6}|1})^2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - \frac{4}{5}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{\pi}{9\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{4}\lg 3 + \frac{\pi}{12\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x \partial x}{\sqrt[3]{1-x^6}} = -\frac{1^{-\frac{1}{3}|1}.\sqrt{\pi}}{2.1^{\frac{1}{6}|1}}\left(-\tfrac{1}{4}\lg 3 - \frac{\pi}{4\sqrt{3}} + \frac{17}{21}\right),$$

u. s. w.

§. 60.

Wird $r=8$, $q=4$ in Nr. 4) §. 46. gesetzt, so entsteht:

1)

$$\int_0^1 \frac{x^{8m+p-1}\lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{(8+p)^{m|8}.1^{\frac{p}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{(8m+p)(4+p)^{m|8}.1^{\frac{p-4}{8}|1}}.\int_0^1 \frac{x^{8m+p-1}\partial x}{1+x^4}.$$

Wird $p=1, 2, 3, \ldots. 8$ geschrieben und werden die Werthe für das Integral $\int_0^1 \frac{x^{8m+p-1}\partial x}{(1-x^4)}$ aus §. 15. eingeführt, so entstehen nach den erforderlichen Reductionen folgende acht Integralformen:

2)

$$\int_0^1 \frac{x^{8m}\lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}}$$

$$= -\frac{1^{m|8}.1^{\frac{1}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{5^{m|8}.1^{-\frac{3}{8}|1}}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) - \left(1 - \tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{9} - \ldots. \frac{1}{8m-3}\right)\right],$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{8m+1}\lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{5^{m|4}.1^{\frac{1}{4}|1}.\sqrt{\pi}}{(8m+2).3^{m|4}.1^{-\frac{1}{4}|1}}\left[\frac{\pi}{8} - \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots - \frac{1}{2m-1}\right)\right]$$

$$= -\frac{1^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{8.3^{m|4}(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\left[\frac{\pi}{8} - \tfrac{1}{2}\left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \ldots. - \frac{1}{4m-1}\right)\right],$$

da $1^{\frac{1}{4}|1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4.1^{-\frac{1}{4}|1}}$ nach Nr. 5) §. 50. ist;

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{8m+2}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^8}}$$

$$=-\frac{3^{m|8}.1^{\frac{3}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{3.7^{m|8}.1^{-\frac{1}{8}|1}}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}}(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)-(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11}-\ldots-\frac{1}{8m-1})\right],$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{8m+3}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^8}}=-\frac{1^{m|2}.\pi}{8.2^{m|2}}[\tfrac{1}{4}\lg 2-\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2m})],$$

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{8m+4}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^8}}$$

$$=-\frac{5^{m|8}.1^{\frac{5}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{5.1^{m+1|8}.1^{\frac{1}{8}|1}}[-\frac{1}{4\sqrt{2}}(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)+1-\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{9}-\ldots+\frac{1}{8m+1}],$$

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{8m+5}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^8}}=-\frac{3^{m|4}.1^{\frac{3}{4}|1}.\sqrt{\pi}}{6.1^{m+1|4}.1^{\frac{1}{4}|1}}[-\frac{\pi}{8}+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1})]$$

$$=-\frac{3^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{32.1^{m+1|4}(1^{\frac{1}{4}|1})^2}[-\frac{\pi}{8}+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1})],$$

da $1^{\frac{3}{4}|1}=\frac{3.\pi\sqrt{2}}{16.1^{\frac{1}{4}|1}}$ nach §. 50. Nr. 12) ist;

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{8m+6}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^8}}$$

$$=-\frac{7^{m|8}.1^{\frac{7}{8}|1}.\sqrt{\pi}}{7.11^{m|8}.1^{\frac{3}{8}|1}}[-\frac{1}{4\sqrt{2}}(-\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi)+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{7}+\tfrac{1}{11}-\ldots+\frac{1}{8m+3}],$$

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{8m+7}\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^8}}=-\frac{2^{m|2}}{4.1^{m+1|2}}[-\tfrac{1}{4}\lg 2+\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1})].$$

Hieraus ergeben sich folgende Integrale:

10)

$$\int_0^1 \frac{\lg x\partial x}{\sqrt{1-x^8}}=-\frac{1^{\frac{1}{8}|1}\sqrt{2\pi}}{8.1^{-\frac{3}{8}|1}}(\lg\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\pi),$$

$$\int_0^1 \frac{x \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{\pi^2 \sqrt{2\pi}}{64(1^{-\frac{1}{4}|1})^2},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{1^{\frac{3}{8}|1} \sqrt{2\pi}}{24 . 1^{-\frac{1}{8}|1}} \left(-\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^3 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{\pi \lg 2}{32},$$

$$\int_0^1 \frac{x^4 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{1^{\frac{5}{8}|1} . \sqrt{\pi}}{5 . 1^{\frac{1}{8}|1}} \left[-\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) + 1\right],$$

$$\int_0^1 \frac{x^5 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{\pi \sqrt{2\pi}}{64(1^{\frac{1}{4}|1})^2} \left(-\frac{\pi}{4} + 1\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^6 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{1^{\frac{7}{8}|1} . \sqrt{\pi}}{7 . 1^{\frac{3}{8}|1}} \left[-\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(-\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) + \frac{1}{3}\right],$$

$$\int_0^1 \frac{x^7 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{1}{16}(1 - \lg 2),$$

$$\int_0^1 \frac{x^8 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{1^{\frac{1}{8}|1} . \sqrt{\pi}}{5 . 1^{-\frac{3}{8}|1}} \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) - \frac{4}{5}\right],$$

$$\int_0^1 \frac{x^9 \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{\pi \sqrt{2\pi}}{24(1^{-\frac{1}{4}|1})^2} \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\right),$$

$$\int_0^1 \frac{x^{10} \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{1^{\frac{3}{8}|1} . \sqrt{\pi}}{7 . 1^{-\frac{1}{8}|1}} \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \left(-\lg \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right) - \frac{4}{21}\right],$$

$$\int_0^1 \frac{x^{11} \lg x \partial x}{\sqrt{1-x^8}} = -\frac{\pi}{64}\left(\lg 2 - \frac{1}{2}\right),$$

u. s. w.

Ausser den früher in §. 55. mitgetheilten, hierher gehörigen Werthen theilen wir noch folgende mit:

$$1^{-\frac{1}{8}|1} = 1{,}0896523559, \qquad \lg 1^{-\frac{1}{8}|1} = 0{,}037287962772,$$

$$1^{-\frac{3}{8}|1} = 1{,}4345188480, \qquad \lg 1^{-\frac{3}{8}|1} = 0{,}156706258799,$$

$$1^{-\frac{5}{8}|1} = 2{,}3704361845, \qquad \lg 1^{-\frac{5}{8}|1} = 0{,}374828277974,$$

$$1^{-\frac{7}{8}|1} = 7{,}5339415976, \qquad \lg 1^{-\frac{7}{8}|1} = 0{,}877022249340.$$

Aus den in §. 47. u. ff. angegebenen Resultaten zeigt sich, welche ausgedehnte Anwendung die in §. 46. Nr. 4) und 5) aufgestellten Gleichungen zulassen. Man kann ihnen noch eine allgemeinere Form geben, wodurch sich ihre Brauchbarkeit steigert, wenn man $tr+q$ statt q setzt. Man erhält dann:

11)

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{t+\frac{q-r}{r}} \lg x \partial x = \frac{1^{m+\frac{p}{r}|1} . 1^{t+\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p) . 1^{m+t+\frac{p+q-r}{r}|1}}$$

$$\times \int_0^1 x^{rm+p-1} \frac{(x^{tr+q}-1)}{x^r-1} \partial x = -\frac{(r+p)^{m|r} . q^{t|r} . 1^{\frac{p}{r}|1} . 1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p)(p+q)^{m+t|r} . 1^{\frac{p+q-r}{r}|1}}$$

$$\times \int_0^1 x^{rm+p-1} \frac{(x^{rt+q}-1)}{x^r-1} \partial x.$$

Wird r statt p gesetzt, so entsteht nach den nöthigen Reductionen:

12)

$$\int_0^1 x^{rm+r-1}(1-x^r)^{t+\frac{q-r}{r}} \lg x \partial x = -\frac{r^{m|r} . q^{t|r}}{q^{m+1+t|r}}$$

$$\times \int_0^1 x^{rm+r-1} \frac{(x^{tr+q}-1)}{x^r-1} \partial x = -\frac{r^{m|r}}{(q+tr)^{m+1|r}} . \int_0^1 x^{rm+r-1} \frac{(x^{tr+q}-1)}{x^r-1} \partial x.$$

Aus diesen Gleichungen kann man nach der bisherigen Methode durch die Annahme von r, q und t ausser den schon angegebenen eine Reihe anderer Integrale ableiten. In §. 51. und §. 53. wurden einzelne hierher gehörige mitgetheilt. Man findet die in Nr. 11) und Nr. 12) §. 51. auf anderem Wege entwickelten Integrale, wenn man hier $r=2$, $q=3$ und dann q statt t schreibt. Eben so ergeben sich die in Nr. 8)—11) §. 53. angegebenen Integrale, wenn die entsprechenden Werthe für r, q und t gesetzt werden.

§. 61.

Sämmtliche bisher behandelte irrationale Integrale lassen sich auf eine andere Art aus den in §. 21. angegebenen Gleichungen dadurch ableiten, dass man für n gebrochene Zahlen setzt. In diesem Falle entstehen unendliche Reihen. Diese haben aber den Missstand, dass sie häufig sehr langsam convergiren. Je nachdem die Grössen p, q und r beschaffen sind, werden sie etwas rascher convergiren, namentlich wenn r eine grössere Zahl bedeutet. In diesem Falle werden sie gute Dienste leisten. Beide Integrations-Methoden, die bisherige, welche auf geschlossene Ausdrücke führt, und die eben erwähnte, schliessen sich jedoch nicht aus, sondern ergänzen sich gegenseitig. Die letztere bietet ausserdem noch den Vortheil, dass sie sich auf die Binomien

$(1+x^q)^n$ und $(1-x^q)^n$ erstreckt, während die erstere nur von der zweiten Binomform gilt. Setzt man nun für n eine gebrochene Zahl und wählt den Werth $n=\frac{1}{2}$, so ergeben sich für die in §. 21. angegebenen Gleichungen folgende:

1)

$$\int_0^1 x^{p-1}\sqrt{1-x^q}(\lg x)^r\partial x=(-)^r.1^{r|1}\Big(\frac{1}{p^{r+1}}-\frac{1}{2(p+q)^{r+1}}-\frac{1}{8(p+2q)^{r+1}}-\frac{1}{16(p+3q)^{r+1}}-\frac{5}{128(p+4q)^{r+1}}-\frac{7}{256(p+5q)^{r+1}}-\frac{21}{1024(p+6q)^{r+1}}-\ldots\Big),$$

2)

$$\int_0^1 x^{p-1}\sqrt{1+x^q}(\lg x)^r\partial x=(-)^r.1^{r|1}\Big(\frac{1}{p^{r+1}}+\frac{1}{2(p+q)^{r+1}}-\frac{1}{8(p+2q)^{r+1}}+\frac{1}{16(p+3q)^{r+1}}-\frac{5}{128(p+4q)^{r+1}}+\frac{7}{256(p+5q)^{r+1}}-\ldots\Big),$$

3)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg x)^r\partial x}{\sqrt{1-x^q}}=(-)^r.1^{r|1}\Big(\frac{1}{p^{r+1}}+\frac{1}{2(p+q)^{r+1}}+\frac{3}{8(p+2q)^{r+1}}+\frac{5}{16(p+3q)^{r+1}}+\frac{35}{128(p+4q)^{r+1}}+\frac{63}{256(p+5q)^{r+1}}+\ldots\Big),$$

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}(\lg x)^r\partial x}{\sqrt{1+x^q}}=(-)^r.1^{r|1}\Big(\frac{1}{p^{r+1}}-\frac{1}{2(p+q)^{r+1}}+\frac{3}{8(p+2q)^{r+1}}-\frac{5}{16(p+3q)^{r+1}}+\frac{35}{128(p+4q)^{r+1}}-\frac{63}{256(p+5q)^{r+1}}+\ldots\Big).$$

Für den Fall, als $p=q$ ist, tritt eine besondere Gruppe von Integralen auf und man erhält aus Nr. 1):

5)

$$\int_0^1 x^{q-1}\sqrt{1-x^q}(\lg x)^r\partial x=(-)^r.\frac{1^{r|1}}{q^{r+1}}\Big(1-\frac{1}{2.2^{r+1}}-\frac{1}{8.3^{r+1}}-\frac{1}{16.4^{r+1}}-\frac{5}{128.5^{r+1}}-\frac{7}{286.6^{r+1}}\ldots\Big),$$

und so auch für die Gleichungen Nr. 2)—4).

Die Bedingungen der Convergenz treten in diesen Gleichungen deutlich hervor. Bei kleinen Werthen von r, p und q wird

sie sehr gering sein. Bestimmt man beispielsweise den Werth von $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x$, so ist nach §. 51. Nr. 5):

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = +\tfrac{1}{3}\lg 2 - \tfrac{4}{9} = 0{,}213395384257779600,$$

und man kann ihn zu beliebiger Genauigkeit steigern. Leitet man ihn aber aus Nr. 5) ab, so erhält man:

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\tfrac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2.4} - \frac{1}{8.9} - \frac{1}{16.16} - \frac{5}{128.25} - \frac{7}{256.36} - \ldots\right) = -0{,}21348,$$

und dieser Werth ist, obgleich aus den zehn ersten Gliedern der Reihe abgeleitet, abgesehen von der Mühe der Rechnung, nur auf drei Decimalstellen genau.

§. 62.

In den Integralen, welche in §. 51.—§. 60. untersucht sind, erscheint $\lg x$ in der ersten Potenz. Soll die Integration auch auf die Fälle ausgedehnt werden, worin $\lg x$ in einer höhern Potenz erscheint, so kommen die in §. 48. aufgestellten Gleichungen zur Anwendung, welche, wie schon §. 49. bemerkt wurde, auch von Integralen mit irrationalen Ausdrücken gelten. In diesem Falle bildet die Gleichung Nr. 1) §. 46. die Grundlage, der wir folgende allgemeine Form geben, indem $rm+p$ statt m gesetzt wird:

1)

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}\lg x\partial x = -\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}\partial x \int_0^1 x^{rm+p-1}\frac{(x^q-1)}{x^r-1}\partial x$$

Hierin ist:

2)

$$X = \int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}\partial x = \frac{(r+p)^{m|r}.1^{\frac{p}{r}|1}.1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p)(p+q)^{m|r}.1^{\frac{p+q-r}{r}|1}},$$

3)

$$Y=\int_0^1 \frac{x^{rm+p-1}(x^q-1)}{x^r-1}\partial x.$$

Die in §. 48. gegebenen Gleichungen nehmen folgende Gestalt an:

4)

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}\lg x\partial x=-\frac{(r+p)^{m|r}.1^{\frac{p}{r}|1}.1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p)\,(p+q)^{m|r}.1^{\frac{p+q-r}{r}|1}}Y,$$

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}(\lg x)^2\partial x$$

$$=\frac{(r+p)^{m|r}.1^{\frac{p}{r}|1}.1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p)(p+q)^{m|r}.1^{\frac{p+q-r}{r}|1}}(Y^2-\frac{\partial Y}{\partial rm}),$$

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}(\lg x)^3\partial x$$

$$=-\frac{(r+p)^{m|r}.1^{\frac{p}{r}-1}.1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p)(p+q)^{m|r}.1^{\frac{p+q-r}{r}|1}}(Y^3-\frac{Y.\partial Y}{\partial rm}+\frac{\partial^2 Y}{(\partial rm)^2}),$$

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}(\lg x)^4\partial x$$

$$=\frac{(r+p)^{m|r}.1^{\frac{p}{r}|1}.1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p)(p+q)^{m|r}.1^{\frac{p+q-r}{r}|1}}(Y^4-6\frac{Y^2.\partial Y}{\partial rm}+4\frac{Y.\partial^2 Y}{(\partial rm)^2}$$

$$+3\frac{\partial Y.\partial Y}{(\partial rm)^2}-\frac{\partial^3 Y}{(\partial rm)^3}),$$

u. s. w.

So oft nun ein Integral für einen bestimmten Werth von r und q angegeben werden soll, hat man den entsprechenden Werth von Y, $\frac{\partial Y}{\partial rm}$, $\frac{\partial^2 Y}{(\partial rm)^2}$, ... zu ermitteln und die erhaltenen Resultate, die sich aus den früheren Abschnitten entnehmen lassen, einzuführen. Hierzu kann man zwei Methoden benutzen.

Die erste besteht darin, dass man Y in Nr. 3) nach den steigenden Potenzen von x in Reihen entwickelt, wiederholt hinsichtlich m differenziirt und zwischen den Grenzen 0 und 1 integrirt. Hierdurch erhält man folgende Integrale:

5)

$$Y=\int_0^1 \frac{x^{rm+p-1}(x^q-1)}{x^r-1}\partial x=\frac{1}{rm+p}+\frac{1}{rm+p+r}+\frac{1}{rm+p+2r}+\dots$$
$$-\left(\frac{1}{rm+q+p}+\frac{1}{rm+q+p+r}+\frac{1}{rm+q+p+2r}\dots\right)$$
$$=S(rm+p,r)^1-S(rm+q+p,r)^1,$$

$$\frac{\partial Y}{\partial rm}=\int_0^1 \frac{x^{rm+p-1}(x^q-1)}{x^r-1}\lg x\,\partial x=-S(rm+p,r)^2+S(rm+q+p,r)^2,$$

$$\frac{\partial^2 Y}{(\partial rm)^2}=\int_0^1 \frac{x^{rm+p-1}(x^q-1)}{x^r-1}(\lg x)^2\partial x=2S(rm+p,r)^3-2S(rm+q+p,r)^3,$$

. . . .

$$\frac{\partial^n Y}{(\partial rm)^n}=\int_0^1 \frac{x^{rm+p-1}(x^q-1)}{x^r-1}(\lg x)^n\partial x$$
$$=(-)^n.1^{n|1}[S(rm+p,r)^{n+1}-S(rm+q+p,r)^{n+1}].$$

Hieraus erhält man durch Einführung dieser Werthe in Nr. 4) folgende entwickelte Darstellung:

6)

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}\lg x\,\partial x$$

$$=-\frac{(r+p)^{m|r}.1^{\frac{p}{r}|1}.1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p)(p+q)^{m|r}.1^{\frac{p+q-r}{r}|1}}[S(rm+p,r)^1-S(rm+q+p,r)^1],$$

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}(\lg x)^2\partial x$$

$$=\frac{(r+p)^{m|r}.1^{\frac{p}{r}|1}.1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p)(p+q)^{m|r}.1^{\frac{p+q-r}{r}|1}}\left[\begin{matrix}(S(rm+p,r)^1-S(rm+q+p,r)^1)^2\\+S(rm+p,r)^2-S(rm+q+p,r)^2\end{matrix}\right],$$

$$\int_0^1 x^{rm+p-1}(1-x^r)^{\frac{q-r}{r}}(\lg x)^3 \partial x$$

$$= -\frac{(r+p)^{m|r}.1^{\frac{p}{r}|1}.1^{\frac{q-r}{r}|1}}{(rm+p)(p+q)^{m|r}.1^{\frac{p+q-r}{r}|1}}$$

$$[(S(rm+p,r)^1 - S(rm+q+p,r)^1)^3$$
$$+3(S(rm+p,r)^1 - S(rm+q+p,r)^1)(S(rm+p,r)^2 - S(rm+q+p,r)^2)$$
$$+2(S(rm+p,r)^3 - S(rm+q+p,r)^3)],$$

u. s. w.

Bei der Anwendung auf einzelne Fälle hat man für jedes bestimmte r wie früher $p = 1, 2, 3 \ldots . r$ zu setzen. Dadurch ergeben sich alle einem r zugehörigen Integralformen. Hierbei wird man dadurch gefördert, dass die aus den Fakultäten bestehenden Vorzahlen schon früher bestimmt sind, und man ihre Werthe nur einzuführen hat.

Die Richtigkeit dieser Darstellungen zeigt sich übrigens leicht und insbesondere auch dadurch, dass man sie zur Bestimmung schon bekannter Integrale benutzt. Setzt man zu dem Ende in der ersten Form von Nr. 6) $q=3$, $r=2$ und $p=1$, 2, so ist:

$$\int_0^1 x^{2m}\sqrt{1-x^2}\lg x\,\partial x = -\frac{1^{m|2}\pi}{2.2^{m+1|2}}[S(2m+1,2)^1 - S(2m+4,2)^1],$$

$$\int_0^1 x^{2m+1}\sqrt{1-x^2}\lg x\partial x = -\frac{2^{m|2}}{1^{m+2|2}}[S(2m+2,2)^1 - S(2m+5,2)^1].$$

Diese Gleichungen haben den nämlichen Werth, wie die in Nr. 3) und 4) §. 51) aufgestellten. Bemerkt man nämlich, dass

$$S(2m+1,2)^1 - S(2m+4,2)^1 = \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+3} - \frac{1}{2m+4} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2m+2} + \lg 2 - (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots . - \frac{1}{2m}),$$

$$S(2m+2,2)^1 - S(2m+5,2)^1 = \frac{1}{2m+3} + \frac{1}{2m+2} - \frac{1}{2m+3} + \frac{1}{2m+4} - \frac{1}{2m+5} + \ldots$$
$$= \frac{1}{2m+3} - \lg 2 + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots . + \frac{1}{2m+1}$$

ist, wenn die Reihen vervollständigt und die ergänzenden Glieder abgezogen werden, so erhält man sofort durch Einführung

7)

$$\int_0^1 x^{2m} \sqrt{1-x^2} \lg x \, \partial x$$

$$= -\frac{1^{m|2}\pi}{2.2^{m+1|2}} \left[\frac{1}{2m+2} + \lg 2 - (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \ldots - \frac{1}{2m}) \right],$$

8)

$$\int_0^1 x^{2m+1} \sqrt{1-x^2} \lg x \, \partial x$$

$$= -\frac{2^{m|2}}{1^{m+2|2}} \left[\frac{1}{2m+3} - \lg 2 + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} \ldots + \frac{1}{2m+1} \right],$$

diess sind die Gleichungen, wie sie in §. 51. gegeben wurden.

Soll die zweite Form in Nr. 6) benutzt werden, so erhält man, wenn $r=2$, $q=3$, $p=1$, 2 gesetzt wird, ausser den eben angegebenen Reihen, wenn eben so verfahren und die fehlenden Glieder in den Reihen ergänzt werden:

$$S(2m+1,2)^2 - S(2m+4,2)^2$$

$$= \frac{1}{(2m+2)^2} + \frac{1}{(2m+1)^2} - \frac{1}{(2m+2)^2} + \frac{1}{(2m+3)^2} - \ldots$$

$$= \frac{1}{(2m+2)^2} + S'(1,1)^2 - (1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{(2m)^2}),$$

$$S(2m+2,2)^2 - S(2m+5,2)^2$$

$$= \frac{1}{(2m+3)^2} + \frac{1}{(2m+2)^2} - \frac{1}{(2m+3)^2} + \frac{1}{(2m+4)^2} - \ldots$$

$$= \frac{1}{(2m+3)^2} - S'(1,1)^2 + 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} - \ldots + \frac{1}{(2m+1)^2}.$$

Da $S'(1,1)^2 = \frac{\pi^2}{12}$ ist, so ergeben sich aus der zweiten Form von Nr. 6) folgende zwei Integralformen:

9)

$$\int_0^1 x^{2m} \sqrt{1-x^2} (\lg x)^2 \partial x$$

$$= \frac{1^{m|2}\pi}{2.2^{m+1|2}} [(S(2m+1)^1 - S(2m+4,2)^1)^2 + S(2m+1,2)^2 - S(2m+4,2)^4]$$

$$= \frac{1^{m|2}\pi}{2.2^{m+1|2}} \left[\left(\frac{1}{2m+2} + \lg 2 - (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \ldots - \frac{1}{2m}) \right)^2 \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(2m+2)^2} + \frac{\pi^2}{12} - (1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{(2m)^2}) \right],$$

10)

$$\int_0^1 x^{2m+1}\sqrt{1-x^2}\,(\lg x)^2\,\partial x$$

$$=\frac{2^{m|2}}{1^{m+1|2}}[(S(2m+2,2)^1-S(2m+5,2)^1)^2+S(2m+2,2)^2-S(2m+5,2)^2]$$

$$=\frac{2^{m|2}}{1^{m+1|2}}\Big[\Big(\frac{1}{2m+3}-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1}\Big)^2$$

$$+\frac{1}{(2m+3)^2}-\frac{\pi^2}{12}+1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)^2}\Big],$$

u. s. w.

Diese Methode führt immer zum Ziele. Sie ist jedoch bei Bestimmung der einzelnen Fälle, wie man sieht, mit mancherlei Weitläufigkeiten verbunden. Darum theilen wir noch folgende einfachere Methode mit.

§. 63.

Die zweite Methode besteht darin, dass man den Ausdruck Nr. 3) §. 62. auf die einfachste Form durch Zerlegung zurückbringt, und nach den fallenden Potenzen von x, wenn diess zulässig ist, ordnet. Hierbei wird man auf Formen geführt, die schon im Früheren angegeben sind oder leicht auf sie zurückgebracht werden können. Sollen hiernach die Integrale

$$\int_0^1 x^{2m}\sqrt{1-x^2}\,(\lg x)^2\,\partial x,\quad \int_0^1 x^{2m+1}\sqrt{1-x^2}\,(\lg x)^2\,\partial x \quad \text{u. s. w.}$$

bestimmt werden, so ist aus Nr. 3) §. 62., wenn $q=3$, $r=2$, $p=1$, 2 gesetzt wird:

1)

$$Y=\int_0^1 x^{2m+p-1}\frac{(x^3-1)}{x^2-1}\partial x=\int_0^1 x^{2m+p}\partial x+\int_0^1\frac{x^{2m+p-1}\partial x}{1-x}$$

$$=\frac{1}{2m+p+1}+\int_0^1\frac{x^{2m+p-1}\partial x}{1+x}.$$

Wird wiederholt nach m differenzirt, so ergibt sich

$$\frac{\partial Y}{\partial 2m}=-\frac{1}{(2m+p+1)^2}+\int_0^1\frac{x^{2m+p-1}\lg x\,\partial x}{1+x},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{(\partial 2m)^2} = \frac{2}{(2m+p+1)^3} + \int_0^1 \frac{x^{2m+p-1}(\lg x)^2 \partial x}{1+x}.$$

u. s. w.

Setzt man nun $p = 1, 2$ und werden die Werthe der hieraus sich ergebenden Integrale aus §. 33. Nr. 2) und 3) bestimmt, so erhält man mit Rücksicht auf §. 2. Nr. 9) und 10) für $p = 1$:

2)

$$Y = \frac{1}{2m+2} + \lg 2 - (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} \ldots - \frac{1}{2m}),$$

$$\frac{\partial Y}{\partial 2m} = -\frac{1}{(2m+2)^2} - S'(1,1)^2 + 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{(2m)^2},$$

$$\frac{\partial^2 Y}{(\partial 2m)^2} = \frac{2}{(2m+2)^3} + 2S'(1,1)^3 - 2(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + \ldots - \frac{1}{(2m+1)^3}),$$

für $p = 2$:

3)

$$Y = \frac{1}{2m+3} - \lg 2 + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2m+1},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial 2m} = -\frac{1}{(2m+3)^2} + S'(1,1)^2 - (1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + \frac{1}{(2m+1)^2}),$$

$$\frac{\partial^2 Y}{(\partial 2m)^2} = \frac{2}{(2m+3)^3} - 2S'(1,1)^3 + 2(1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \ldots + \frac{1}{(2m+1)^3}).$$

Werden diese Werthe in die zweite und dritte Form §. 62. Nr. 4) eingeführt, so erhält man folgende Integralformen:

4)

$$\int_0^1 x^{2m} \sqrt{1-x^2} (\lg x)^2 \partial x$$

$$= \frac{1^{m|2}\pi}{2 \, . \, 2^{m+1|2}} \Big[\Big(\frac{1}{2m+2} + \lg 2 - (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots - \frac{1}{2m}) \Big)^2$$

$$+ \frac{1}{(2m+2)^2} + \frac{\pi^2}{12} - (1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots - \frac{1}{(2m)^2}) \Big],$$

5)

$$\int_0^1 x^{2m+1} \sqrt{1-x^2} (\lg x)^2 \partial x$$

$$= \frac{2^{m|2}}{1^{m+2|2}} \Big[\Big(\frac{1}{2m+3} - \lg 2 + 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2m+1} \Big)^2$$

$$+ \frac{1}{(2m+3)^2} - \frac{\pi^2}{12} + 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + \frac{1}{(2m+1)^2} \Big],$$

6)

$$\int_0^1 x^{2m}\sqrt{1-x^2}(\lg x)^3\partial x$$

$$=-\frac{1^{m|2}\pi}{2.2^{m+1|2}}\Big[\Big(\frac{1}{2m+2}+\lg 2-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2m}\Big)^3$$

$$+3\Big(\frac{1}{3m+2}+\lg 2-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2m}\Big)$$

$$\times\Big(\frac{1}{(2m+2)^2}+\frac{\pi^2}{12}-(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots-\frac{1}{(2m)^2}\Big)$$

$$+2\Big(\frac{1}{(2m+2)^3}+S'(1,1)^3-(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\ldots-\frac{1}{(2m)^3})\Big)\Big],$$

7)

$$\int_0^1 x^{2m+1}\sqrt{1-x^2}\,(\lg x)^3\partial x$$

$$=-\frac{2^{m|2}}{1^{m+2|2}}\Big[\Big(\frac{1}{2m+3}-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)}\Big)^3$$

$$+3\Big(\frac{1}{2m+3}-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots+\frac{1}{2m+1}\Big)$$

$$\times\Big(\frac{1}{(2m+3)^2}-\frac{\pi^2}{12}+1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)^2}\Big)$$

$$+2\Big(\frac{1}{(2m+3)^3}-S'(1,1)^3+1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)^3}\Big].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}(\lg x)^2\partial x = \frac{\pi}{4}[(\tfrac{1}{2}+\lg 2)^2+\frac{\pi^2}{12}+\tfrac{1}{4}],$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,(\lg x)^2\partial x = \tfrac{1}{3}[(\tfrac{4}{3}-\lg 2)^2+\frac{10}{9}-\frac{\pi^2}{12}],$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,(\lg x)^2\partial x = \frac{\pi}{16}[(\lg 2-\tfrac{1}{4})^2+\frac{\pi^2}{12}-\frac{11}{16}],$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}\,(\lg x)^2\partial x = \frac{2}{15}\Big[\Big(\frac{31}{30}-\lg 2\Big)^2+\frac{811}{900}-\frac{\pi^2}{12}\Big],$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}\,(\lg x)^2\partial x = \frac{\pi}{32}[(\lg 2-\tfrac{5}{12})^2+\frac{\pi^2}{12}-\frac{37}{48}],$$

$$\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^2}(\lg x)^2\partial x = \frac{8}{105}\left[\left(\frac{389}{420}-\lg 2\right)^2+\frac{151531}{176400}-\frac{\pi^2}{12}\right],$$

$$\int_0^1 x^6\sqrt{1-x^2}(\lg x)^2\partial x = \frac{5.\pi}{256}[(\lg 2-\frac{59}{120})^2+\frac{\pi^2}{12}-\frac{3817}{4800}],$$

u. s. w.

9)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}(\lg x)^3\partial x$$

$$= -\frac{\pi}{4}[(\tfrac{1}{2}+\lg 2)^3+3(\tfrac{1}{2}+\lg 2)\left(\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{4}\right)+2(\tfrac{1}{8}+S'(1,1)^3)],$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}(\lg x)^3\partial x$$

$$= -\tfrac{1}{3}[(\tfrac{4}{3}-\lg 2)^3+3(\tfrac{4}{3}-\lg 2)\left(\frac{10}{9}-\frac{\pi^2}{12}\right)+2\left(\frac{28}{27}-S'(1,1)^3\right)],$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}(\lg x)^3\partial x$$

$$= -\frac{\pi}{16}[(\lg 2-\tfrac{1}{4})^3+3(\lg 2-\tfrac{1}{4})\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{11}{16}\right)+2(S'(1,1)^3-\frac{55}{64})],$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^2}(\lg x)^3\partial x$$

$$= -\frac{2}{15}\left[\left(\frac{31}{30}-\lg 2\right)^3+3\left(\frac{31}{30}-\lg 2\right)\left(\frac{811}{900}-\frac{\pi^2}{12}\right)\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{24841}{27000}-S'(1,1)^3\right)\right],$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^2}(\lg x)^3\partial x$$

$$= -\frac{\pi}{32}[(\lg 2-\frac{5}{12})^3+3(\lg 2-\frac{5}{12})\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{37}{48}\right)+2(S'(1,1)^3-\frac{1541}{1728})],$$

u. s. w.

Obgleich diese Darstellungen ziemlich ausgedehnt erscheinen, so wird doch ihre Werthbestimmung dadurch sehr erleichtert, dass die Werthe der zwei ersten Glieder in Nr. 9) schon in Nr. 8) angegeben sind und daher nur noch das dritte zu bestimmen ist.

§. 64.

Setzt man $r=4$, $q=6$ in Nr. 3) §. 62., so erhält man bei wiederholter Differentiation für Y:

1)

$$Y=\int_0^1 x^{4m+p-1}\frac{x^6-1}{x^4-1}\partial x=\int_0^1 x^{4m+p-1}(x^2+\frac{1}{1+x^2}\partial x$$

$$=\frac{1}{4m+p+2}+\int_0^1\frac{x^{4m+p-1}}{1+x^2}\partial x,$$

2)

$$\frac{\partial Y}{\partial 4m}=-\frac{1}{(4m+p+2)^2}+\int_0^1\frac{x^{4m+p-1}\lg x\,\partial x}{1+x^2},$$

3)

$$\frac{\partial^2 Y}{(\partial 4m)^2}=\frac{2}{(4m+p+2)^3}+\int_0^1\frac{x^{4m+p-1}(\lg x)^2\partial x}{1+x^2}.$$

Wird nun in diesen drei Gleichungen $p=1$, 2, 3, 4 gesetzt, und werden die bezüglichen Werthe für Nr. 1) aus §. 9. Nr. 6) und für Nr. 2) und 3) aus §. 39. Nr. 2)—4) eingeführt, indem man $r=1$, 2 schreibt, so erhält man aus den Gleichungen Nr. 4) §. 62. folgende Integralformen:

4)

$$\int_0^1 x^{4m}\sqrt{1-x^4}(\lg x)^2\partial x$$

$$=\frac{3.1^{m|4}\pi\sqrt{2\pi}}{32.7^{m|4}(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{1}{4m+3}+\frac{\pi}{4}-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{4m-1}\Big)^2$$

$$+\frac{1}{(4m+3)^2}+S'(1,2)^2-(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\cdots-\frac{1}{(4m-1)^2})\Big],$$

5)

$$\int_0^1 x^{4m+1}\sqrt{1-x^4}\,(\lg x)^2\partial x$$

$$=\frac{1^{m|2}\pi}{4.2^{m+1|2}}\Big[\Big(\frac{1}{4m+4}+\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots-\frac{1}{2m})\Big)^2$$

$$+\frac{1}{(4m+4)^2}+\frac{\pi^2}{48}-\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\cdots-\frac{1}{(2m)^2})\Big],$$

6)

$$\int_0^1 x^{4m+2}\sqrt{1-x^4}\,(\lg x)^2\,\partial x$$

$$=\frac{3^{m|4}\pi\sqrt{2\pi}}{8.1^{m+2|4}(1^{\frac{1}{2}|1})^2}\Big[\Big(\frac{1}{4m+5}-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots.+\frac{1}{4m+1}\Big)^2$$
$$+\frac{1}{(4m+5)^2}-S'(1,2)^2+1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\ldots.+\frac{1}{(4m+1)^2}\Big],$$

7)

$$\int_0^1 x^{4m+3}\sqrt{1-x^4}\,(\lg x)^2\,\partial x$$

$$=\frac{2^{m|2}}{2.1^{m+2|2}}\Big[\Big(\frac{1}{4m+6}-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots.+\frac{1}{2m+1})\Big)^2$$
$$+\frac{1}{(4m+6)^2}-\frac{\pi^2}{48}+\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots.+\frac{1}{(2m+1)^2})\Big],$$

8)

$$\int_0^1 x^{4m}\sqrt{1-x^4}\,(\lg x)^3\,\partial x$$

$$=-\frac{3.1^{m|4}\pi\sqrt{2\pi}}{32.7^{m|4}(1^{\frac{1}{2}|1})^2}\Big[\Big(\frac{1}{4m+3}+\frac{\pi}{4}-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\ldots.-\frac{1}{4m-1})\Big)^3$$
$$+3\Big(\frac{1}{4m+3}+\frac{\pi}{4}-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\ldots.-\frac{1}{4m-1}\Big)$$
$$\times\Big(\frac{1}{(4m+3)^2}+S'(1,2)^2-(1-\frac{1}{3^2}+\ldots.-\frac{1}{(4m-1)^2})\Big)$$
$$+\frac{2}{(4m+3)^2}+\frac{\pi^3}{16}-2(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots.-\frac{1}{(4m-1)^3})\Big],$$

9)

$$\int_0^1 x^{4m+1}\sqrt{1-x^4}\,(\lg x)^3\,\partial x$$

$$=-\frac{1^{m|2}\pi}{4.2^{m+1|2}}\Big[\Big(\frac{1}{4m+4}+\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots.-\frac{1}{2m})\Big)^3$$
$$+3\Big(\frac{1}{4m+4}+\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots.-\frac{1}{2m}\Big)$$
$$\times\Big(\frac{1}{(4m+4)^2}+\frac{\pi^2}{48}+\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^2}+\ldots.\frac{1}{(2m)^2})\Big)$$
$$+\frac{2}{(4m+4)^3}+\tfrac{1}{4}S'(1,1)^3-\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\ldots.-\frac{1}{(2m)^3})\Big],$$

10)

$$\int_0^1 x^{4m+2}\sqrt{1-x^4}(\lg x)^3\partial x$$

$$= -\frac{3^{m|4}\pi\sqrt{2\pi}}{8.1^{m+2|4}(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{1}{4m+5}-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots.+\frac{1}{4m+1}\Big)^3$$

$$+3\Big(\frac{1}{4m+5}-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1}\Big)$$

$$\times\Big(\frac{1}{(4m+5)^2}-S'(1,2)^2+1-\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(4m+1)^2}\Big)$$

$$+\frac{2}{(4m+5)^3}-\frac{\pi^3}{16}+2(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots.+\frac{1}{(4m+1)^3})\Big],$$

11)

$$\int_0^1 x^{4m+3}\sqrt{1-x^4}(\lg x)^3\partial x$$

$$= -\frac{2^{m|2}}{2.1^{m+2|2}}\Big[\Big(\frac{1}{4m+6}-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots.+\frac{1}{2m+1})\Big)^3$$

$$+3\Big(\frac{1}{4m+6}-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots.+\frac{1}{2m+1}\Big)$$

$$\times\Big(\frac{1}{(4m+6)^2}-\frac{\pi^2}{48}+\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots.+\frac{1}{(2m+1)^2})\Big)$$

$$+\frac{2}{(4m+6)^3}-\tfrac{1}{4}S'(1,1)^3+\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\ldots.+\frac{1}{(2m+1)^3})\Big].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

12)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}(\lg x)^2\,\partial x = \frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\Big[(\tfrac{1}{3}+\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{9}+S'(1,2)^2\Big],$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}(\lg x)^2\partial x = \frac{\pi}{8}[(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\lg 2)^2+\frac{1}{16}+\frac{\pi^2}{48}],$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^4}(\lg x)^2\partial x = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{40(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{6}{5}-\frac{\pi}{4}\Big)^2+\frac{26}{25}-S'(1,2)^2\Big],$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}(\lg x)^2\partial x = \frac{1}{6}[(\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}\lg 2)^2+\frac{5}{18}-\frac{\pi^2}{48}],$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^4}(\lg x)^2\partial x = \frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32.7(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{11}{21}\Big)^2+S'(1,2)^2-\frac{383}{441}\Big],$$

$$\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^4}(\lg x)^2\partial x=\frac{\pi}{32}[(\tfrac{1}{2}\lg 2-\frac{1}{8})^2+\frac{\pi^2}{48}-\frac{11}{64}],$$

$$\int_0^1 x^6\sqrt{1-x^4}(\lg x)^2\partial x=\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{120(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left[\left(\frac{44}{45}-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{1906}{2025}-S'(1,2)^2\right].$$

$$\int_0^1 x^7\sqrt{1-x^4}(\lg x)^2\partial x=\frac{1}{45}\left[\left(\frac{31}{60}-\tfrac{1}{2}\lg 2\right)^2+\frac{811}{3600}-\frac{\pi^2}{48}\right],$$

u. s. w.

13)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^4}(\lg x)^3\partial x$$

$$=-\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32(1^{\frac{3}{4}|1})^2}[(\tfrac{1}{3}+\frac{\pi}{4})^3+3(\tfrac{1}{3}+\frac{\pi}{4})(\tfrac{1}{9}+S'(1,2)^2)+2\left(\frac{1}{27}+\frac{\pi^3}{32}\right)],$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^4}(\lg x)^3\partial x$$

$$=-\frac{\pi}{8}[(\tfrac{1}{4}+\frac{\lg 2}{2})^3+3(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{2}\lg 2)\left(\frac{1}{16}+\frac{\pi^2}{48}\right)+\frac{1}{32}+\tfrac{1}{4}S'(1,1)^3],$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^4}(\lg x)^3\partial x$$

$$=-\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{40(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\left[\left(\frac{6}{5}-\frac{\pi}{4}\right)^3+3\left(\frac{6}{5}-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{26}{25}-S'(1,2)^2\right)+2\left(\frac{126}{125}-\frac{\pi^3}{32}\right)\right],$$

$$\int_0^1 x^3\sqrt{1-x^4}(\lg x)^3\partial x$$

$$=-\frac{1}{6}[(\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}\lg 2)^3+3(\tfrac{2}{3}-\tfrac{1}{2}\lg 2)\left(\frac{5}{18}-\frac{\pi^2}{48}\right)+\frac{7}{27}-\tfrac{1}{4}S'(1,1)^3],$$

$$\int_0^1 x^4\sqrt{1-x^4}(\lg x)^3\partial x$$

$$=-\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32.7(1^{\frac{3}{4}|1})^2}\left[\left(\frac{\pi}{4}-\frac{11}{21}\right)^3+3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{11}{21}\right)(S'(1,2)^2-\frac{383}{441})\right.$$
$$\left.+2\left(\frac{\pi^3}{32}-\frac{8891}{9261}\right)\right],$$

$$\int_0^1 x^5\sqrt{1-x^4}(\lg x)^3\partial x$$

$$=-\frac{\pi}{32}[(\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{8})^3+3(\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{8})\left(\frac{\pi^2}{48}-\frac{11}{64}\right)+\tfrac{1}{4}S'(1,1)^3-\frac{55}{256}],$$

u. s. w.

§. 65.

Auf gleiche Weise verfährt man, wenn $r > q$ ist. Es entstehen dann irrationale Ausdrücke mit negativen Exponenten. Setzt man zu dem Ende in Nr. 3) §. 62. $r=2$, $q=1$, so wird:

1)

$$Y=\int_0^1 \frac{x^{2m+p-1}(x-1)}{x^2-1}=\int_0^1 \frac{x^{2m+p-1}\partial x}{1+x},$$

2)

$$\frac{\partial Y}{\partial 2m}=\int_0^1 \frac{x^{2m+p-1}}{1+x}\lg x\partial x,$$

3)

$$\frac{\partial^2 Y}{(\partial 2m)^2}=\int_0^1 \frac{x^{2m+p-1}(\lg x)^2\partial x}{1+x}.$$

Wird $p=1, 2$ gesetzt und werden die Werthe für die Integrale $\int_0^1 \frac{x^{2m}\partial x}{1+x}\partial x$ und $\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\partial x}{1+x}$ aus §. 2. Nr. 9) und 10) in Nr. 1) und die der Integrale $\int_0^1 \frac{x^{2m}\lg x\partial x}{1+x}$, $\int_0^1 \frac{x^{2m+1}\lg x\partial x}{1+x}$ und $\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^2\partial x}{1+x}$, $\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^2\partial x}{1+x}$ aus §. 33. u. ff. in Nr. 2) und Nr. 3) eingeführt, so ergeben sich hieraus mit Benutzung der Integralformen in Nr. 4) §. 62. folgende Integrale:

4)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{1^{m|2}.\pi}{2.2^{m|2}}[(\lg 2-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2m})^2+\frac{\pi^2}{12}-(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\ldots-\frac{1}{(2m)^2})],$$

5)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{2^{m|2}}{1^{m+1|2}}[(-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1})^2-\frac{\pi^2}{12}+1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)^2}],$$

6)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1^{m|2}.\pi}{2.2^{m|2}}\Big[(\lg 2-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\ldots.-\frac{1}{2m})^3$$

$$+3(\lg 2-(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots.-\frac{1}{2m})\Big(\frac{\pi^2}{12}-(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots.-\frac{1}{(2m)^2})\Big)$$

$$+2(S'(1,1)^3-(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\ldots.-\frac{1}{(2m)^3}))\Big],$$

7)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}(\lg x)^3\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2^{m|2}}{1^{m+1|2}}\Big[(-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\ldots.+\frac{1}{2m+1})^3$$

$$+3(-\lg 2+1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1})(-\frac{\pi^2}{12}+1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)^2})$$

$$+2(-S'(1,1)^3+1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\ldots.+\frac{1}{(2m+1)^3})\Big].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

8)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\Big[(\lg 2)^2+\frac{\pi^2}{12}\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = (1-\lg 2)^2+1-\frac{\pi^2}{12},$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\Big[(\lg 2-\frac{1}{2})^2+\frac{\pi^2}{12}-\frac{3}{4}\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \tfrac{2}{3}\Big[(\frac{5}{6}-\lg 2)^2-\frac{\pi^2}{12}+\frac{31}{36}\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3\pi}{16}\Big[(\lg 2-\frac{7}{12})^2+\frac{\pi^2}{12}-\frac{115}{144}\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{8}{15}\Big[\Big(\frac{47}{60}-\lg 2\Big)^2-\frac{\pi^2}{12}+\frac{3019}{3600}\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{5\pi}{32}\Big[(\lg 2-\frac{37}{60})^2+\frac{\pi^2}{12}-\frac{973}{1200}\Big],$$

u. s. w.

9)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2}\Big[(\lg 2)^3+\frac{\pi^2\lg 2}{4}+2S'(1,1)^3\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^3 \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -[(1-\lg 2)^3 + 3(1-\lg 2)(1-\frac{\pi^2}{12}) + 2(-S'(1,1)^3+1)],$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^3 \partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{\pi}{4}[(\lg 2-\frac{1}{2})^3 + 3(\lg 2-\frac{1}{2})\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{3}{4}\right) + 2(S'(1,1)^3-\frac{7}{8})],$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^3 \partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\tfrac{2}{3}[(\frac{5}{6}-\lg 2)^3 + 3(\frac{5}{6}-\lg 2)\left(\frac{31}{36}-\frac{\pi^2}{12}\right) + 2(-S'(1,1)^3+\frac{197}{216})],$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^3 \partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{3\pi}{16}[(\lg 2-\frac{7}{12})^3 + 3(\lg 2-\frac{7}{12})\left(\frac{\pi^2}{12}-\frac{115}{144}\right) + 2(S'(1,1)^3-\frac{1549}{1728})],$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^3 \partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{8}{15}\Big[\left(\frac{47}{60}-\lg 2\right)^3 + 3\left(\frac{47}{60}-\lg 2\right)\left(\frac{3019}{3600}-\frac{\pi^2}{12}\right)$$

$$+ 2(S'(1,1)^3-\frac{195353}{216000})\Big],$$

u. s. w.

Von diesen Integralen hat Legendre das erste in Nr. 8) und 9) (Traité d. fonct. ellipt. II. p. 393.) angegeben.

Dieselben Resultate kann man auch nach der in §. 62. angebenen Methode finden. Setzt man in der zweiten Form von Nr. 6) §. 62. $r=2$, $q=1$, $p=1$, so erhält man:

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}(\lg x)^2 \partial x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1^{m|2}.\pi}{2.2^{m|2}}[S(2m+1,2)^1 - S(2m+2,2)^1)^2$$

$$+ S(2m+1,2)^2 - S(2m+2,2)^2].$$

Bemerkt man, dass

$$S(2m+1,2)^1 - S(2m+2,2)^1 = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} + \frac{1}{2m+3} - \frac{1}{2m+4} + ..$$

$$= \lg 2 - (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{2m}),$$

$$S(2m+1,2)^2 - S(2m+2,2)^2$$

$$= \frac{1}{(2m+1)^2} - \frac{1}{(2m+2)^2} + \frac{1}{(2m+3)^2} - \frac{1}{(2m+4)^2} + \dots$$

$$= S'(1,1)^2 - \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \dots - \frac{1}{(2m)^2}\right)$$

ist, so entsteht durch Einführung dieser Werthe in Nr. 10) die in Nr. 4) gefundene Darstellung. Auf die gleiche Weise kann man auch die Darstellung Nr. 5) u. s. w. finden.

Bei Benutzung der Darstellungen in Nr. 6) §. 62. erhält man durch den Ausdruck Y die Glieder der harmonischen Reihe nach bestimmtem Gesetze geordnet. Da sie sehr langsam convergiren, so ist dieser Ausdruck nicht gut benutzbar. Man kann deswegen die beiden in §. 62. und §. 63. angegebenen Methoden in so weit miteinander verbinden, dass man den Werth von Y nach der zweiten Methode bestimmt, wozu der erste Abschnitt die Mittel bietet, und die übrigen Glieder der Formen in Nr. 6) §. 62. durch Reihen darstellen, zu deren Werthbestimmung im zweiten Abschnitte ausführlich die Wege angegeben wurden. Auf diese Art wird man oft eben so rasch als bequem zum Ziele gelangen. Soll hiernach das Integral $\int_0^1 \frac{x^{3m+p-1}(\lg x)^2 \partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$ bestimmt werden, so hat man $r=3$, $q=1$ zu setzen und man erhält aus der zweiten Form von §. 62. Nr. 6):

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+p-1}(\lg x)^2 \partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}} = \frac{(3+p)^{m|3} . 1^{\frac{p}{3}|1} . 1^{-\frac{2}{3}|1}}{(3m+p)(1+p)^{m|3} . 1^{\frac{p-2}{3}|1}}$$

$$\times [(S(3m+p,3)^1 - S(3m+p+1,3)^1)^2$$

$$+ S(3m+p,3)^2 - S(3m+p+1,3)^2].$$

Hierin ist:

$$Y = S(3m+p,3)^1 - S(3m+p+1,3)^1$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{3m+p-1}(x-1)\partial x}{x^3-1} = \int_0^1 \frac{x^{3m+p-1}\partial x}{1+x+x^2}.$$

Wird nun $p=1, 2, 3$ gesetzt und werden die Werthe der hiedurch entstehenden Integrale

$$\int_0^1 \frac{x^{3m}\partial x}{1+x+x^2}, \int_0^1 \frac{x^{3m+1}\partial x}{1+x+x^2}, \int_0^1 \frac{x^{3m+2}\partial x}{1+x+x^2}$$

aus §. 16. Nr. 4) in obige Gleichung eingeführt, so erhält man folgende drei Integralformen:

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m}(\lg x)^2\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{4.1^{m|3}.\pi^2}{9.2^{m|3}(1^{-\frac{1}{3}|1})^2}\Big[\Big(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{3m-1}-(1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}\ldots\frac{1}{3m-2})\Big)^2$$

$$+S(3m+1,\,3)^2-S(3m+2,\,3)^2\Big],$$

12)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+1}(\lg x)^2\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{2.2^{m|3}.\pi}{3.3^{m|3}.\sqrt{3}}[(\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\frac{1}{m})-(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{5}+\ldots\frac{1}{3m-1}))^2$$

$$+S(3m+2,\,3)^2-\tfrac{1}{9}S(m+1,\,1)^2],$$

13)

$$\int_0^1 \frac{x^{3m+2}(\lg x)^2\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{3^{m|3}}{1^{m+1|3}}[(-\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+1+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{7}+\ldots\frac{1}{3m+1}-\tfrac{1}{3}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{m}))^2$$

$$+\tfrac{1}{9}S(m+1,\,1)^2-S(3m+4,\,3)^2].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale für $m=0,1,2,\ldots$ ab:

14)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{4\pi^2}{9(1^{-\frac{1}{3}|1})^3}\Big[\frac{\pi^2}{27}+S(1,3)^2-S(2,3)^2\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}[(\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}})^2+S(2,3)^2-\frac{\pi^2}{54}],$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}=(-\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}})^2+\frac{\pi^2}{54}-S(1,3)+1,$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2\pi^2}{9(1^{-\frac{1}{3}|1})^3}\Big[\Big(\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-\tfrac{1}{2}\Big)^2+S(1,3)^2-S(2,3)^2-\frac{3}{4}\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}[(\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}-\tfrac{1}{6})^2+S(2,3)^2-\frac{\pi^2}{54}-\frac{5}{36}],$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2\partial x}{(1-x^3)^{\frac{2}{3}}}=\tfrac{3}{4}[(-\tfrac{1}{2}\lg 3-\frac{\pi}{6\sqrt{3}}+\frac{11}{12})^2+\frac{\pi^2}{54}-S(1,3)^2+\frac{41}{36}],$$

u. s. w.

Es zeigt sich hieraus, dass die Verbindung beider Methoden vor der ausschliesslichen Befolgung der einen oder der andern Vortheil bietet.

§. 66.

Setzt man $r=4$, $q=2$ in Nr. 3) §. 62., so entsteht:

1)
$$Y=\int_0^1 \frac{x^{4m+p-1}(x^2-1)\partial x}{x^4-1}=\int_0^1 \frac{x^{4m+p-1}\partial x}{1+x^2},$$

2)
$$\frac{\partial Y}{\partial 4m}=\int_0^1 \frac{x^{4m+p-1}\lg x\partial x}{1+x^2},$$

3)
$$\frac{\partial^2 Y}{(\partial 4m)^2}=\int_0^1 \frac{x^{4m+p-1}(\lg x)^2\partial x}{1+x^2}.$$

Wird $p=1, 2, 3, 4$ gesetzt und werden die entsprechenden Werthe aus §. 9. Nr. 6) in Nr. 1) und die aus §. 39. Nr. 2)—5) in Nr. 2) und 3) eingeführt und dann nach §. 62. Nr. 4) verfahren, so erhält man folgende Integralformen:

4)
$$\int_0^1 \frac{x^{4m}(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{4.3^{m|4}(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{\pi}{4}-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\dots-\frac{1}{4m-1})\Big)^2 + S(1,2)^2-(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\dots-\frac{1}{(4m-1)^2})\Big],$$

5)
$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1^{m|2}.\pi}{4.2^{m|2}}[(\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\dots-\frac{1}{2m}))^2 +\frac{\pi^2}{48}-\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\dots-\frac{1}{(2m)^2})],$$

6)
$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{3^{m|4}.\pi.\sqrt{2\pi}}{16.1^{m+1|4}(1^{\frac{1}{4}|1})^2}[(-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\dots+\frac{1}{4m+1})^2 - S'(1,2)^2+1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\dots+\frac{1}{(4m+1)^2}],$$

7)
$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{2^{m|2}}{2.1^{m+1|2}}[(-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\dots+\frac{1}{2m+1}))^2 -\frac{\pi^2}{48}+\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{(2m+1)^2})],$$

8)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m}(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1^{m|4}.\pi.\sqrt{2\pi}}{4.3^{m|4}(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{\pi}{4}-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{4m-1})\Big)^3$$

$$+3\Big(\frac{\pi}{4}-(1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots-\frac{1}{4m-1})\Big)(S'(1,2)^2-(1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\ldots-\frac{1}{(4m-1)^2}))$$

$$+2\Big(\frac{\pi^3}{32}-(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots-\frac{1}{(4m-1)^3})\Big)\Big],$$

9)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+1}(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1^{m|2}.\pi}{4.2^{m|2}}[(\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2m}))^3$$

$$+3(\tfrac{1}{2}\lg 2-\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\ldots-\frac{1}{2m}))\Big(\frac{\pi^2}{48}-\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots-\frac{1}{(2m)^2})\Big)$$

$$+\tfrac{1}{4}S'(1,1)^3-\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\ldots-\frac{1}{(2m)^3})],$$

10)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+2}(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{3^{m|4}.\pi\sqrt{2\pi}}{16.1^{m+1|4}(1^{\frac{1}{4}|1})^2}[(-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\ldots+\frac{1}{4m+1})^3$$

$$+3(-\frac{\pi}{4}+1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}\ldots+\frac{1}{4m+1})(-S(1,2)^2+1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\ldots+\frac{1}{(4m+1)^2})$$

$$+2(-\frac{\pi^3}{32}+1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\ldots+\frac{1}{(4m+1)^3})],$$

11)

$$\int_0^1 \frac{x^{4m+3}(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{2^{m|2}}{2.1^{m+1|2}}[(-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1}))^3$$

$$+3(-\tfrac{1}{2}\lg 2+\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{2m+1}))(-\frac{\pi^2}{48}+\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)^2}))$$

$$-\tfrac{1}{4}S'(1,1)^3+\tfrac{1}{4}(1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\ldots+\frac{1}{(2m+1)^3})].$$

Hieraus leiten sich folgende Integrale ab:

12)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{4(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\frac{\pi^2}{16}+S'(1,2)^2\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{16}[(\lg 2)^2+\frac{\pi^2}{12}],$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{16(1^{\frac{1}{4}|1})^2}[(1-\frac{\pi}{4})^2+1-S'(1,2)^2],$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \tfrac{1}{8}[(1-\lg 2)+1-\frac{\pi^2}{12}],$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{12\,(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\Big)^2 + S'(1,2)^2-\frac{8}{9}\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{32}[(\lg 2-\tfrac{1}{2})^2+\frac{\pi^2}{12}-\frac{3}{4}],$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{80\,(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}\Big)^2+\frac{209}{225}-S'(1,2)^2\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^2\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{12}\Big[\Big(\frac{5}{6}-\lg 2\Big)^2+\frac{31}{36}-\frac{\pi^2}{12}\Big],$$

u. s. w.

13)

$$\int_0^1 \frac{(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{4\,(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\frac{\pi^3}{64}+\frac{3\pi.\,S'(1,2)^2}{4}+\frac{\pi^3}{16}\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi}{32}[(\lg 2)^3+\frac{3\pi^2\lg 2}{12}+2S'(1,1)^3],$$

$$\int_0^1 \frac{x^2(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{16\,(1^{\frac{1}{4}|1})^2}[(1-\frac{\pi}{4})^3+3(1-\frac{\pi}{4})(1-S(1,2)^2)$$
$$+2(-\frac{\pi^3}{32}+1)],$$

$$\int_0^1 \frac{x^3(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{16}[(1-\lg 2)^3+3(1-\lg 2)(1-\frac{\pi^2}{12})+2(1-S'(1,1)^3)],$$

$$\int_0^1 \frac{x^4(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi\sqrt{2\pi}}{12(1^{-\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\Big)^3+3\Big(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\Big)(S'(1,2)^2-\frac{8}{9})$$
$$+\frac{\pi^3}{16}-\frac{52}{27}],$$

$$\int_0^1 \frac{x^5(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{\pi}{64}[(\lg 2-\tfrac{1}{2})^3+3(\lg 2-\tfrac{1}{2})\Big(\frac{\pi^2}{12}-\frac{3}{4}\Big)+2(S'(1,1)^3-\frac{7}{8})],$$

$$\int_0^1 \frac{x^6(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{80\,(1^{\frac{1}{4}|1})^2}\Big[\Big(\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}\Big)^3$$
$$+3\Big(\frac{13}{15}-\frac{\pi}{4}\Big)\frac{209}{225}-S'(1,2)^2\Big)+2\Big(\frac{3277}{3375}-\frac{\pi^3}{32}\Big)\Big],$$

$$\int_0^1 \frac{x^7(\lg x)^3\partial x}{\sqrt{1-x^4}} = -\frac{1}{24}\Big[\Big(\frac{5}{6}-\lg 2\Big)^3+3\Big(\frac{5}{6}-\lg 2\Big)\Big(\frac{31}{36}-\frac{\pi^2}{12}\Big)$$
$$+2\Big(\frac{197}{216}-S'(1,1)^3\Big)\Big],$$

u. s. w.

Man kann die Darstellung der hierher gehörigen Integrale leicht weiter fortführen. Dies macht um so weniger Mühe, da die Vorbedingungen hierzu im Vorhergehenden vollständig gegeben sind.

(Fortsetzung und Schluss folgen im nächsten Theile.)

XXXI.

Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Wichtige historische Mittheilung.

Herr Dr. Lindman in Strengnäs in Schweden hat mir vor Kurzem die folgende sehr interessante Mittheilung gemacht:

„Cel^us^. Hill abhinc duobus annis in conspectu act. Academiae in memoriam redegit dissertationem academicam, quam E. S. Bring, Historiarum quondam Professor Lundensis, anno 1786 edidit inscriptam: „Meletemata de transformatione aequationum algebraicarum." Ex iis, quae addidit Cel^us^. Hill, elucet, Professorem Bring aequationem V^i^ gradus in formam

$$y^5 + Gy + H = 0$$

redegisse, etiamsi non demonstravit, ulteriorem reductionem fieri non posse."

Dies ist also ganz die Jerrard'sche Transformation *), und diese wichtige Erfindung daher schon im vorigen Jahrhunderte in Schweden gemacht, indem an der Richtigkeit der Mittheilung des Herrn Professor Hill, dem die Theorie der Gleichungen selbst so Vieles verdankt, nicht gezweifelt werden kann. Weitere Mittheilungen über diesen historisch wichtigen Gegenstand sind jedenfalls sehr zu wünschen. Nach meiner Meinung kann es in historischer Rücksicht zunächst nicht darauf ankommen, wie weit Bring seine Erfindung ausgebildet hat; unter allen Umständen gebührt ihm die Priorität des Grundgedankens, und es wird daher nur Gerechtigkeit geübt, wenn man die Reduction der Gleichungen des fünften Grades auf die obige Form von jetzt an:

---

*) M. s. den Aufsatz Nr. XIV. in diesem Bande S. 230.

„Die Bring'sche Transformation der Gleichungen des fünften Grades"

nennt, wie ich von jetzt an in diesem Archiv thun werde.

Dass Jerrard den Gegenstand wohl verallgemeinert hat, wird natürlich stets und zu allen Zeiten gleichfalls besonders anzuerkennen und hervorzuheben und in den Annalen der Wissenschaft zu verzeichnen sein; belegt man aber einen mathematischen Satz oder eine mathematische Methode mit dem Namen eines Erfinders, so soll dies nach meiner Meinung immer der erste sein, der, welcher den Grundgedanken zuerst hatte; denn mathematische Sätze sind bekanntlich in vielen Fällen wiederholt erfunden und dann weiter ausgebildet worden, wie dies auch jetzt noch oft genug vorkommt.

Herrn Dr. Lindman sage ich schliesslich noch meinen ganz besonderen verbindlichsten Dank für die obige interessante Mittheilung, und denke bald auf diesen wichtigen Gegenstand zurückzukommen, um Erland Samuel Bring's Verdienst in richtiges und vollständiges Licht zu stellen. Grunert.

Von Herrn G. Hausmann, Assistenten der Gewerbschule in Erlangen.

Lehrsatz.

Verzeichnet man über der Sehne AB (Taf. III. Fig. 6. und Fig. 7.) als Grundlinie ein Dreieck, welches seine Spitze D in einem beliebigen Punkte der Peripherie hat, bezeichnet ferner den Durchschnittspunkt der Höhen des Dreiecks mit O, zieht vom Centrum C aus die Gerade CG senkrecht zu AB und macht endlich $GM=GC$, so lässt sich behaupten, dass:

1) $DO=CM$, 2) $MO=$ Radius CD ist *).

Beweis.

Man ziehe als Hilfslinien den Durchmesser AV und die Geraden BV, DV und BX, so verhält sich:

$$BV:GC=AV:AC$$
$$=2:1,$$

woraus $BV=2GC=CM$.

Es sind ferner die Peripheriewinkel auf Bogen DB einander gleich, nämlich:

*) M. s. Archiv. Thl. XXXIX. S. 352.

$\angle DXB = \angle DAB = a$, folglich $\angle ADE = 90^0 - a$, $\angle EOB = a$; daher ist $\Delta\ OBX$ gleichschenklig, d. h.:

$$XB = OB.$$

Weil aber $XD \parallel VB$, so ist Bogen $XB =$ Bogen VD und

Sehne $XB =$ Sehne VD, somit auch $OB = VD$;

daher Viereck $DVBO$ ein Parallelogramm und

$$1)\ DO = BV = CM.$$

Weil nun $DO =$ und $\parallel CM$, so ist auch $CDOM$ ein Parallelogramm und endlich:

$$2)\ MO = CD.$$

Ueber Leonhard Euler.

Aus der Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres Géomètres du XVIIIème siècle par P. H. Fuss, mitgetheilt vom Herausgeber.

„Il parait qu'avant l'arrivée de mon père, qui eut lieu en mai 1773, Euler s'était laissé aider tantôt par l'un, tantôt par l'autre des nombreux élèves qu'il comptait parmi ses collègues. Dans un grand in-folio que je conserve soigneusement et qui renferme les premières ébauches des mémoires d'Euler, antérieurs à l'époque mentionnée, je crois reconnaitre surtout la main de Krafft, ainsi que celles de J. A. Euler et de Lexell; mais je m'aperçois aussi que souvent ils se sont contentés d'ébaucher simplement les mémoires, sans se donner ensuite la peine de les rédiger finalement, ce qui fait que ce volume, ainsi que trois autres qui le suivent, et que je possède également, sont écrits de la main de mon père. Euler avait dans son cabinet une grande table qui occupait tout le milieu de la pièce et dont le dessus était recouvert d'ardoise. C'est sur cette table qu'il écrivait, ou plutôt indiquait ses calculs en gros caractères, tracés avec de la craie *). Chaque matin, son élève se présentait chez lui pour lui

---

*) Quand il voulait prendre de l'exercice, ce qui arrivait à des heures régulières du jour, il avait l'habitude de se promener autour de cette table, en glissant la main le long des bords, pour se guider. Ces bords, par le fréquent usage, étaient lisses et luisants comme du bois poli.

faire lecture soit de sa vaste correspondance (dont la conduite lui était entièrement confiée), soit des feuilles politiques, soit enfin de quelque nouvel ouvrage digne d'attention; on s'entretenait de diverses matières de la science, et le maitre, à cette occasion, se prêtait avec complaisance à lever les doutes et à résoudre les difficultés que l'élève avait rencontrées dans ses études. Quand la table était couverte de calculs, ce qui arrivait souvent, le maitre confiait au disciple ses conceptions toutes fraiches et récentes, et lui exposait la marche de ses idées et le plan général de la rédaction, en lui abandonnant le soin du développement des calculs, du choix des exemples et de l'execution des détails; et ordinairement celui-ci lui apportait dès le lendemain le croquis du mémoire inscrit dans le grand livre dont nous avons parlé ci-dessus (Adversaria mathematica). Ce croquis approuvé, la pièce était rédigée au net et présentée immédiatement à l'Académie. La force de la mémoire que le vieillard avait conservée, et que peut-être la privation de la vue avait encore aiguisée, l'aidait admirablement dans ces sortes d'entretiens, ainsi que dans la lecture des ouvrages de son célèbre émule, Lagrange *), et bien des fois, pour faire de tête les calculs les plus compliqués, il lui fallait moins de temps qu'à un autre la touche à la main; et encore se trompait-il que fort rarement."

(M. vergl. über Euler Thl. XIX. S. 239.)

*) Euler ne vit du reste pas les grands ouvrages de cet illustre géomètre. La Mécanique analytique, les Leçons sur le calcul des fonctions et le Traité de la résolution des équations numériques, parurent après sa mort.

Berichtigung. In der Hauptgleichung Nr. 4) §. 46. S. 356., unterste Zeile, muss es heissen:

$$1^{\frac{p+q-r}{r}} \text{ statt } 1^{\frac{r+q-r}{r}}\,|\,1.$$

Auf S. 445. Z. 2 v. u. ist statt $(c, d)^2$ und $(a, b)^2$ zu setzen (c, d) und (a, b). — Auf derselb. Seite Z. 3. v. u. statt $\cos{}^2A$ zu setzen $\cos A^2$.

Literarischer Bericht
CLVII.

Antonio Bordoni.

(Von dem Herausgeber.)

Bei dem grossen Aufschwunge, welchen gegenwärtig die mathematischen Wissenschaften in Italien genommen haben und immer mehr nehmen, scheint es geboten zu sein, in etwas grösserer Ausführlichkeit*) an einen Mann zu erinnern, der zwar seit drei Jahren nicht mehr unter den Lebenden weilt, dessen langjähriges höchst verdienstliches Wirken aber gewiss wesentlich dazu beigetragen hat, eine Grundlage zu schaffen für den so schönen Auf- und Ausbau unserer Wissenschaft, wie er in erfreulichster Weise uns jetzt in Italien vor die Augen tritt. Ich meine Antonio Bordoni, der in seinem Vaterlande allgemein, und auch im Auslande bei den eigentlichen Kennern des Fachs hochberühmt und hochgeachtet, aber namentlich in Deutschland doch noch nicht so allgemein bekannt ist, wie er jedenfalls zu sein verdient, wodurch ich zu den folgenden Mittheilungen veranlasst worden bin. Wenn ich auch über die äusseren Lebensumstände des berühmten Mannes nur die, übrigens recht verdienstlichen, Notizen im Folgenden zu geben im Stande bin, welche in dem Almanach der k. Akademie der Wissenschaften in Wien. Zehnter Jahrgang 1860. S. 163. sich finden; so bin ich auf der anderen Seite in die glückliche Lage versetzt worden, den Lesern des Archivs ein ganz vollständiges Verzeichniss aller Schriften Bordoni's, welches vor Kurzem von dem berühmten Francesco Brioschi, Prof. Ord. di Analisi superiore in der Facoltà di scienze fisiche, matematiche e natu-

*) Eine vorläufige ganz kurze Notiz von Bordoni's Tode s. m. im Literar. Ber. Nr. CXXXVII. S. 1.

rali in Pavia*) in sehr verdienstlicher Weise zusammengestellt worden ist**), weiter unten vorlegen zu können.

Antonio Bordoni ist geboren in Pavia am 20. Juli 1789, und begann seine Laufbahn im Staatsdienste im August 1807 — also schon nach vollendetem 18ten Lebensjahre — als Professor der Mathematik an der Militärschule in Pavia. Nach der im Jahre 1816 erfolgten Auflösung dieser Lehranstalt übernahm er die Supplirung der Lehrkanzel der höheren Mathematik, der Geodäsie und Hydrometrie an der dortigen Universität und wurde am 1. November 1817 zum ordentlichen Professor der reinen Mathematik an derselben Hochschule ernannt. In dieser Stellung wirkte er 24 Jahre lang auf höchst erspriessliche Weise und supplirte zugleich während dieser langen Reihe von Jahren die Lehrkanzel der höheren Mathematik, der Geodäsie und Hydrometrie mit Auszeichnung und ungetheiltem Beifalle, und hatte sich bereits zu jener Zeit theils durch seine Vorträge, theils durch seine Schrif-

---

*) An welcher, beiläufig gesagt, **sieben** ordentliche Professoren der Mathematik angestellt sind, nämlich: Gaspare Mainardi, Prof. Ord. di Calcolo differenziale e integrale; Giovanni Codazza, Prof. Ord. di Geometria descrittiva; Alberto Gabba, Prof. Ord. di Geometria superiore; Francesco Cattaneo, Prof. Ord. di Meccanica razionale; Franzesco Brioschi, Prof. Ord. di Analisi superiore; Luigi Contratti, Prof. Ord. di Geodesia teoretica; Felice Casorati, Prof. Ord. di Introduzione al Calcolo sublime; und ausserdem liest im Anno scolastico 1861—62 il Docente privato Dott. Bernardino Speluzzi (soviel ich weiss jetzt auch Professor) einen Corso di Calcolo differenziale e integrale. Prof. Ord. di Fisica sperimentale ist Giovanni Cantoni. — Eine **eben so grosse** Anzahl von Professoren der Mathematik ist an der Universität zu Bologna angestellt, nämlich: Sante Ramenghi, Prof. d'Introduzione al Calcolo; Domenico Chelini, Prof. di Meccanica Razionale; Lorenzo Respighi, Prof. di Astronomia; Antonio Saporetti, Prof. di Calcolo Sublime; Luigi Cremona, Prof. di Geometria Superiore, ed Incaricato dell' insegnamento della Geometria Descrittiva; Matteo Fiorini, Prof. di Geodesia; Quirico Filopanti, Prof. di Meccanica Applicata; Professoren der Physik sind: Lorenzo Della Casa und Giulio Carini; endlich ist Cav. Fortunato Lodi Prof. di Architettura. Viele bekannte und berühmte Namen. — Mögen diese Mittheilungen über die grossartige Ausstattung des mathematischen Faches an zwei berühmten italienischen Universitäten dazu beitragen, viele ganz falsche Ansichten, die sich bei uns in Deutschland zuweilen über das italienische Lehrwesen noch geltend zu machen suchen, gebührend zurückzuweisen und zu berichtigen!

**) Um, wie Brioschi selbst sagt, „soddisfare ad un desiderio espressoci in varie occasioni da molti cultori delle scienze matematiche."

ten einen europäischen Ruf erworben, so dass er unbestritten zu den gelehrtesten und ausgezeichnetsten Mathematikern seiner Zeit gehörte. Am 29. Mai 1841 wurde er seinem Wunsche gemäss mit der Lehrkanzel der Geodäsie und Hydrometrie, die er so lange und mit solcher Auszeichnung supplirt hatte, als wirklicher Professor betraut, und durch Allerhöchste Entschliessung vom 27. August 1844 in seinem 55sten Lebensjahre zum provisorischen Director der mathematischen Facultät von Pavia ernannt. Nach 44jähriger Dienstleistung im 63sten Lebensjahre ward er unter dem 10. April 1852, unter Bestätigung in dem Ehrenamte eines Directors der mathematischen Facultät, seiner Obliegenheit als Professor der Geodäsie und Hydrometrie enthoben, um sich ganz der Direction der mathematischen Studien zu widmen. Im höchsten Grade ausgezeichnet durch Reinheit und Festigkeit des Charakters und, wie alle, die das Glück hatten, ihn zu kennen, bezeugen, durch die grösste Bescheidenheit, starb er am 26. März 1860 im 71sten Lebensjahre. Er war Ritter des Ordens der eisernen Krone und Commandeur des Franz-Joseph-Ordens, Mitglied vieler gelehrter Gesellschaften, indem er sich namentlich auch unter den 40 Akademikern befand, welche bei Gründung der Akademie der Wissenschaften in Wien am 14. Mai 1847 vom Kaiser Ferdinand zu ersten Mitgliedern dieser gelehrten Körperschaft ernannt wurden. In der letzten Zeit seines Lebens ward ihm noch die glänzende Auszeichnung zu Theil, dass ihn des Königs Victor Emanuel von Italien Majestät zum Senator des Reichs ernannte.

Bevor ich diesen Notizen das oben erwähnte von Herrn Brioschi zusammengestellte sehr verdienstliche Verzeichniss aller Schriften Bordoni's folgen lasse, erlaube ich mir Folgendes zu bemerken:

Von den vier grösseren Werken Bordoni's:

1. Trattato dei contorne delle ombre ordinarie. 1816.

2. Trattato di Geodesia elementare. 1822. 1843. 1859. mit mehreren Nachträgen, die man in dem unten folgenden Verzeichnisse angegeben findet.

3. Lezioni di calcolo sublime. Tomo I. II. 1831.

4. Sopra gli esami scolastici. 1837.

sind mir die drei letzten genau bekannt, wogegen ich das erste leider noch nicht kenne.

Was den Trattato di Geodesia elementare betrifft, so müssen die Leser in diesem schönen und höchst interessanten Buche ja nicht eine gewöhnliche praktische Anleitung zur Feldmesskunst suchen, indem dessen Tendenz eine viel höhere ist. Denn dieses Buch enthält eine ungemein reiche Sammlung höchst interessanter rein geometrischer Sätze, die in der sogenannten neueren Geometrie sämmtlich einen sehr ehrenvollen Platz einnehmen würden und ganz dem in derselben waltenden Geiste entsprechen. Freilich können alle diese Sätze höchst wichtige und leichte Anwendungen in der elementaren Feldmesskunst finden mittelst blosser Alignements, wozu denn auch keine anderen Instrumente als, ausser den gewöhnlichen Baken oder Absteckstäben, höchstens noch die Kette und das Winkelkreuz erforderlich sind; aber die Bedeutung dieser Sätze ist eine viel höhere und eine rein theoretische. Daher zeigt dieses interessante Werk auf die deutlichste Weise, wie wichtig die reine Wissenschaft auch für die gewöhnlichste Praxis ist, und wie schöne Anwendungen sich oft von an sich ganz rein theoretischen Sätzen machen lassen, was man auf den ersten Anblick häufig gar nicht ahnen sollte. Die von Bordoni gewählte Darstellung ist auch durchaus eine rein geometrische, nicht analytische, wodurch das Werk sich wesentlich von der, eine ähnliche Tendenz verfolgenden verdienstlichen Schrift von Servois: „Solutions peu connues de différens problèmes de Géométrie pratique, pour servir de supplément aux Traités connus de cette science. A Metz. An XII." unterscheidet, worin mehr die analytische Darstellung festgehalten ist, und das auch schon dem äusseren Umfange nach, namentlich aber an Reichthum schöner geometrischer Sätze, das Werk von Bordoni nicht im Entferntesten erreicht. Sehr verdienstlich sind in ähnlicher Richtung auch die „Problemi per gli Agrimensori con varie soluzioni" von dem berühmten Mascheroni (Pavia. 1793), und eine deutsche Schrift von Professor Pross in Stuttgart; aber keine dieser Schriften erreicht an Umfang, Reichthum, Neuheit und Interesse der Sätze in rein geometrischer Beziehung das treffliche Werk von Bordoni. Ich benutze daher diese mir sehr erwünschte Gelegenheit, auf dieses in jeder Beziehung ausgezeichnete Werk aufmerksam zu machen, namentlich auch alle Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten, welche die Hauptsätze der sogenannten neueren Geometrie in den Kreis ihres Unterrichts aufnehmen, und, wie es namentlich auch auf den höheren Realschulen Pflicht und bei uns in Preussen Vorschrift ist, der Anwendung der reinen Geometrie die gebührende Berücksichtigung zu Theil werden lassen. In keinem Werke werden sie mehr zweckentsprechenden Stoff finden als in dem genannten, von

dem daher eine Verpflanzung auf deutschen Boden durch eine Uebersetzung sehr zu wünschen wäre. Die Werke von Mascheroni (man denke nur auch an dessen „Gebrauch des Zirkels, übersetzt von Gruson. Berlin. 1825.) und namentlich von Bordoni zeigen deutlich, wie man auch in der angedeuteten Beziehung — nämlich die schönste und reinste Theorie so bald als möglich zu fruchtbarer Anwendung zu verwerthen, — in Italien bei'm mathematischen Unterrichte vorgeschritten ist. Möge dem Werke von Bordoni hiedurch auch bei uns in Deutschland die so sehr verdiente Anerkennung zu Theil werden!

Die Lezioni di calcolo sublime. Milano. 1831. (Zwei starke Bände) sind zwar noch ganz im Geiste der derivirten Functionen gearbeitet, aber von diesem Standpunkte aus jedenfalls ein wahres Muster grösster Klarheit, Präcision, Consequenz und logischer Ordnung und Schärfe, mit ausgedehnten Anwendungen auf die Geometrie, auf die Maxima und Minima u. s. w. Besondere Beachtung verdienen auch die Partieen, welche die Integration der Differentialgleichungen betreffen, ferner die sehr klare Darstellung der Variationsrechnung von dem Standpunkte der damaligen Zeit, die ausführliche Bearbeitung der Rechnung mit endlichen Differenzen und Summen, die Integration der Differenzengleichungen u. s. w., so dass dieses Werk jedenfalls auch gegenwärtig noch die sorgfältigste Beachtung verdient.

Die Schrift: Sopra gli esami scolastici, in Deutschland bis jetzt wohl fast ganz unbekannt, ist von sehr grossem Interesse und, streng genommen, ein wirkliches Werk über Wahrscheinlichkeitsrechnung, angewandt auf den auf dem Titel genannten Gegenstand — nämlich das Prüfungswesen —, in welchem der Verfasser zugleich eine grosse Geschicklichkeit in der Anwendung der Differenzen- und Summenrechnung (directe und inverse Differenzenrechnung) an den Tag legt. Die Vorrede schliesst mit den Worten: „Collo studio di queste medesime ricerche i giovani esaminandi, non solo si abiliteranno, como si è detto, a prevedere l'esito di ogni loro esame, ma ben anco, stante la estensione di alcune di esse, a sottoporre a calcolo, mediante massime opportune, loro suggerite dal buon senso, le probabilità relative ad altri eventi emergibili nel corso della loro vita; per cui all' uopo potranno scientemente pronosticare su questi eventi, ed anco valutare gli analoghi pronostici fatti dagli altri; vale a dire si abiliteranno ed abitueranno a quel sobrio pronosticare sulle cose, che è tanto utile, segnatamente ai giovani.“ Ich gestehe, dass ich mit diesem Werke eben erst jetzt bekannt geworden bin, und muss mich vorläufig mit der vorstehenden Notiz begnügen,

hoffe aber späterhin auf dasselbe zurückzukommen, indem ich jetzt im Nachstehenden das Verzeichniss aller Schriften **Bordoni's** mittheilen werde.

INDICE DEI TRATTATI E DELLE MEMORIE

pubblicate dal Professore ANTONIO BORDONI, Senatore del Regno, ecc.

Crediamo soddisfare ad un desiderio espressoci in varie occasioni da molti cultori delle scienze matematiche, pubblicando la seguente nota dei trattati e delle principali memorie dovute al professore Antonio Bordoni. Il complesso di quelle pubblicazioni costituisce un monumento di gloria italiana, e la nazione deve essere grata all'uomo che seppe elevarlo anche in mezzo a pesanti e svariate occupazioni scolastiche. Noi potremmo facilmente mostrare quanti nuovi acquisti per la scienza siano contenuti in quei lavori, e rivendicare nello stesso tempo all'Italia alcune scoperte straniere; ma conosciamo troppo da vicino l'illustre autore per dubitare che quest' opera possa tornare a lui grata.

Prof. **Francesco Brioschi.**

Numero progressivo		Anno della pubblicazione
1.	Nuovo rapporto tra la teoria del centro di gravità e quella della composizione delle forze, pubblicato nel	1811
2.	Sopra le linee e le superficie parallele	1812
3.	Sopra l'equilibrio di un poligono qualunque	1814
4.	Sull'ombra nello spaccato ordinario di una volta emisferica	1814
5.	Sull'ombra del Toro, dell'Ovolo, della Scozia e dello spaccato di una volta emisferica	1815
6.	Nuovi teoremi di meccanica elementare	1815
7.	Trattato dei contorni delle ombre ordinarie	1816
8.	Sul moto discreto di un corpo	1816
9.	Nuovo teorema di Dinamica, ossia relazione fra i successivi moti instantanei che hanno luogo nel moto continuato di un sistema libero qualunque, su cui non agiscono forze acceleratrici esteriori, e fra le forze finite che possono produrre i medesimi movimenti . .	1818
10.	Sulla composizione delle forze e sui momenti di esse senza l'uso di angoli	1818
11.	Sul nuovo torno immaginato dal sig. ingegnere Carlo Parea, ispettore generale e direttore dei lavori del canale di Pavia	1818
12.	Proposizioni teoriche e pratiche trattate in pubblica scuola, raccolte e pubblicate in due riprese dal dottore Domenico Danione	1819

Numero progressivo		Anno della pubblicazione
13.	Trattato degli argini di terra	1820
14.	Sull' equilibrio delle curve a doppia curvatura, rigide, ovvero completamente o solo in parte elastiche	1820
15.	Proposizioni di Geodesia elementare	1821
16.	Sull'equilibrio astratto delle volte	1821
17.	Sui sistemi di due forze equivalenti fra loro e ad un qualunque	1821
18.	Trattato di Geodesia elementare	1822
19.	Sui contorni delle penombre	1822
20.	Sopra i momenti ordinarii	1822
21.	Sopra le linee uniformemente illuminate	1823
22.	Annotazioni alla Meccanica ed Idraulica del Venturoli, cioè dimostrazioni fatte colle derivate, di tutte le quistioni dipendenti dal calcolo sublime	1823
23.	Sulla distanza delle linee e delle superficie aventi le normali communi	1823
24.	Sulla Stereometria	1824
25.	Sui cunei dei ponti in isbieco	1826
26.	Sulla regola Guldiniana	1827
27.	Altre proposizioni tecniche e pratiche trattate in pubblica scuola, raccolte e pubblicate dal dottore Carlo Pasi, alcune nell'anno 1829 e le altre nel 1830	1829-1830
28.	Lezioni di calcolo sublime mediante le pure derivate	1831
29.	Sulla economia dei lavori	1831
30.	Seconda edizione delle Annotazioni alla Meccanica del Venturoli, con più variazioni ed aggiunte	1833
31.	Sull'equilibrio delle vôlte considerate composte di cunei finiti	1833
32.	Sulle figure isoperimetre esistenti in qualsivoglia superficie	1833
33.	Sulla intensità delle variazioni delle quantità	1833
34.	Trattato delle divise dei campi e delle campagne	1834
35.	Sulle svolte delle strade ordinarie	1835
36.	Ricerche sugli esami scolastici	1837
37.	Sugli esami, ossia sul merito di un esaminato	1841
38.	Raccolta di proposizioni matematiche, teoriche e pratiche	1842
39.	Seconda edizione del trattato di Geodesia elementare con variazioni ed aggiunte	1843
40.	Nota relativa alla seconda edizione della Geodesia elementare	1843
41.	Sulla intensità delle inflessioni delle curve piane	1843

Numero progressivo		Anno della pubblicazione
42.	Elementari dimostrazioni delle formole per le portate delle bocche ordinarie; con una nota sul moto stabilito e libero di un velo d'acqua in un piano verticale . .	1844
43.	Sull'acqua uscente da una bocca	1846
44.	Sull'equilibrio e la stabilità di un terrapieno	1847
45.	Nota = Sui poligoni inscritti o circoscritti ad un elisse e sui poliedri inscritti e circoscritti ad un ellisoide .	1852
46.	Nota = Sulle probabilità	1852
47.	Nota = Sul centro di più forze	1853
48.	Nota = Sull'acqua uscente da una bocca, con nota sull'economia dei lavori	1853
49.	Nota = Sulle superficie	1853
50.	Nota = Sulla Geometria analitica	1855
51.	Nota = Sul parallelismo	1858
52.	Terza edizione della Geodesia elementare, assai differente dalle altre due	1859

Furono pubblicati:

Cogli Atti della Società Italiana in Modena, i numeri 1, 2, 8, 11, 14, 16, 24, 26, 44	N. 9
A parte colla Stamperia Reale. i numeri 3, 7, ...	„ 2
Nel Giornale di Fisica, ecc., di Pavia, i numeri 4, 5, 6, 9, 10, 12, 17, 19, 20, 21, 23	„ 11
Colla Stamperia Bizzoni in Pavia, i numeri 27, 38, 39, 40, 42, 43, 48, 52	„ 8
Colla Stamperia Giusti in Milano, in numeri 13, 15, 18, 22, 25, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36	„ 14
Cogli Atti dell'Istituto Lombardo-Veneto, i numeri 37, 41, 46, 47, 49, 50, 51	„ 7
Col Giornale del Tortolini a Roma, il N. 45	„ 1
Febbrajo 1860.	N. 52

Alle diese Schriften sind eine Fundgrube neuer Ideen, mit denen Bordoni oft seinen Nachfolgern vorangeeilt ist, ohne dass von denselben seiner gedacht worden wäre.

Am 21sten December 1862 starb in Wien

Dr. Karl Kreil,

der hochverdiente Director der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus und Professor der Physik an der Wiener Universität. Die Wiener Zeitung vom 23sten December 1862 theilt die Nachricht von seinem Tode mit folgenden Worten mit:

„Herr Dr. Karl Kreil, dessen Hinscheiden wir gestern gemeldet haben, gehörte unter jene seltenen Männer, denen die Pflege der Wissenschaft über Alles geht und die ihr mit unermüdlichem rastlosen Eifer das ganze Leben widmen. Es kann nur die Aufgabe eines auf der Höhe der Wissenschaft stehenden gewandten Biographen sein, die einflussreiche Wirksamkeit dieses weit über die Grenzen des Kaiserstaates hinaus mit Recht berühmten Gelehrten erschöpfend zu schildern. Er war es, der mit anderen Koryphäen der Wissenschaft den ersten Kern unserer Akademie der Wissenschaften bildete, welche belebend für das wissenschaftliche Streben in Oesterreich wirkte.

Ursprünglich zum Astronomen bestimmt, gelang es ihm nicht, eine seinen eminenten Eigenschaften entsprechende Wirkungssphäre zu erlangen. Die Folge war eine unerwartet günstige. Er ist, mit Recht kann man es sagen, der Schöpfer einer neuen Wissenschaft in Oesterreich geworden: der Physik der Erde. Insbesondere hat er für den schwierigsten und delikatesten Theil der einschlägigen Forschungen auf dem Gebiete des tellurischen, Magnetismus in unserem Vaterlande die Bahn gebrochen, auf welcher jetzt vielseitig und rüstig fortgeschritten wird.

Nicht minder gross ist sein Verdienst um die Pflege der Meteorologie in Oesterreich, eines zweiten so einflussreichen Zweiges der Physik der Erde. Wenn auch die Gründung der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, deren Wirksamkeit bereits eine eben so tief eingreifende als vielseitige geworden ist, zunächst von der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, insbesondere ihrem gefeierten und hochverdienten Präsidenten Sr. Excellenz Freiherrn von Baumgartner ausging, so war es doch auch der Verblichene, dessen Ansicht und Gutachten bei allen Organisirungs-Operaten eingeholt und als massgebend berücksichtigt worden ist.

Es wird eine der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften würdige Aufgabe sein, das Leben und Wirken dieses bedeutenden Mannes wenigstens in seinen Hauptzügen entsprechend zu schildern und ihm bei der nächsten feierlichen Sitzung ein biographisches Denkmal zu setzen."

Ueber Kreil's äussere Lebensumstände muss ich mich für jetzt auf die folgenden, mir von befreundeter Hand mitgetheilten kurzen Notizen beschränken. Er wurde am 4ten November 1798 zu Ried in Oberösterreich geboren, studirte in Kremsmünster, absolvirte an der Wiener Universität die juridischen Studien, begann auf der dortigen Sternwarte als Eleve der Astronomie seine Laufbahn und kam dann bald als Adjunct auf die Sternwarte nach Mailand. Später erhielt er die Lehrkanzel der Astronomie in

Prag, wo er sich aber wegen Mangelhaftigkeit der dortigen Sternwarte für astronomische Zwecke genöthigt sah, seine Thätigkeit ausschliesslich der Meteorologie und dem Erdmagnetismus zuzuwenden. Bei der Gründung der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus ward er zu deren Director ernannt, und hat sich durch seine vieljährige Thätigkeit bei derselben unbestreitbare grosse, auch in der obigen Notiz der Wiener Zeitung gebührend hervorgehobene Verdienste erworben, wenn auch nicht unerwähnt gelassen werden darf, dass in dem systematischen und strengeren Beobachten der meteorologischen und der Erscheinungen des Erdmagnetismus ihm der verdiente Koller in Kremsmünster als Director der dortigen Sternwarte, jetziger k. k. Ministerialrath in Wien, und der Astronom Weisse in Krakau in sehr verdienstlicher Weise vorangingen. Der Herausgeber des Archivs, mit Kreil auch persönlich bekannt und befreundet, wurde in der angenehmen Erinnerung an einige mit ihm verlebte frohe und lehrreiche Stunden durch die Nachricht von seinem Tode um so mehr überrascht und betrübt, je mehr er in seiner äusseren Erscheinung den Eindruck der Gesundheit und grosser körperlicher und geistiger Frische machte. Möge die Erde ihm leicht sein!

Am 21sten November 1862 verschied in Lissabon nach langen Leiden der verdiente Director der Sternwarte und Navigations-Schule in Hamburg:

Dr. Carl Ludwig Rümker,

allgemein bekannt durch sein weit verbreitetes und vielfach aufgelegtes Handbuch der Schifffahrtskunde, durch seinen Sterncatalog und viele andere wissenschaftliche Arbeiten, zu dem der Herausgeber des Archivs, wenn auch mit ihm persönlich nicht bekannt, in besonders freundschaftlicher Beziehung stand, und dessen er stets mit besonderer Freude und vielfachem Danke gedenken wird. Sehr gern würde er daher einen etwas ausführlicheren Necrolog in dieser Zeitschrift mittheilen, wenn ihm ein solcher eingesendet werden sollte.

Am 18ten Januar 1863 starb in Berlin

Professor Dr. Christian Ludolf Lehmus,

im 83sten Lebensjahre.

Dem nun Dahingeschiedenen verdankt auch das Archiv ein Paar Beiträge, und möchte ich daher mich gern in den Stand ge-

setzt sehen, einige ausführlichere Notizen der obigen vorläufig nur den Zeitungen entnommenen Nachricht folgen lassen zu können.

G.

Geometrie.

Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der algebraischen und rechnenden Geometrie. Enthaltend: Aufgaben über das Quadrat, das Rechteck, den Rhombus und das Parallelogramm im Allgemeinen, nebst deren Auflösungen und Resultaten. Für Gymnasien, Real- und höhere Bürgerschulen, Gewerbe-, Bau- und Militairschulen u. s. w., bearbeitet und herausgegeben von Albert Dilling, Dr. phil. und Gymnasiallehrer zu Mühlhausen in Thüringen. Paderborn. Schöning. 1862. 8.

Dieses, wie es scheint, mit grossem Fleiss bearbeitete Aufgabenbuch darf Lehrern an den auf dem Titel genannten Lehranstalten zur Erleichterung bei ihrem Unterrichte empfohlen werden. Der Kreis, über welchen sich die Aufgaben erstrecken, ist auf dem Titel bestimmt bezeichnet. Die auflösenden Formeln sind überall vollständig entwickelt. Ganz besonders reich ist aber das Buch an numerischen Beispielen zur Anwendung der entwickelten Formeln auf besondere Fälle, reicher als fast alle ähnlichen Bücher, die uns vorgekommen sind, für uns fast zu reich, da wir nach unseren Ansichten es nicht billigen können, wenn zu viel Zeit und zu viel Werth auf diese bloss numerischen Rechnungen verwandt und gelegt wird, da wir der Meinung sind, dass in jedem einzelnen Falle wenige recht zweckmässig gewählte und gut durchgearbeitete Beispiele hinreichend sind, den Schülern die freilich wichtige und nie zu vernachlässigende Uebung im numerischen Calcul zu verschaffen; der Lehrer kann indess für die Länge der Zeit nie genug solcher Beispiele haben, weshalb wir eben die vorliegende Sammlung zur Beachtung empfehlen. Die Resultate der Beispiele sind auf mehr als 280 Seiten beigefügt, woraus man schon einen Schluss auf deren grossen Umfang machen kann.

Aufgaben-Sammlung aus der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes. Von Josef Haberl, Assistenten und öffentlichem Repetitor der höheren Mathematik am k. k. polytechnischen Institute in Wien. Carl Gerold's Sohn. 1863. 8.

Aufgaben-Sammlungen für die analytische Geometrie im eigentlichen Sinne giebt es in nicht zu grosser Zahl, weshalb wir auf die vorliegende, überall zugleich die Auflösungen enthaltende Sammlung aufmerksam machen, da sie uns zur Uebung von Anfängern zweckmässig eingerichtet zu sein scheint. Die gewählten Aufgaben sind, was für diesen Zweck durchaus gebilligt werden muss, im Ganzen nicht schwierig, und erfordern meistens keinen grossen Apparat des Calculs zu ihrer Auflösung; auch hat der Herr Verfasser durch häufige zweckentsprechende Einführung specieller Coordinatensysteme die Auflösungen möglichst zu erleichtern gesucht, was hier gleichfalls zu billigen ist, wenn auch Anfänger immer darauf hinzuweisen sind, dass durch ein solches Verfahren freilich die schöne Symmetrie der gesuchten Formeln meistens gestört wird, die nur bei'm Gebrauche des allgemeinen Coordinatensystems festzuhalten und zu erreichen ist. So oft als möglich hat der Herr Verfasser die erhaltenen Formeln auch zur Ableitung von geometrischen Constructionen benutzt, und dabei die sogenannte neuere Geometrie nicht unberücksichtigt gelassen. Endlich ist auch eine zweckmässige Sammlung von Aufgaben zur Anwendung der gewöhnlichsten geometrischen Differential- und Integralformeln gegeben, die wir, als besondere Schwierigkeiten, nicht darbietend, Anfängern, welche gerade einen Cursus dieser Wissenschaften durchgemacht haben, besonders empfehlen, da auch Aufgaben über die Maxima und Minima nicht fehlen, und zugleich das polare Coordinatensystem nicht unberücksichtigt gelassen worden ist. Ueberhaupt beziehen sich diese Aufgaben auf die Tangenten und Normalen, Asymptoten, Concavität und Convexität, singuläre Punkte, Krümmungskreis und Evolution, Rectification und Quadratur, ferner auf ebene Curven, deren Bestimmung auf Differentialgleichungen führt, Maxima und Minima. Freilich hat sich der Herr Verfasser hier auf Curven in der Ebene beschränkt, was jedoch für den Anfang auch genügt, namentlich wenn der Schüler noch nicht besondere Vorträge über die allgemeine Theorie der krummen Linien und krummen Flächen gehört, sondern für's Erste nur die geometrischen Anwendungen kennen gelernt hat, welche gewöhnlich bei'm Vortrage der Differential- und Integralrechnung selbst mitgenommen werden. Da es aber an zweckmässigen Aufgaben über die Curven von doppelter Krümmung und die krummen Flächen ganz besonders fehlt, so würden wir wünschen, dass der Herr Verfasser recht bald eine geeignete Sammlung nicht besonders schwieriger Aufgaben über diese geometrischen Gebilde folgen liesse, wodurch gewiss vielen Lehrern ein besonderer Dienst geleistet werden würde.

Physik.

Grundriss der Physik und Meteorologie. Für Lyceen, Gymnasien, Gewerbe- und Realschulen, sowie zum Selbstunterrichte. Von Dr. Johann Müller, Grossherzoglich Badischem Hofrath, Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg i. B. Mit 580 in den Text gedruckten Holzstichen. Achte vermehrte und verbesserte Auflage. Braunschweig. F. Vieweg und Sohn. 1862. 8.

Wenn ein Buch in nicht gar langer Zeit acht Auflagen erlebt, so muss es sich bei dem Publicum, für welches es bestimmt ist, so sehr eingebürgert und so sehr dessen Gunst erworben haben, dass die Kritik ein sehr unnützes Werk verrichten würde, wenn sie sich noch auf eine besondere Beurtheilung desselben einlassen wollte. Es kann nur darauf ankommen, dass dieselbe prüft, ob das Buch in den verschiedenen Auflagen den Fortschritten der Wissenschaft gefolgt ist, so weit es seine besondere Bestimmung erfordert. Dass dies in dem vorliegenden Schulbuche geschehen ist, glauben wir versichern zu können. Die Art der Darstellung ist im Ganzen dieselbe geblieben wie in den früheren Ausgaben, so dass es darin namentlich auf eine deutliche und bestimmte Darlegung der verschiedenen Naturgesetze und eine Erläuterung derselben durch zweckmässige Versuche ankommt, ohne alle hervortretende Einmischung der Mathematik. Jedoch ist mit Recht in der vorliegenden neuesten Ausgabe dieser letzteren Wissenschaft etwas mehr Raum vergönnt worden als in den früheren, wenn auch nur in ganz einfacher und sehr elementarer Weise. Wir billigen dies natürlich vollkommen und hätten eben deshalb gewünscht, dass namentlich in der Optik, in der Lehre von den Spiegeln und Linsen, die nur sehr wenig mathematisch gehalten ist, die Mathematik eine ausgedehntere Anwendung gefunden hätte, da gerade diese Lehre so viele Gelegenheit zu lehrreichem einfachen Gebrauche derselben darbietet, weshalb auch z. B. auf den preussischen Realschulen erster Ordnung durch besondere höhere Verfügungen für die Abiturienten-Arbeiten Aufgaben aus dem Gebiete der Optik in der zweckmässigsten Weise mit in den Vordergrund gestellt worden sind. Vielleicht findet der Herr Verfasser in diesen Bemerkungen Veranlassung, dies bei den künftigen Ausgaben zu berücksichtigen. Einen besonderen Vorzug vor den früheren Ausgaben hat derselbe der neuen Ausgabe noch durch die Hinzufügung von 244 über

das ganze Gebiet der Physik sich ziemlich gleichmässig verbreitenden Aufgaben verliehen. Dass die gesammte äussere Ausstattung, natürlich und vorzüglich mit Einschluss der trefflichen 580 Holzstiche, alle Ansprüche, die in dieser Beziehung gemacht werden können, mehr als befriedigt, versteht sich bei der berühmten Verlagshandlung von selbst.

Bemerken wollen wir noch, dass zur weiteren Ausführung des obigen Grundrisses der früher erschienene

Mathematische Supplementband zum Grundriss der Physik und Meteorologie von Dr. Joh. Müller. Braunschweig. Vieweg. 1860. 8.

dient und zweckmässig gebraucht werden kann.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLVI. S. 13.)

Band XLV. Heft III. Puschl: Ueber den Wärmezustand der Gase. S. 353. — Weiss, Edm.: Die totale Sonnenfinsterniss vom 31. December 1861 in Griechenland. S. 385. — Zenger: Der Universal-Rheometer. S. 414. — v. Littrow: Physische Zusammenkünfte der Asteroiden im Jahre 1862. S. 417. — Haidinger: Ueber das Regenbogenphänomen am 28. Juli 1861. S. 421. — Kreil: Ueber Barometerschwankungen in längeren Perioden. S. 427. — Frischauf: Ueber die Bahn der Asia. S. 435. — Boué: Nachtrag zu einem Kataloge der Nordlichter S. 445.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem Jahre 1861. Nr. 469—496. (S. Literar. Ber. Nr. CXLV. S. 15.)

H. Wild: Nachrichten von der Sternwarte in Bern aus den Jahren 1859 und 1860. I. Astronomische Beobachtungen. II. Magnetische Beobachtungen. Nr. 472—463. S. 25. — G. Studer: Topographische Mittheilungen über die Savoyer-Alpen. Nr. 480 bis 487. S. 89. — G. Hasler: Beitrag zur Inductions-Telegraphie. Nr. 485—487. S. 152. — Perty: Ueber die Sammlungen mikroskopischer Präparate des Instituts von Engell u. Comp. in Wabern bei Bern. Nr. 488—489. S. 162.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CLIV. S. 6.).

No. 5. tom. IV. 1861. Mémoire sur les déterminants cramériens ou résultantes algébriques. Par le P. Le Cointe de la Compagnie de Jésus avec supplément. p. 233. — Sur la multiplication des nombres congruents. Lettre adressée à Monsieur le Prince Don Bathasar Boncompagni par M. F. Woepcke. p. 247. — Brano di lettera del Sig. M. Cantor à Mr. B. Boncompagni. p. 256. — Sulla teoria delle sviluppoidi e delle sviluppanti di E. Beltrami. p. 257. — Di alcune formole relative alla curvatura delle superficie: lettera di E. Beltrami al Compilatore. p. 283. — Sopra alcuni sviluppi algebrici nella teorica delle equazioni. Nota del Prof. B. Tortolini. p. 285. — **Rivista bibliographica.** Sulle superficie del paraboloide ellittico: articolo del Prof. B. Tortolini. p. 293. — Pubblicazioni recenti. p. 296.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLV. S. 15.)

1862. II. Heft II. Lamont: a) Ueber die zehnjährige Periode in der täglichen Bewegung der Magnetnadel und die Beziehung des Erdmagnetismus zu den Sonnenflecken. S. 66. — b) Ueber das Verhältniss der magnetischen Intensitäts- und Inclinations-Störungen. S. 76. (Beide interessante Aufsätze liefern von Neuem Zeugniss von den fortgesetzten eifrigen Bemühungen des Herrn Verfassers, zur Aufklärung der immer noch räthselhaften Erscheinungen des Erdmagnetismus beizutragen, denen derselbe den besten Theil seines Lebens mit nie ermüdendem Eifer gewidmet hat). — Seidel: Ueber die Verallgemeinerung eines Satzes aus der Theorie der Potenzreihen. S. 91. (Betrifft eine Erweiterung des bekannten Fundamentalsatzes: „Wenn zwei nach steigenden Potenzen einer Hauptgrösse x geordnete Reihen für alle Werthe von x zwischen 0 und h convergiren und übereinstimmende Werthe annehmen, so müssen die Reihen identisch sein". Der Aufsatz verdient der Beachtung empfohlen zu werden, enthält aber für jetzt mehr Andeutungen, als einen ausgeführten Beweis der angeführten Behauptungen.). — Lamont: Beitrag zu einer mathematischen Theorie des Magnetismus. p. 103. (Der Herr Verfasser schliesst diesen gleichfalls mehrfaches Interesse darbietenden Aufsatz mit den Worten: „Es war meine Absicht, in dem Vorhergehenden nur vorläufige Andeu-

tungen zu geben über den Weg, der zu befolgen wäre, um die mathematische Theorie weiter auszubilden. Die angeführten Resultate zeigen, glaube ich, ganz entschieden, dass der bezeichnete Weg zum Ziele führt; ob es gelingen wird, die nicht unbedeutenden analytischen Hindernisse, welche dabei sich darbieten, zu beseitigen und für die in der Praxis vorkommenden Fälle einfache Gesetze und Formeln herzustellen, ist eine andere Frage.).

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLV. S. 16.).

September, October 1862. Lipschitz: Ueber das Gesetz, nach dem sich die Dichtigkeit der Schichten des Innern der Erde ändert, mitgetheilt von Hrn. Borchardt. S. 601—607. — Dove: Ueber A. v. Humboldt's Bestimmung der mittleren Höhe der Continente. S. 612. (Blosse Anzeige eines gehaltenen mündlichen Vortrags.). — G. Rose: Ueber den Asterismus der Krystalle, insbesondere des Glimmers und des Meteoreisens. S. 614—618.

Literarischer Bericht
CLVIII.

In Pisa starb der berühmte treffliche Mathematiker

O. F. Mossotti,

Verfasser mehrerer ausgezeichneter Werke, z. B. der schönen Nuova Teoria degli Stromenti ottici. Pisa. Tipografia Pieraccini. 1857. und vieler einzelner Abhandlungen. Schon im Jahre 1817 veröffentlichte er eine sehr schöne, vorzüglich durch grosse analytische Eleganz ausgezeichnete Abhandlung über die Berechnung der Bahnen der Weltkörper in den Effemeridi di Milano von dem genannten Jahre, die auch in der Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften, herausgegeben von Lindenau und Bohnenberger. Band III. 1817. S. 145—S. 165. Band V. 1818. S. 322—S. 328. unter dem Titel: Neue Auflösung des Problems, die Bahn eines Himmelskörpers zu bestimmen, von Ottaviano Fabrizio Mossotti, durch Encke mitgetheilt worden ist. Er war, durch Verleihung der Würde eines Senatore del Regno — wie der berühmte Bordoni — hochgeehrt von seinem Könige, ein warmer Patriot, der lange in der Verbannung in Buenos-Ayres und in Korfu gelebt und mit dem Bataillon der toskanischen Studenten in der Schlacht von Curtatone mitgefochten hat.

Mit dieser vorläufigen Notiz von dem Tode des berühmten Mannes muss ich mich so lange begnügen, bis ich durch von mir sehr gewünschte freundliche Mittheilungen in den Stand gesetzt werde, ausführliche Nachrichten über sein Leben und Wirken geben zu können. Grunert.

Am 1sten April 1863 starb in der Schweiz, seiner Heimath (er war am 18. März 1796 in Utzendorf im Kanton Bern geboren), der Professor an der Universität und Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Berlin

Jacob Steiner.

Ueber Steiner's grosse Verdienste um die sogenannte neuere Geometrie, als deren hauptsächlichster Mitbegründer sein Name zu allen Zeiten in der Geschichte unserer Wissenschaft mit besonderer Achtung genannt werden wird, hier etwas Weiteres sagen zu wollen, würde völlig überflüssig sein. Zur Vervollständigung dieser für jetzt nur den Zeitungen entnommenen kurzen Notiz wünschen wir recht sehr die baldige Einsendung eines ausführlichen Necrologs von kundiger Hand.

Am 16ten April 1863 starb

Dr. Ferdinand Redtenbacher,

Professor der Maschinenkunde und bis vor Kurzem auch Director der berühmten polytechnischen Schule in Karlsruhe, jedenfalls ein grosser Verlust für die Wissenschaft. Wir wünschen, dass wir von kundiger Hand recht bald in den Stand gesetzt werden, dieser vorläufig nur den Zeitungen entnommenen Notiz einen ausführlichen Necrolog folgen lassen zu können *).

Am 10ten April 1863 starb in Florenz der berühmte italienische Optiker und Astronom

Giambattista Amici,

früher mehrere Jahre Professor der Mathematik an der Universität in Modena und von 1831 an Director der dortigen Sternwarte. Er ist bekanntlich der Erfinder des achromatischen Mikroskops und vieler anderer optischer Instrumente. In den letzten Jahren beschäftigte er sich mit der Construction eines grossen Hohlspiegels, zu welchem Behuf ihm die Laboratorien der Kanonengiesserei in Pavia zur Verfügung gestellt wurden.

Italienisches Unterrichtswesen.

Die von mir im Literarischen Berichte Nr. CLVII. S. 2. mitgetheilten Notizen über die glänzende Ausstattung der italienischen Universitäten, namentlich derer zu Bologna und Pavia, mit ausgezeichneten Lehrern im mathematischen und physikalischen Fache waren aus zwei mir vorliegenden neueren Lectionsverzeich-

---

*) Unser Wunsch ist schon erfüllt worden, eben so über Carlini; im nächsten Hefte das Weitere.

nissen der beiden genannten Universitäten entlehnt worden. Neuerlichst hat sich nach mir gemachten freundlichen Mittheilungen darin Einiges geändert. Herr Brioschi ist zum Director der neu errichteten Ingenieurschule in Mailand und zum Professor der rationellen Mechanik an derselben ernannt worden. Herr Cremona vertritt jetzt die Fächer der analytischen Geometrie und der Géométrie déscriptive an der Universität in Bologna, und an die Stelle des Herrn Sante Ramenghi ist an derselben Universität Herr E. Beltrami getreten, der sich schon durch mehrere ausgezeichnete, in den „Annali di Matematica pura ed applicata“ publicirte Arbeiten (m. s. z. B. Literar. Ber. Nr. CLVII. S. 15.) von der vortheilhaftesten Seite bekannt gemacht hat. Indem ich dem Herrn Einsender dieser Notizen dafür meinen verbindlichsten Dank hiermit ausspreche, theile ich dieselben um so lieber hier mit, weil sich aus ihnen von Neuem ergiebt, wie sehr die italienische Regierung bemüht ist, auf dem Felde des Unterrichtswesens im weitesten Sinne kräftigst fortzuschreiten, neue Lehranstalten, wo die Nothwendigkeit sich zeigt, ungesäumt zu errichten, und überall für dieselben die tüchtigsten und ausgezeichnetsten Lehrkräfte zu gewinnen. G.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Almanach der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. Zwölfter Jahrgang. 1862.

Der eilfte Jahrgang dieses Almanachs ist im Literar. Berichte Nr. CXLVII. S. 1. angezeigt worden. Der Bericht des Herrn Professor Dr. A. Schrötter, als General-Secretär, sowohl über die Leistungen der kaiserl. Akademie der Wissenschaften überhaupt, als über die der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse im Besonderen, zeigt von Neuem, wie richtig diese hohe gelehrte Körperschaft ihren Beruf: die erste wissenschaftliche Behörde des Landes zu sein und alle Bestrebungen auf dem Felde der zu ihrem Bereich gehörenden Wissenschaften zu fördern und zu unterstützen, begreift, und wie sehr dieselbe fortwährend bemühet ist, demselben mit dem schönsten Erfolge nachzukommen. Mit Recht hebt auch der Herr General-Secretär in seinem für jeden wahren Freund der Wissenschaften vielfach interessanten Berichte hervor, wie sehr dieses verdienstliche Wirken der kaiserl. Akademie seinen Reflex findet in der in Oesterreich jetzt alle Schichten der Bevölkerung durchdringenden Achtung vor wissenschaftlichen Arbei-

ten jeder Art und dem sich überall kundgebenden Eifer, auch selbst zur Förderung der Wissenschaften nach Kräften beizutragen. Der am 1. März 1862 verstorbene k. k. priv. Grosshändler und Bürger von Wien, Herr Ign. L. Lieben, bestimmte in seinem Testamente eine namhafte Summe zu gemeinnützigen Zwecken, die weitere Disposition seinen beiden nachgelassenen Söhnen überlassend. Diese haben nun, im Geiste des Vaters handelnd, von der legirten Summe der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der kaiserl. Akademie 6000 Gulden mit der Bestimmung zugewendet, dass von den Interessen dieses Kapitals alle drei Jahre ein von der Akademie zuzuerkennender Preis (der also zu 5 % die bedeutende Höhe von 900 Gulden erreichen kann) der besten ihr überreichten Abhandlung aus dem Gebiete der Physik mit Einschluss der physikalischen Physiologie, und alternirend aus der Chemie, mit Einschluss der chemischen Physiologie, zuerkannt werde.

Der Bericht über die mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse enthält eine interessante, ziemlich ausführliche Lebensbeschreibung J. B. Biots (S. 164—S. 170), die ich nächstens in das Archiv aufnehmen zu können hoffe, indem ich daraus für jetzt nur ein Paar interessante Thatsachen hervorhebe:

„Biot war es, der im Jahre 1801 das Institut bewog, nicht für die Ernennung Bonaparte's zum Kaiser zu stimmen. Aber weder das erste, noch das zweite Kaiserreich hat Biot diesen Mangel an Sympathie empfinden lassen. Er besass aber auch keinen politischen Ehrgeiz, er strebte, wie Bertrand sagt, nach keinem anderen Titel als dem eines Akademikers, er fand seine Kraft und Grösse in der Wissenschaft und würde sie zu schwächen geglaubt haben, hätte er sie anderswo gesucht."

Das vorzugsweise allen preussischen Lehrern der Mathematik und Physik bekannte ausgezeichnete „Lehrbuch der mechanischen Naturlehre" des um den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht in unserem Vaterlande so hoch verdienten Ernst Gottfried Fischers, Professors am Gymnasium zum grauen Kloster in Berlin, hat bekanntlich das merkwürdige Schicksal gehabt, dass es in Deutschland viele Jahre ganz unbeachtet geblieben ist, nachdem schon 1806 eine französische Uebersetzung erschienen war, die 1829 die vierte Auflage erlebte. Diese Uebersetzung wird gewöhnlich Biot zugeschrieben; seine vorliegende Lebensbeschreibung theilt nun aber die höchst interessante Notiz mit, dass er selbst nur der Verfasser der beigefügten Noten, die Verfasserin der Uebersetzung

in ihrer ersten Auflage aber seine Frau, eine geborene Brisson, war. Habent sua fata libelli!

Vorzüglich aufmerksam machen muss ich endlich die Leser auf die Rede des Präsidenten der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, des Herrn Freiherrn von Baumgartner:

Chemie und Geschichte der Himmelskörper nach der Spectral-Analyse.

Ich gestehe, bei aller Kürze dieser schönen Rede, noch nirgends eine so einfache, klare und deutliche, selbst für den weniger Eingeweiheten völlig verständliche Darstellung des betreffenden wichtigen Gegenstandes, welche alle Momente, auf die es bei demselben ankommt, alle Anwendungen, die derselbe bisher gefunden und alle Aussichten, die derselbe für die Folge noch eröffnet, namentlich auch in astronomischer Rücksicht, in der bestimmtesten Weise hervorhebt, wie hier gefunden zu haben. Weiterer Mittheilungen daraus mich für jetzt enthaltend, werde ich diese Rede in einem der folgenden Hefte, wo möglich schon in dem nächsten, den Lesern vollständig mittheilen, indem ich mir dadurch deren besonderen Dank zu verdienen hoffe. G.

Arithmetik.

David Giffhorn, Sammlung derjenigen elementarmathematischen Aufgaben, welche an den preussischen Gymnasien in den letzten Jahren als Maturitäts-Aufgaben den Abiturienten gestellt sind. Braunschweig, Schulbuchhandlung. 1862. IV und 64 S.

Der Herausgeber des unter vorstehendem Titel erschienenen Heftes ist zu der Zusammenstellung der mathematischen Abiturienten-Aufgaben allem Anscheine nach durch die „Bemerkung des Herrn Professor Grunert im 37. Bande seines Archivs, wo er auf den Nutzen der Herausgabe der preussischen Abiturienten-Aufgaben hinweist“, veranlasst worden. Die Art, wie Herr Giffhorn diese Angabe in seinem Vorworte macht, lässt erkennen, dass derselbe gefühlt hat, wie wenig seine Arbeit der Absicht des Herrn Professor Grunert entspricht. Die in nachdrücklichster Weise im 147. literarischen Berichte (S. 4.) ausgesprochene Aufforderung sagte, dass „die preussischen mathematischen Abiturienten-Arbeiten eine reiche Fundgrube trefflicher Aufgaben darbieten dürften, die wohl einmal zur Anfertigung einer Sammlung

benutzt zu werden verdiente." Herr Giffhorn hat es für seine schriftstellerischen Zwecke passender gefunden, aus jenen Worten eine „Ausgabe sämmtlicher Abiturienten-Aufgaben" herauszulesen. Er wollte es den Schul-Examinatoren „bequem machen, ihre Anforderungen mit denen ihrer Fachgenossen vergleichen zu können." Dies ist aber doch nur möglich, wenn man die vier Aufgaben, welche von den Abiturienten in fünf Stunden zu bearbeiten sind *), nicht trennt. Wer sich aus dieser Sammlung ein Urtheil über den Standpunkt des mathematischen Unterrichtes an den preussischen Gymnasien bilden will, bekommt gewiss ein falsches; weil die leichten und mittelmässigen Aufgaben, abgerissen von den drei dazugehörigen, sich als Prüfungs-Aufgaben viel schlimmer, oft geradezu wunderlich ausnehmen. So hat Herr Giffhorn den Lehrern einen gar schlechten Dienst geleistet; denn er hat, anstatt die Arbeiten „als eine Fundgrube zu benutzen" und die leichten Aufgaben, die sich kein Lehrer für vorkommende Fälle notiren wird, wegzulassen, die Goldkörnchen im Sande verschüttet. Wollte man sich nun selbst daran machen und das Unnütze wegstreichen, so ist diese Sammlung auch nicht einmal dazu zu gebrauchen. Denn das Wiederauffinden einer vor einiger Zeit hierin gelesenen Aufgabe dürfte schwer fallen! Sie sind in jeder der vier grossen Rubriken (Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie und Stereometrie) im allerbuntesten Durcheinander; gerade so, wie sie bei der Folge der Programme herausgeschrieben wurden! Und das nennt Herr Giffhorn auf dem Titel „zusammengestellt und geordnet!" —

Mit welcher Hast das Zusammenschreiben stattgefunden, davon zeugen die zahlreichen Druckfehler und die Wiederholungen derselben Aufgabe. Als Belege für letzteres wollen wir nur aus der Trigonometrie anführen: No. 66 ist gleich No. 130, einmal mit lateinischen, dann mit griechischen Buchstaben für die Winkel; No. 29, 68 und 75 sind dieselbe Aufgabe mit anderen Zahlen; die Pothenot'sche Aufgabe steht zweimal dicht hinter einander, No. 58 ohne, No. 59 mit einem Zahlenbeispiel. Am schlimmsten aber sind die vielen Druckfehler, weil sie die Aufgaben gänzlich zerstören. Von denen auf den ersten Seiten nehmen wir folgende heraus:

No. 8 und 9 sind Beispiele zur Aufsuchung der Wurzelfactoren:

---

*) In Betreff dieser Bestimmung des preussischen Prüfungsreglements zeigt Herr Giffhorn, Lehrer in Braunschweig, durch die Bemerkung am Schlusse seines Vorwortes eine streng zu rügende Unkenntniss!

$$x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$$

wird, wie man auf den ersten Blick erkennt, durch $x = 5$ befriedigt, und giebt

$$(x-5)(x^2-2) = 0,$$

$$x_1 = 5, \quad x_2 = +\sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}.$$

Der Druckfehler 11 statt 10 macht diese leichte Aufgabe zu einer schlimmen Gleichung dritten Grades (und kubische Gleichungen sind bekanntlich aus dem Pensum der Gymnasien verwiesen).

Für die Gleichung No. 9:

$$x^4 - 13x^3 + 46x^2 - 52x + 168 = 0$$

lässt $168 = 2.2.2.3.7$ finden:

$$(x-7)(x-6)(x^2+4) = 0,$$

also $x_1 = 7$, $x_2 = 6$, $x_3 = +2\sqrt{-1}$, $x_4 = -2\sqrt{-1}$.

Herr Giffhorn hat das Glied $-52x$ ganz ausgelassen, also eine Gleichung vierten Grades mit irrationalen Wurzeln gegeben.

Die schöne Gleichung No. 4 muss heissen:

$$(x+1)^6 - 6(x+1)^5 + 3x(5x^3 + 15x + 8) + 261 = 0,$$

und nicht $(6x+1)^5$; sie ergiebt $x_1{}^3 = 32$, $x_2{}^3 = 8$.

Die zweite Gleichung unter No. 19:

$$3(x-y)^2 \cdot \frac{534}{5} = \frac{x-y}{5}$$

erinnert sich Referent in dieser Weise in einem Programme gelesen zu haben. Herr Giffhorn hat sich aber nicht die Zeit genommen, herauszufinden, dass statt des Punktes ein Minuszeichen zu setzen ist; dann giebt die Gleichung mit der dazugehörigen

$$(x^2+y^2)(x-y) = 876$$

eine gute Lösung.

Die schwierige Aufgabe No. 25 (von Herrn Prof. Schellbach):

$$(x^3+y^3)^2 = a(x^n+y^n),$$
$$(x+y)(x^5+y^5) = b(x^n+y^n)$$

hat er auf der rechten Seite abgeändert in $a(x^4+y^4)$ und $b(x^4-y^4)$, wodurch die Gleichungen unauflösbar geworden sind. Ihm hat nicht vorgeschwebt, dass man $y = xz$ setzen muss, um durch Division die beiden Gleichungen in eine reciproke Gleichung 4ten Grades für z zu vereinigen, die von den $n$ten Potenzen frei ist.

Ebenso sind die Gleichungen No. 36 und 37 durch zwei hineingekommene Pluszeichen nicht mehr aufzulösen; sie müssen lauten:

No. 36. $$\begin{cases} x^2-y^2+x-y=26, \\ (x^2-y^2)(x-y)=48. \end{cases}$$

No. 37. $$\begin{cases} (x^2+y^2)(x^3-y^3)=5168, \\ (x^2-y^2)(x^3+y^3)=1568. \end{cases}$$

Ferner sind die Vorzeichen in der dritten Gleichung No. 48 zu corrigiren in

$$x:y=y:z, \quad x+y+z=3, \quad x^2-y^2+z^2=1.$$

Der Raum gestattet nicht, noch mehr Druckfehler aus den vier ersten Seiten hier aufzuzählen. Durch Mangel an Sorgfalt sind viele Aufgaben verstümmelt und das Buch völlig unzuverlässig geworden. Von mehreren Collegen ist dem Referenten gesagt worden, dass sie es nicht mehr wagen, aus der Giffhorn'schen Sammlung in der Classe Aufgaben zur Uebung zu stellen, weil man befürchten muss, mit der Auflösung stecken zu bleiben!

Berlin. Martus.

Hülfstafeln zur Berechnung der Invaliden-, Wittwen- und Waisen-Pensionen und der Bestandfähigkeit der Pensionskassen nebst voraufgeschickten Erläuterungen, bearbeitet von L. Albert, Special-Director der Mecklenburgischen Eisenbahn. Leipzig, J. C. Hinrichssche Buchhandlung. 1863. IV. und 60 S. gr. 8⁰.

Diese Schrift ist zunächst dazu bestimmt, einem practischen Bedürfnisse der deutschen Eisenbahn-Verwaltungen abzuhelfen, bei denen Pensions-Cassen für Invaliden und für die Wittwen der Eisenbahn-Beamten bestehen, und muss als ein verdienstliches Unternehmen bezeichnet werden. Denn die von dem Verfasser berechneten Tafeln machen es jeder Eisenbahn-Verwaltung möglich, die Bestandfähigkeit ihrer Pensionscasse zu prüfen und den für dieselbe etwa erforderlichen Zuschuss zur rechten Zeit zu ermitteln. Ohne diese Tafeln würde bei der Eigenthümlichkeit der Einrichtungen dieser Pensionscassen eine solche Berechnung so mühselig sein, dass sie nicht leicht ausgeführt werden würde.

Die Eisenbahn-Verwaltungen sichern nämlich ihren Officianten Invaliden-Pensionen zu, deren Höhe von dem Dienstalter zur Zeit des Eintritts der Invalidität abhängt und mit diesem Dienstalter sich steigert; ebenso richtet sich die Höhe der gewährten und den

Officianten zugesicherten Wittwen-Pensionen nach dem Dienstalter zur Zeit der Invalidität oder des Todes. Die Anzahl der möglichen Steigerungen ist bei den verschiedenen Verwaltungen höchst verschieden. Herr Albert hat nun für die sogenannten baaren Werthe der in arithmetischer Progression steigenden Invaliden- und Wittwen-Pensionen Tafeln berechnet, deren Gebrauch für die Feststellung der Bilanz einer Eisenbahn-Pensionscasse eben so bequem ist, als die Benutzung der Lebens- und Wittwen-Renten-Tafeln für die Zwecke der gewöhnlichen Lebens- und Wittwen-Renten-Versicherung.

Die Grundlagen der Berechnung sind die bekannten Brune'schen Mortalitätstafeln für Männer und Frauen nach den Erfahrungen der Allgemeinen Preussischen Wittwen-Verpflegungs-Anstalt, gegen deren Anwendbarkeit für den vorliegenden Zweck nichts zu erinnern sein dürfte.

Weniger sicher ist die Grundlage für die Berechnung der Invaliden-Pensionen, indem es hiefür an genügenden Erfahrungen noch fehlt und einstweilen eine Hypothese aushelfen muss. Der Verfasser folgt hierin dem Vorgange von Dr. Heim und Dr. Wiegand und lässt die Anzahl derjenigen, welche von einer ursprünglichen Anzahl gleichalteriger gesunder Personen im Verlauf der Jahre successive invalide werden, eine geometrische Progression bilden. Es giebt aber zwei Hypothesen dieser Art, die einen so weiten Spielraum lassen, dass es, wenn nicht im mathematischen Sinne wahrscheinlich, doch jedenfalls plausibel ist, dass die Wahrheit dazwischen fallen wird, und berücksichtigt ausserdem den Umstand, dass die Invaliden etwas rascher sterben werden, als die Nichtinvaliden.

Die Unsicherheit dieser Grundlage kann man, ohne unbillig zu sein, nicht als einen Mangel der Arbeit ansehen; man muss vielmehr es dem Verfasser Dank wissen, dass er sich durch den Mangel an einer solchen Grundlage von seiner mühevollen Arbeit nicht hat abhalten lassen, indem die den Eisenbahn-Verwaltungen durch dieselbe gewährte Erleichterung zur approximativen Berechnung ihrer Pensionscassen von selbst zur Gewinnung besserer Grundlagen führen wird.

Die Anwendbarkeit der berechneten Tafeln ist übrigens nicht auf Eisenbahn-Verwaltungen beschränkt, indem es auch für die im öffentlichen Dienste Angestellten nicht an Pensionscassen mit steigenden Pensionen fehlt.

Der Verfasser hat auch Näherungswerthe für die Waisen-Pensionen, wie die Eisenbahn-Pensions-Cassen solche zu gewäh-

ren pflegen, auf eigenthümliche Art berechnet und in Tafeln gebracht, die mit Sicherheit benutzt werden können, weil sie nachweislich höher sind, als die wahren Werthe.

Die Anwendbarkeit dieser verschiedenen Tafeln auf die bunte Mannigfaltigkeit der Bestimmungen bei den Pensions-Cassen der verschiedenen deutschen Eisenbahnen wird besonders anschaulich durch die Tafeln No. 28 und 29, wo der Verfasser für eine grosse Anzahl Eisenbahnen die Formeln angiebt, nach welchen sie seine Tafeln zu benutzen haben, um ihre Bilanzen zu ziehen. Die Erläuterungen sind kurz und gedrängt, aber für Jeden, der die Elemente der Theorie der Leibrenten und überhaupt der vom Leben und Sterben abhängigen Versicherungen kennt, vollkommen verständlich; die Ableitung der Formeln ist nicht ohne eigenthümliche Eleganz. In dieser Beziehung ist besonders die Umgestaltung der gewöhnlichen Formel für die Wittwenrente hervorzuheben, um den Werth einer mit dem Dienstalter des Mannes steigenden Wittwenrente zu erhalten, deren Steigerung mit dem Tode des Mannes zum Abschluss gelangt.

Es kann daher diese Arbeit nicht bloss den Eisenbahn-Verwaltungen, sondern auch der Beachtung der für ihren Gegenstand sich interessirenden Leser des Archivs mit Recht empfohlen werden.

Schwerin, im März 1863. M. C. Dippe.

Tafel-Fehler.

Herr Professor Houël in Bordeaux, dessen im Liter. Ber. Nr. CL. S. 1. ausführlich angezeigten, so ungemein bequemen, namentlich aber auch die Sicherheit und Genauigkeit der Rechnungen so sehr fördernden fünfstelligen Tafeln (Paris, Mallet-Bachelier, 1858) allen Rechnern, namentlich aber auch den Schulen, nicht genug empfohlen werden können, und von denen eine Ausgabe mit deutscher Einleitung sehr zu wünschen wäre, hat die Güte gehabt, mir Folgendes mitzutheilen, was ich grösserer Sicherheit wegen grösstentheils mit seinen eigenen Worten wiedergeben will, indem ich ihm für diese Mittheilungen verbindlichst danke:

„Permettez moi“ — schreibt mir Herr Houël — „de vous signaler une nouvelle faute dans la table des coefficients binomiaux pour la puissance $-\frac{1}{2}$, qui est reproduite dans les recueils de Hülsse et de Köhler d'après le vieux Vega de 1783. Déjà, sur mes indications, on avait corrigé, dans la 7e édition de Köhler, le logarithme de $\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}$. Un de mes collégues et amis,

M. Bourget, Professeur à la faculté des sciences de Clermont-Ferrand, vient de me faire remarquer que le log. de $\frac{1.3.5\ldots.13}{2.4.6\ldots.14}$ est $\bar{1},3211273$ et non $\bar{1},3201273$."

„J'ai envoyé ces jours derniers à M. Bernh. Tauchnitz une liste de fautes que j'ai découvertes sans beaucoup chercher dans le volumineux recueil de formules que contiennent les Tables de Köhler. Je n'ai que la 6ᵉ édition entre les mains, et je ne sais si l'on a fait des corrections dans les éditions suivantes. Mais il est étonnant que ces fautes n'aient pas été remarquées plustôt."

„Pendant que je vous parle de tables, je désirerais bien que vous fissiez à M. Schrön un reproche grave pour avoir, comme Callet, oublié de joindre à ses belles tables quelques lignes renfermant les logarithmes des nombres usuels π, e, log. nat. 10, arc 1″, $\frac{1}{\text{arc } 1''}$ etc. Cet oubli rend l'usage de ces Tables très incommode dans certains cas, et il serait bien facile de le réparer."

Herr Hoüel verdient gewiss grossen Dank für diese Mittheilungen. Herr Tauchnitz wird aber gewiss nicht unterlassen, eine genaue Vergleichung der älteren und neueren Ausgaben der Köhler'schen Tafeln anstellen zu lassen und die ihm angezeigten Fehler zu verbessern. Die schönen Schrön'schen Tafeln (Ausgabe 1860, auf die ich mich jetzt nur beziehen kann) enthalten überhaupt keine Formelsammlung, auch nicht die Logarithmen oft zur Anwendung kommender constanter Zahlen, eben so wenig diese Zahlen selbst, so dass also deren Mittheilung wohl überhaupt nicht in dem Plane des Herrn Herausgebers gelegen hat. Da aber der Wunsch, die wichtigsten dieser Zahlen in den Tafeln zu besitzen, jedenfalls ein sehr gerechtfertigter ist, so werden sowohl Herr Professor Schrön, als auch die treffliche Verlagshandlung, die kein Opfer scheuet, um diesen ausgezeichneten Tafeln eine immer grössere Vollendung zu geben, gewiss nicht den geringsten Anstand nehmen, in die neuen Ausgaben die gewünschten Zahlen noch aufzunehmen. G.

Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der königl. Bayer. Akademie der Wissenschaften zu München. (Vergl. Literar. Bericht Nr. CLVII. S. 15.)

1862. II. Heft III. Pettenkofer: Ueber die Bestimmung des bei der Respiration ausgeschiedenen Wasserstoff- und Gruben-Gases. S. 162.

1862. II. Heft IV. Jolly: Ueber Bathometer und graphische Thermometer (mit zwei Holzschnitten). S. 248—S. 279. (Wir machen auf diese ausführliche und lehrreiche Abhandlung recht sehr aufmerksam, auch in nautischer Beziehung. Nach einer kurzen Charakterisirung der bisher bekannten Instrumente beschreibt Herr Jolly dann, ausgehend von der Idee von Hales (S. 253.), einen eigenen einfachen graphischen Apparat, dessen Theorie er sodann sehr sorgfältig mathematisch entwickelt und hierauf eine grössere Reihe im Königssee bei Berchtesgaden, in dem davon ungefähr 2 Kilometer entfernten Obersee und im Walchensee angestellter Tiefenmessung mittheilt. Wir empfehlen, wie gesagt, diese Abhandlung zur sorgfältigsten Beachtung.)

1863. I. Heft I. Steinheil: Ueber Verbesserungen in der Construction der Spectral-Apparate. S. 47. (Der Studiosus von Littrow in Wien, Sohn des Directors der dortigen Sternwarte, hat auf die ihm eigenthümliche schöne Idee, die Lichtspalte zur Erzeugung des Spectrums nicht wie bisher durch ein eigenes Fernrohr hervorzubringen, sondern in das zur Betrachtung des Bildes bestimmte Fernrohr selbst zu verlegen und dann durch Spiegelung das Bild des Spectrums zu betrachten, ein neues Instrument zur Spectral-Analyse gegründet. Dadurch ist nicht nur ein Fernrohr genügend, während bisher zwei erforderlich waren, sondern es verdoppelt sich auch durch das Spiegelbild die Anzahl und die Wirkung (wenigstens zum Theil) der Prismen, so dass der in Wien construirte Apparat mit vier Prismen einem älteren gleichkommen würde mit acht ähnlichen Prismen. Herr v. Littrow jun. hat noch andere sinnreiche Verbesserungen an dem Apparate angebracht, der jetzt einen viel kleineren Raum einnimmt und in einem Kästchen aufgestellt ist, welches zugleich als dunkele Kammer dient. Ueber alle diese verdienstlichen Verbesserungen verbreitet Herr v. Steinheil sich in dem vorliegenden Aufsatze mit bekannter Genialität, so dass wir Alle, die sich mit Spectral-Analyse beschäftigen, auf diesen Aufsatz des Herrn v. Steinheil, so wie auf den neuen Wiener Apparat selbst, der auch von Herrn v. Ettingshausen sehr empfohlen wird, dringend aufmerksam machen müssen.) — v. Kobell: a) Ueber ein Gemsbart-Elektroskop und über Mineral-Elektricität. S. 51. b) Ueber Asterismus. Stauroskopische Bemerkungen. S. 65. (Auch diese Aufsätze haben wir mit Interesse gelesen und empfehlen sie der Beachtung.) — Herm. v. Schlagintweit: Ueber die Temperatur-Verhältnisse des Jahres und der Monate in Indien. S. 67.

Preisaufgabe der Akademie der Wissenschaften in Bologna.

Da auf die von der Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna für 1862 gestellte, den Galvanismus betreffende Preisaufgabe (s. Literar. Ber. CXLV. S. 18.) eine Bewerbungsschrift nicht eingegangen ist, so ist diese Aufgabe unter dem 26. Februar d. J. für 1865 wiederholt worden. Um die Aufmerksamkeit so viel als möglich auf diese Aufgabe hinzulenken, lasse ich daher das desfallsige neue, mir gütigst zur Veröffentlichung zugegangene Programm im Nachstehenden abdrucken, und wünsche sehr, dass diese Aufgabe die Beachtung, welche sie so sehr verdient, in jeder Beziehung finden möge. Grunert.

PROGRAMMA

DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA

PEL

CONCORSO AL PREMIO ALDINI SUL GALVANISMO

PER L'ANNO 1865.

Non essendo pervenuta alcuna Memoria al Concorso pel 1862, *si ripropone lo stesso Tema e, riconosciutane la molta importanza, e le non lievi difficoltà che gli vanno congiunte, se ne aumenta il premio, modificandone le condizioni, come segue.*

I muscoli ed i nervi della rana sono sedi di correnti elettriche, le quali diedero materia a due Dissertazioni, premiate da quest' Accademia, ed elaborate dai chmi Professori Grimelli e Cima per rispondere a due temi proposti pe' concorsi al premio Aldini. Stando massimamente ad una recentissima Pubblicazione del Sig. Budge, Professore nell' Università di Greifswald, è sede di corrente elettrica nella rana anche la pelle. L'Accademia che ha sempre cercato di conoscere ben chiaro ed appurato quanto erasi scoperto in fatto d' elettricità in quell' animale, ond' ebbe origine il Galvanismo, non può non cercar di conoscere eziandio quanto è stato dipoi scoperto intorno al medesimo, e perciò anche quanto può esser riferibile all' ultima memorata corrente. Propone quindi il seguente

Quesito.

1°. Esaminare ed esporre ciò che dai fisici e dai fisiologi è stato trovato di rilevante intorno alle correnti muscolari, nervee

e di contrazione della rana dopo le sopraccennate Dissertazioni dei Professori Grimelli e Cima: e sopratutto la vera importanza dello stato elettro-tonico dei nervi, assai grande secondo le diligenti ricerche del Sig. Pflüger, e pressochè nulla giusta il parere del sopradetto Sig. Budge: e

2º. Indagare con precise e concludenti esperienze se veramente nella pelle della rana si manifesti una corrente elettrica: e, nel caso affermativo, quali sieno le leggi di questa corrente: se debbasi o no riguardare come fenomeno fisiologico: e se abbia veruna attinenza colle altre correnti.

Richie del' Accademia, che dai fatti relativi alla rana non si scompagnino i fatti analoghi osservati in altri animali, ma che vengano anch' essi riferiti e discussi, riunendo così in un tutto solo quanto, in relazione all' oggetto in discorso, e sino al termine assegnato a questo Concorso, sarà ben conosciuto circa all' economia animale.

Si retribuirà un premio di *lire italiane duemila* all' Autore dello scritto che, colle suddette avvertenze e condizioni, presenti, a giudizio dell' Accademia, la miglior soluzione del proposto tema.

Le Memorie per questo Concorso dovranno pervenire *franche* a Bologna entro il mese di Dicembre milleottocentosessantacinque con questo preciso indirizzo = Al Segretario dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna =: un tale termine è di rigore, e perciò non sarebber ricevute pel Concorso le Memorie che giungessero all' Accademia, spirato l' ultimo dì dell' indicato mese. Dovranno essere scritte o in italiano, o in latino, o in francese, e in caratteri facilmente leggibili. L' Accademia richiede la maggiore esattezza nelle citazioni di Opere stampate, e la maggiore esattezza nelle citazioni di Opere stampate, e la maggiore autenticità ne' documenti in iscritto, che agli Autori torni di menzionare a prova, o conforto di loro asserzioni. Ciascun concorrente dovrà contrassegnare con un' epigrafe qualsiasi la sua Memoria, ed accompagnare questa d' una scheda suggellata, la quale racchiuda il nome, cognome ed indirizzo di lui, ed abbia ripetuta all' esterno la predetta epigrafe. I concorrenti avranno tutta la cura di non farsi conoscere; poichè quegli, che per qualche espressione della sua Memoria, o in qualsivoglia altra maniera si facesse conoscere, verrebbe escluso dal Concorso. Spirato il sopradetto termine, e succeduto il giudizio delle Memorie di Concorso, secondo l' analogo Regolamento dell' Accademia, verrà aperta la sola scheda della Memoria meritevole del Premio, e del premiato si pubblicherà tosto il nome.

Bologna dalla Residenza dell' Istituto il dì 26 Febbraio 1863.

IL PRESIDENTE
Prof. Giuseppe Bertoloni.

IL SEGRETARIO
Dott. Domenico Piani.

Mathematische und physikalische Bibliographie.

LVIII.

Systeme, Lehr- und Wörterbücher.

H. Bolze, Leitfaden zum Unterricht in der Mathematik. 2 Thle. (I.: Arithmetik. 5 Sgr. — II.: ebene Geometrie. 3 Sgr.) 2. Aufl. 8°. geh. Cottbus. 8 Sgr.

Th. Wittstein, Lehrbuch der Elementar-Mathematik. I. Bd. 1. Abth.: Arithmetik. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Hannover. 20 Sgr.

Arithmetik.

E. F. August, Vollständige logarithmische und trigonometrische Tafeln, zum Theil in neuer Anordnung, durch Zusätze erweitert und mit ausführlichen Erläuterungen versehen. 5. Aufl. 8°. cart. Leipzig. 15 Sgr.

M. Blands sämmtliche algebraische Gleichungen des 1. und 2. Grades, theils mit, theils ohne Auflösungen. Nach dem Englischen bearb. v. C. Girl. 2 Bde. 2. Aufl. gr. 8°. geh. Halle. 2 Thlr.

H. Hankel, Die Euler'schen Integrale bei beschränkter Variabilität des Argumentes. gr. 8°. geh. Leipzig. 10 Ngr.

C. Hermite, Uebersicht der Theorie der elliptischen Functionen. Aus dem Französischen übertragen und mit einem Anhange versehen von L. Natani. gr. 8°. Berlin. 28 Ngr.

F. Močnik, Trattato di algebra pel ginnasio superiore. Traduzione per cura del P. Magrini. Ediz. II. 8°. geh. Wien. $3\frac{1}{3}$ Thlr.

F. A. Prym, Theoria nova functionum ultraellipticarum. Pars I. gr. 4°. Berlin. geh. 15 Sgr.

H. Schmidt, Lehrsätze der elementaren Arithmetik. In logischer Folge geordnet. 8°. geh. Görlitz. 4 Ngr.

J. Temme, Leitfaden der Algebra für Gymnasien und andere Lehranstalten. gr. 8°. geh. Arnsberg. 10 Ngr.

Naturkundige Verhandelingen van de Hollandsche maatschappij der wetenschappen te Haarlem. 2te Verzameling. Deel XVI. XVII. en XIX., 1te stuk. Haarlem. 4°. Mit 29 Taf. (XVII.: D. Bierens de Haan, Mémoire sur une méthode pour déduire quelques intégrales définies, en partie très-générales, prises entre les limites 0 et ∞ et contenant des fonctions circulaires directes.) 14 Thlr. 24 Ngr.

H. Weissenborn, Die geometrische Deutung imaginärer und

complexer Zahlen und ihre Anwendung auf Geometrie. gr. 8°. geh. Eisenach. 2 Ngr.

A. Winckler, Ueber einige Eigenschaften der Kugelfunctionen einer Veränderlichen und der Coefficienten von Reihen, welche nach Kugelfunctionen entwickelt sind. gr. 4°. geh. Wien. 18 Ngr.

G. Wirth, Algebraische Aufgaben, gesammelt und mit elementaren Lösungen versehen. 3. Aufl. 8°. geh. Langensalza. 9 Ngr.

Geometrie.

L. Fritze, Erster Unterricht in der Raumlehre. Ein Hülfsbüchlein für den Schul- und Präparanden-Unterricht. 8°. geh. Wriezen. 5 Sgr.

M. H. und C. Th. Meyer, Lehrbuch der axonometrischen Projectionslehre. 4. Lief. gr. 8°. Mit Atlas in Fol. In Couvert. Leipzig. 2 Thlr.

Geodäsie.

C. Bremiker, Theorie des Amsler'schen Polarplanimeters. gr. 8°. geh. Berlin. 10 Ngr.

G. Günther, Tachymeter, Tachymetrie, Tachygraphie (Schnellmesser, Schnellmessung, Schnellzeichnung). gr. 8°. geh. Wien. 20 Sgr.

G. Chr. K. Hunäus, Die geometrischen Instrumente der gesammten praktischen Geometrie, deren Theorie, Beschreibung und Gebrauch. Nebst einem Anhang über die wichtigsten Ausgleichungen der praktischen Geometrie nach der Methode der kleinsten Quadrate, ausgeführt an praktisch-geodätischen Aufgaben. 2. Hft. Hannover. 8°. Mit 3 Holzschnitttaf. 2 Thlr. 12 Ngr. Inhalt: Die Winkelmesser mit fester Unterlage, mit Ausschluss der Nivellir-Instrumente. Mit 77 Holzschn.

Mechanik.

F. Lippich, Ueber die transversalen Schwingungen belasteter Stäbe. gr. 4°. geh. Wien. 1 Thlr. 4 Ngr.

Optik.

J. Vollweider, Perspective. 1. Abtheil.: Die Perspective der Umrisse. Nebst Atlas mit 30 Taf. 8°. Stuttgart. 4 Thlr.

Astronomie.

Annales de l'Observatoire imperial de Paris, publiées par U. J. Leverrier. Observations. Tome 17. In-4°. Paris. 40 fr.

F. W. A. Argelander, Astronomische Beobachtungen auf der Sternwarte der k. rheinisch. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn angestellt. 5. Bd. Bonner Sternverzeichniss. 3. Sect. gr. 4°. geh. Bonn. 5 Thlr.

Literarischer Bericht
CLIX.

Francesco Carlini.

Notizie sulla vita e sugli scritti di Francesco Carlini, raccolte da G. V. Schiaparelli, Direttore dell' osservatorio astronomico di Brera, Membro effettivo del R. Istituto Lombardo di scienze, lettere e arti. Lette nella tornata del medesimo Istituto il 18 Decembre 1862. 37 Seiten.

Herr Schiaparelli, der Nachfolger Carlini's als Director der berühmten Sternwarte der Brera in Mailand, an welcher vor Carlini, und theilweise noch mit demselben, Männer wie Oriani, der berühmte Verfasser der „Elementi di Trigonometria sferoidica. Bologna. 1806. *)“ und vieler anderer wichtiger Schriften, ferner Reggio und Cesaris wirkten, hat in dieser Schrift eine sehr interessante Lebensbeschreibung und sehr eingehende Würdigung der wissenschaftlichen Verdienste des genannten berühmten Astronomen und Mathematikers geliefert und zugleich den trefflichen Mann rücksichtlich seines ganzen äusseren und inneren Wesens so schön und mit so vieler Pietät geschildert, dass wir unsere Leser recht sehr auf diese ausgezeichnete Schrift aufmerksam machen müssen. Eine ganz besonders dankenswerthe und wichtige Beigabe ist aber auch der „Elenco dei principali Scritti pubblicati da Franzesco Carlini.“ Die Zahl dieser Schriften beträgt 144 und legt das deutlichste Zeugniss von Carlini's reichem Geiste ab, da diese Schriften sich über die verschiedensten Gebiete der Astronomie und ihrer sämmtlichen Hülfswissenschaften, insbesondere auch der reinen Mathematik, so wie der Physik, und selbst der socialen Wissenschaften ver-

---

*) M. vergl. Sphäroidische Trigonometrie von Dr. J. A. Grunert. Berlin. 1833. 4°. (Vorrede.)

breiten. Je mehr es unser Wunsch ist, dass die Leser des Archivs sich mit dieser ausgezeichneten Schrift selbst bekannt machen: desto mehr glauben wir uns hier nur mit dem folgenden kurzen Auszuge aus derselben begnügen zu dürfen und zu müssen.

Francesco Carlini wurde am 7. Januar 1783 *) in Mailand geboren. Sein Vater war Carlo Giuseppe Carlini, addetto alla Biblioteca di Brera, e da Rosa Minola. Seinen ersten Unterricht erhielt er von seinem Vater, besuchte dann das Gymnasium der Brera und befleissigte sich in seiner ersten Jugend verschiedener wissenschaftlicher Studien, insbesondere auch der Mathematik und der Architektur, gewann aber sehr bald eine vorherrschende Neigung für das Studium der Astronomie, welche künftig den Beruf und den Ruhm seines Lebens ausmachen sollte. Nachdem er sich schon vielfach astronomischen Arbeiten und Rechnungen gewidmet hatte, wurde er im Jahre 1799 Eleve der durch die oben genannten Astronomen so berühmten Sternwarte der Brera in Mailand, die damals keiner anderen europäischen Sternwarte nachstand, und zugleich bei der „Commissione dei pesi e misure per il regno d' Italia" beschäftigt. Im Jahre 1803 erhielt er das Diplom der Mathematik von der Universität in Pavia und wurde 1804 zum Grade eines Astronomo sopranumerario bei der genannten Sternwarte befördert. Nach Angelo de Cesaris Tode ward ihm im Jahre 1832 das Directorium der Sternwarte übertragen, indem er zugleich in demselben sich mit Gabriella Sabatelli, Tochter eines berühmten Künstlers, verheirathet hatte, mit welcher er in ruhiger Einfachheit lebte, bis er am 29. August 1862 einer schrecklichen Krankheit der Eingeweide erlag: „Cosi dovea il Nestore degli odierni astronomi, ottuagenario, perire di morte immatura, prodotto non già da debolezza senile, ma da morbo di carattere violento. Ei dico di morte immatura; poichè il corpo, sebben di molti anni, robusto era tuttavia, ed atto a più longa vita; più del corpo ancora eran rimaste intatte le facoltà dello spirito." — „Fu Carlini d'aspetto non disaggradevole, di statura media e di robusta costituzione di corpo. Si condusse senza troppo gravi incomodi fino all' età di anni quasi ottanta, grazie al temperato suo vivere, ed alla attività ben regolata in cui teneva le sue forze fisiche ed intellettuali. Amò sopratutto la quiete, e fuggi volentieri i rumori del mondo e le questioni d'ogni natura."

Nach dem Beispiele Oriani's vermachte Carlini der Sternwarte eine namhafte Summe zur Verwendung für wissenschaft-

---

*) M. vergl. meine vorläufige kurze Notiz von dem Tode Carlini's im Literar. Ber. Nr. CLIII. S. 1.

liche Zwecke, so wie seine Manuscripte; dem „Istituto Lombardo di scienze, lettere e arti“ seine zahlreiche Sammlung wissenschaftlicher Werke.

Die wichtigsten Arbeiten Carlini's gehören natürlich den Gebieten der Astronomie, Geodäsie und Meteorologie an. Er war aber auch ein geschickter und scharfsinniger Analyst, wie die nachstehend genannten Abhandlungen zeigen:

Ricerca sulla convergenza della serie che serve alla risoluzione del problema di Keplero. (Effemeridi astronomiche di Milano. 1818. Eine Uebersetzung und Berichtigung eines Irrthums lieferte Jacobi in den Astronomischen Nachrichten. Nr. 709.)

Sopra alcune funzioni esponenziali comprese nella formula x^{x^n}. (Memorie dell' Istituto del Regno Lombardo Veneto. Tom. I.)

Sulla proprietà delle funzioni algebriche conjugate. (Wiener Sitzungsberichte. Juli. 1854.)

Algoritmo delle perturbazioni lunari, mit einer Einleitung: Sul calcolo delle quantità periodiche. (Memorie dell' Istituto del Regno Lombardo Veneto. Tom. V.)

Ueber die Logarithmentafeln mit zehn Decimalen. (Jahrbücher des polytechn. Instituts in Wien. Thl. X.)

Carlini's astronomische und verwandte Arbeiten sind so mannigfaltig und erstrecken sich so sehr über das ganze Gebiet der Wissenschaft, dass wir hier nur einige der wichtigeren derselben hervorheben können, im Uebrigen uns auf die schöne Schrift Herrn Schiaparelli's selbst beziehen müssen.

Unter seinen theoretischen astronomischen Arbeiten sind vorzüglich und zunächst die

> Tavole del Sole per il Meridiano di Milano, secondo gli elementi del celebre signor Delambre. Milano. 1810.

zu nennen. Als Carlini in die astronomische Laufbahn eintrat, waren vorzüglich die Sonnentafeln von Delambre in Gebrauch; nachdem aber Carlini dieselben einer genauen Prüfung unterworfen hatte, erwiesen sie sich so fehlerhaft, dass er sich entschloss, unter Beibehaltung der von Delambre angewandten Constanten sie von Neuem für den Meridian von Mailand zu berechnen, und zwar nach einem eigenen Systeme, worüber er sich in der Esposi-

zione di un nuovo metodo di costruire le Tavole astronomiche, applicato alle Tavole del Sole. Milano. 1810. weiter aussprach. Gleichen Fleiss und Eifer widmete er in Verbindung mit Plana der Theorie des Mondes, über welche beide Astronomen in der Correspondance astronomique von Zach (Tom. IV.) die beiden Abhandlungen: Observations sur un écrit de M. de Laplace sur le perfectionnement de la Théorie de la Lune et des Tables Lunaires (1820) und Note sur l'équation lunaire ayant pour argument le double de la différence entre le noeud et le périgée (1820) veröffentlichten; Carlini's Tavole Lunari blieben aber ungedruckt. Ausserdem erstreckten sich, wie schon erinnert, seine theoretischen Arbeiten über fast alle Theile der Astronomie, z. B. Planeten- und Cometentheorie, astronomische Refraction u. s. w. Von besonderem Interesse ist auch seine Abhandlung: Sull' ineguale distribuzione del calore nel globo solare recentemente annunziata dal signor Nervander (Giornale dell' Istituto Lombardo e Biblioteca Italiana. Milano. Tom. XIII.)

Seinen Pflichten als Beobachter entsprach er bis in's höchste Alter mit der grössten Gewissenhaftigkeit. „Spettacolo commovente" sagt der Herr Verfasser, „era il vedere l'ottuagenario sacerdote d'Urania, stanco ancora dai calcoli e dagli studi del giorno, salire la sera con lento, ma fermo passo sulla vetta delle nostre torri, per ivi adempiere a doveri, da cui la grave età avrebbe potuto dispensarlo: esempio ammirabile e non abbastanza imitato! Ma a lui, per vincere la debolezza dell' età e l'inclemenza delle stagioni dava forza l'amore dei veri scientifici, quel sacro e purissimo fuoco, che sostenne Keplero nei suoi domestici infortunii, ed animò Galileo nelle carceri del Sant' Uffizio: e senza di cui si potranno avere mediocri osservatori e computisti, non mai de' grandi astronomi."

Ganz in der Kürze können wir nur noch erwähnen Carlini's berühmte geodätische Arbeiten (in Verbindung mit Plana), seine meteorologischen und magnetischen Arbeiten, seine Abhandlung: Sulla legge delle variazioni orarie del barometro, seine Tavole per calcolo delle altezze barometriche u. s. w.

Besonderes Interesse fand er auch an mechanischen Arbeiten, wie u. A. seine Descrizione di una machinetta che serve a risolvere il problema di Keplero zeigt; er war mit einer reichen und glühenden Phantasie begabt, der klassischen Literatur seines Vaterlandes vollständig kundig, so wie der alten Spra-

chen und fünf lebender Sprachen vollkommen mächtig, Verfasser vieler Necrologe verstorbener Mathematiker und Astronomen, viele Jahre einer der Redactoren der Biblioteca Italiana, in den Congressi Scientifici Italiani in diverse città und bei den Distribuzioni dei premii d'industria (1834, 1837, 1839, 1843) stets eifrigst betheiligt.

Es liegt uns hier ein so reiches, mit den schönsten und glücklichsten Erfolgen gekröntes Leben vor, wie es wenig Sterblichen von der Vorsehung beschieden sein mag; und Herr Schiaparelli verdient den wärmsten Dank für seine treffliche Schrift. Möge Italien immer viele solche Männer besitzen wie

Francesco Carlini!

Ferdinand Redtenbacher *).

Der Trauerzug, welcher sich am Abend des 17. April durch die Strassen unserer Stadt bewegte, erwies einem Manne die letzte Ehre, der sich um die Stadt, um das Land, um die deutsche Industrie und Wissenschaft die grössten Verdienste erworben hat, dessen Name der polytechnischen Schule und der dort von ihm vertretenen Disziplin in unvergänglichen Zügen eingegraben ist.

Ferdinand Jakob Redtenbacher wurde am 25. Juli 1809 in der ober-österreichischen Stadt Steyer geboren, dem Sitz uralter Eisenindustrie, in einer Gegend, wo ein freierer Geist in den berühmten Klöstern Kremsmünster und St. Florian seit langer Zeit sich ein wissenschaftliches Asyl gerettet hatte. Dort, im Angesicht der sich erhebenden steierischen Alpen, verlebte Redtenbacher seine erste Jugendzeit im elterlichen Hause, trat aber schon mit dem elften Jahre in ein Kaufmannsgeschäft, so dass die Elementarbildung in dem Augenblick unterbrochen wurde, wo sie am fruchtbarsten zu werden beginnt. Die jugendliche Natur ertrug diese vorzeitige Praxis nicht, sie sträubte sich überdies gegen eine Thätigkeit, deren Grenzen ihr zu eng gesteckt waren. Mit dem dreizehnten Jahre kehrte Redtenbacher zur Schule zurück, diesmal zur Realschule in Linz. Man weiss, wie es, zumal in jener Zeit, mit diesen Anstalten bestellt, wie ihnen die knappste, mechanischste Vorbereitung zur Praxis als ausschliessliche Aufgabe gestellt war. Nachdem er sich kaum drei Jahre dem Studium der Mathematik gewidmet hatte, rief ihn schon 1825

---

*) Karlsruher Zeitung. 1863. Nr. 93.

die Arbeit des Lebens zum zweiten Male ab; er trat bei der Linzer Baudirektion als Aushilfe zum Zeichnen von Bauplänen ein. Aber zum zweiten Male schüttelte der nun schon selbstbewusstere Geist die Fesseln ab, die seinen höhern Flug zu hemmen drohten; bereits Ende 1825 ergriff der sechszehnjährige Alpensohn den Wanderstab, um durch das schöne Donauthal hinabzuziehen zur Kaiserstadt und auf der dortigen polytechnischen Schule den Grund zu legen zu seiner Lebensarbeit.

Bis Ende 1829 lag Redtenbacher mit der ihm früh eigenen rastlosen Energie dem Studium der reinen und angewandten Mathematik und der mit dem Wasser- und Strassenbau zusammenhängenden technischen Fächer ob. Seine Lehrer, unter denen die Herren Artzberger und v. Ettingshausen ihm eine besondere Theilnahme widmeten, erkannten früh seine hervorragende Begabung und wirkten bereitwillig mit, ihm den Weg zu dem Berufe zu bahnen, für welchen die Natur ihn so reichlich ausgestattet hatte. Er hat ihnen bis zu seinem Lebensende mit wahrhaft inniger Verehrung und Dankbarkeit vergolten, für die er noch während der schweren Leiden seiner letzten Tage wiederholt Worte fand.

Die Anstalt, die ihn gebildet, bot seinen Kräften sofort eine Verwendung; im November 1829 wurde er als Assistent für das Lehrfach des Maschinenbaues angestellt und blieb vier Jahre lang in dieser Thätigkeit. Es war ihm dadurch nicht nur die umfassendste Benützung aller der wissenschaftlichen Hilfsmittel geöffnet, über welche das polytechnische Institut verfügte, sondern er konnte in den Jahren, wo der Geist sich ganz frei nach allen Seiten zu entfalten liebt, den reichen Anregungen einer europäischen Hauptstadt nachgehen. Er konnte in den herrlichen Sammlungen Wiens die ersten Blicke in das Gebiet der bildenden Künste werfen; im Burgtheater gingen die Meisterwerke deutscher Dichtkunst vor ihm auf; das wissenschaftliche Leben stand zwar damals in enge Schranken eingeschlossen, aber Redtenbacher wusste sie zu durchbrechen: schon damals machte er die erste Bekanntschaft mit der deutschen Philosophie. Das dolce far niente, welches in dem alten Wien gewissermassen seine Residenz aufgeschlagen hatte, vermochte diese stählerne Natur niemals einzulullen.

1833 führte Redtenbacher die glänzende Empfehlung wissenschaftlicher Kapazitäten als Lehrer der Mathematik und des geometrischen Zeichnens an die höhere Industrieschule zu Zürich, wo er denn schon nach zwei Jahren zum Professor der praktischen Mathematik ernannt wurde. Er blieb in dieser Stellung bis 1841. Das Leben der Schweiz bereicherte seinen Gesichtskreis hauptsächlich in einer Richtung: ihm ging der Begriff des freien Staats,

die Bedeutung des politischen Organismus für das Gedeihen nicht nur einer Nation, sondern eben so sehr des einzelnen Individuums auf. Er hat der Schweiz und ihrem gesunden Bürgerthum stets eine liebevolle Anhänglichkeit bewahrt. An sie waren ausserdem die Erinnerungen der ersten glücklichen Häuslichkeit geknüpft; denn als Züricher Professor verheirathete er sich im Jahre 1837 mit seiner treuen Lebensgefährtin, Marie Redtenbacher, die ihm zwei Kinder, eine Tochter und einen Sohn, schenkte.

1841 berief ihn die grossherzogliche Regierung als Professor des Maschinenbaues an die hiesige polytechnische Schule, der er dann volle einundzwanzig Jahre mit der ganzen Kraft seines reichen Geistes gedient hat, deren glänzender Aufschwung mit seiner Wirksamkeit unzertrennlich verknüpft ist. Nachdem er am 4. September 1854 in Anerkennung seiner Verdienste zum Hofrath ernannt war, übertrug ihm das Staatsministerium durch Erlass vom 15. Mai 1857 die Direktion der Anstalt; er hat dieselbe bis zum 18. Januar d. J. fortgeführt, bis zu einem Moment, wo eine tödtliche Krankheit seine Kräfte bereits zum Aeussersten erschöpft hatte. Wir brauchen hier nicht bei einer Schilderung seiner Verdienste als Lehrer und Leiter der Anstalt zu verweilen, die in Jedermanns Munde leben; die Schule wuchs mit ihm und er mit ihr zu europäischer Berühmtheit. Wenn heute Maschinenbauer, Ingenieure und Architekten aus allen Ländern unseres Erdtheils, ja aus Nord- und Südamerika in Karlsruhe sich zusammen finden, so ist Niemand, der dem Todten den Ruhm verweigerte, zu dieser Bedeutung der Schule ganz vornehmlich beigetragen zu haben. Mit seiner hervorragenden Lehrthätigkeit waren aber die umfassendsten wissenschaftlichen Arbeiten verknüpft, welche nicht allein das gesammte Gebiet des eigentlichen Maschinenbaues betrafen, sondern auch die benachbarten naturwissenschaftlichen Disziplinen in ihren Kreis zogen. Indem wir unten ein vollständiges Verzeichniss der Redtenbacher'schen Werke anfügen *), müssen wir

---

*) Theorie und Bau der Turbinen und Ventilatoren, 1844. Theorie und Bau der Wasserräder, 1846. Resultate für den Maschinenbau, 1848. Prinzipien der Mechanik, 1852. Resultate für den Maschinenbau; zweite Auflage, 1852. Die Luftexpansionsmaschine (Calorische Maschine), 1853. Dieselbe, zweite Auflage, 1853. Die Gesetze des Lokomotivenbaues; 1855. Resultate für den Maschinenbau; dritte Auflage, 1856. Die Bewegungs-Mechanismen, 1857. Das Dynamidensystem, 1857. Theorie und Bau der Wasserräder; zweite Auflage, 1858. Prinzipien der Mechanik; zweite Auflage, 1860. Resultate; vierte Auflage, 1860. Die anfänglichen und die ge-

uns mit einer kurzen Charakteristik derselben nach der Mittheilung eines Fachmanns begnügen.

Nachdem Redtenbacher in seinen beiden ersten Werken den Bau der wichtigsten hydraulischen Kraftmaschinen mit wissenschaftlicher Schärfe auf mathematische Prinzipien gegründet hatte, stellte er in den „Resultaten“ die Gesammtergebnisse seiner wissenschaftlichen Untersuchungen und praktischen Erfahrungen für den Maschinenbau zusammen. Die vier Auflagen, welche das Buch in zwölf Jahren erlebte, sind der beste Beweis für seine Tüchtigkeit. Darauf gab Redtenbacher in den „Prinzipien der Mechanik“ eine allgemein wissenschaftliche Einleitung in das spezielle Studium des Maschinenwesens, in welcher er nicht nur die längst bekannten Grundsätze der Mechanik klar und scharf entwickelte, sondern seine eigenen Ansichten über Stoff und Kraft begründete. Von diesem wissenschaftlichen Fundament kehrte er sich nun wieder den Details seines Faches zu, dessen Ausbau die „Calorische Maschine“, „die Gesetze des Lokomotivbaues“ und die „Bewegungsmechanismen“ gewidmet sind. Unmittelbar auf das letztgenannte Werk folgte abermals eine allgemein wissenschaftliche Untersuchung, das „Dynamidensystem“, die Grundzüge einer mechanischen Physik, basirt auf die früher entwickelten Hypothesen über das Wesen der Materie und der derselben innewohnenden Kräfte. Der Verfasser führt darin mit mathematischer Schärfe die mannichfaltigen Erscheinungen der Wärme und des Lichts auf mechanische Vorgänge zurück. Die kleine Schrift über die Abkühlung der Weltkörper enthielt eine Anwendung dieser Theorien auf die Entstehung der Weltkörper durch den sog. Ballungsakt und suchte die wahrscheinliche Temperatur derselben unmittelbar nach ihrer Bildung und den Prozess der allmäligen Abkühlung festzustellen.

Wer die Fülle dieser Arbeiten, ohne die wissenschaftliche und praktische Bedeutung derselben taxiren zu können, rein äusserlich übersieht, wer dabei erwägt, dass Redtenbacher wöchentlich zwölf Stunden vor einigen Hundert Zuhörern mit ganzem Kraftaufwand dozirte, dass er fast sechs Jahre die Geschäfte der Direktion in konzentrirtester Form versah, dass In- und Ausland ihn mit zahlreichen Gutachten in Anspruch nahm, der möchte meinen,

---

genwärtigen Erwärmungszustände der Weltkörper, 1861. Die Bewegungsmechanismen; neue Folge, 1861. Französische Uebersetzung der „Resultate“, 1861. Der Maschinenbau; erster Band, 1862. Der Maschinenbau; zweiter Band (noch nicht vollendet), 1863.

dass auch die stärkste Kraft von einer solchen Last vollständig okkupirt worden sei. Das Ausserordentliche des Mannes, dessen frühen Tod wir beklagen, tritt am augenfälligsten darin hervor, dass alle diese verschiedenartigen grossen Leistungen die Elastizität seines Geistes so wenig zu erschöpfen vermochten, dass derselbe mit voller Frische in den weiten Räumen der moralischen Wissenschaften und der bildenden Künste sich nicht nur geniessend erging, sondern auch hier noch überall produktiv auftrat, sei es in dem durchaus selbständigen Urtheil, das sich ihm aus jeder Lectüre ergab, sei es in raschen, scharfen Bleiskizzen oder in ausgeführten Oelgemälden. Nur selten wohl hat ein Mann der exakten Wissenschaften, der in denselben eine so umfassende und hervorragende Thätigkeit entfaltet und der durch seine Jugendbildung so ausschliesslich auf sie hingewiesen war, zugleich in Philosophie, Geschichte, Literatur mit der innigen Hingebung an jedes Grosse, mit der warmen Begeisterung für jedes Edle gelebt, welche Redtenbacher jeder Idee und jeder Persönlichkeit von Bedeutung entgegen trug, mochte sie dem entlegenen Alterthume oder der frischen Gegenwart angehören. Von den abstraktesten Fragen der spekulativen Metaphysik bis zu den Details der Geschichtsforschung fasste sein Geist mit unermüdlichem Eifer und unvergleichlicher Frische jedes wissenschaftliche Problem, ebenso hatte er für die mannichfaltigsten Erscheinungen des wirklichen Lebens das regste Verständniss, und in Allem war er stets er selber.

In der vollen Blüthe des Mannesalters ergriff ihn die unheilbare Krankheit, welcher er, trotz der liebenden, unermüdeten Pflege der Seinigen und der Sorgfalt der Aerzte, nach fast zweijährigen schweren Leiden in den Frühstunden des 16. April erlegen ist. Der Energie seines männlichen Geistes war hier eine letzte traurige Gelegenheit geboten, sich zu erproben. Nicht genug, dass er seine Vorlesungen bis gegen Ende des vorigen Jahres fortsetzte, blieb er in jeder Richtung ununterbrochen thätig. Das letzte seiner Werke, „der Maschinenbau", worin er das Wesentliche seiner Vorträge am Polytechnikum zusammenfasste, gehört wenigstens zum Theil dieser Krankheitsperiode an; bis zum vorletzten Tage vor seinem Tode arbeitete er daran mit seinem erprobten Assistenten, Herrn Hart, welcher ihm thätig zur Seite stand und den zweiten noch nicht erschienenen Band vollenden wird. Daneben ging die ausgedehnteste Lektüre in den verschiedensten Gebieten des Wissens fort, und man konnte den todtkranken Mann über Milton oder die Alterthümer Roms, über Wilhelm v. Humboldt oder die neuesten Kämpfe in Preussen mit einer Wärme, einem eindringenden Verständniss reden hören, als wenn dieser Geist von den Leiden des Körpers gar nicht berührt würde.

Er behauptete seine eigenste Natur bis zu dem Augenblick, wo sie dem Schicksal der Sterblichen erlag; sein männlicher, starker, scharfer Geist ging aufrecht bis an den Rand des Grabes.

Geschichte und Literatur der Mathematik und Physik.

Magyar Tudom. Akademiai Almanach csillagászati és közönséges Naptárral. MDCCCLXIII.-ra. Pesten. Eggenberger Ferdinánd.

Wenn es jederzeit ein erhebendes Gefühl ist, zu sehen, wie in allen Ländern die Wissenschaft eifrigst gepflegt und gefördert wird: so erfüllt es uns auch mit besonderer Freude, diesen neuesten, 328 Seiten umfassenden Jahrgang des Almanachs, welchen, nach dem Vorgange der meisten anderen berühmten Akademieen der Wissenschaften, auch die Ungarische Akademie der Wissenschaften in Pesth herausgiebt, hier zur Anzeige bringen zu können, da derselbe von der Einrichtung und Thätigkeit dieser berühmten Akademie ein sehr anschauliches und im höchsten Grade erfreuliches Bild liefert.

Dieser Almanach enthält zuerst einen sehr vollständigen Kalender und eine für diese Zwecke gleichfalls sehr vollständige astronomische Ephemeride, die in ihren Angaben vielfach bis auf Secunden geht, und ausser vielem anderen Nützlichen auch ein sehr vollständiges Verzeichniss der bis jetzt entdeckten Planeten, die Positionen der Hauptsterne und der Hauptsternwarten u. s. w. liefert und daher selbst für strengere wissenschaftliche Zwecke in manchen Fällen gebraucht werden kann. Der sonstige Inhalt ist der in solchen Schriften gewöhnliche, worüber wir also hier uns nicht ausführlich zu verbreiten brauchen. Als besonders interessant müssen wir aber hervorheben das auf S. 239—S. 244 sich findende Verzeichniss der Schriften einer grösseren Anzahl ungarischer Mathematiker, welche Mitglieder der Akademie sind, wie: Györy Sándor, Nagy Károly, Kiss Károly, Fest Vilmos, Petzval Ottó, Sztoczek József, Hollán Ernö, Brassai Sámuel, Kruspér István, Tomori Anasztáz, Weisz János Armin, Lutter Nándor, Weninger Vincze, Kondor Gusztav, Martin Lajos. Je weniger bekannt diese Schriften (viele auch in deutscher und lateinischer Sprache verfasst) in Deutschland sein dürften, desto mehr Interesse bietet dieses Verzeichniss dar, so wie in gleicher Weise das S. 244—S. 257 sich

findende Verzeichniss der Schriften ungarischer Naturforscher. Auf S. 258—S. 315. findet man interessante Notizen über das Leben und die Schriften von 101 früheren, bereits verstorbenen Mitgliedern der Akademie, unter denen wir hier nur Gauss (S. 277.) und seinen Freund und Studiengenossen, den Ungar Bolyai (S. 282.), welchen unsere Leser schon aus dem Archiv (Literar. Ber. Nr. CIX. S. 2.) kennen, hervorheben wollen; aber auch Humboldt, K. Ritter und andere berühmte Namen finden sich unter diesen verstorbenen Mitgliedern verzeichnet. Als auswärtige correspondirende Mitglieder in der mathematischen Klasse zählt die Akademie nur die folgenden sieben: Babbage in London, Poncelet in Paris, v. Ettingshausen in Wien, John Herschel in Collingwood, Quetelet in Brüssel, Antal Vallas in New-Orleans und den Herausgeber des Archivs, welcher diese Gelegenheit gern benutzt, um seinen Dank für diese ihm erwiesene Ehre, auf die er besonderen Werth legt, hier auch öffentlich auszusprechen. Unter den Physikern finden wir Namen wie Baumgartner, Faraday, Liebig, Bunsen u. A.

Wir halten, wie schon erinnert, diesen Almanach für eine sehr interessante literarische Erscheinung und machen unsere Leser recht sehr auf denselben aufmerksam, werden auch nicht verfehlen, die künftigen Jahrgänge desselben hier anzuzeigen.

Staatsrechenkunst.

Die Staatsrechenkunst oder, wie man dieselbe in engerer, eigentlich mathematischer Bedeutung zu nennen pflegt, die politische Arithmetik, ist für die jetzige Zeit von so grosser Wichtigkeit und gewinnt immer mehr so sehr an Bedeutung, dass ich es für geboten halte, derselben von jetzt an in diesen literarischen Berichten eine besondere Rubrik einzuräumen. Ich thue dies aber hauptsächlich auch deshalb, um mich nicht wie bisher ganz auf solche Schriften beschränken zu müssen, welche allein oder wenigstens vorzugsweise den eigentlich mathematischen Gesichtspunkt festhalten und hier natürlich fortwährend vorwiegend im Auge behalten werden müssen, sondern auch solche mir bekannt werdende Schriften kurz zur Anzeige bringen zu können, die im Allgemeinen in politischer Rücksicht interessant sind und dies nach meiner Meinung namentlich auch für mit dem genannten Theile unserer Wissenschaft sich vorzugsweise beschäftigende Mathematiker sein müssen. Für eine solche, auch für politische Mathematiker interessante Schrift halte ich die folgende, mir gütigst mitgetheilte Schrift:

Relazione del Ministro delle Finanze (**Quintino Sella**) presentata alla Camera dei Deputati nella tornata del 1°. dicembre 1862. Torino. Stamperia Reale. 1862.

Dieser der italienischen Deputirtenkammer für 1862 abgestattete Bericht des Finanzministers, Herrn Quintino Sella, enthält auf 119 Seiten eine so vollständige, so genaue und bestimmte, von der grössten Offenheit zeugende, nichts absichtlich verdeckende, mit grösster Leichtigkeit übersehbare, unseres Erachtens ein wahres Muster für solche Berichte liefernde Darstellung des Staatshaushalts des Königreichs Italien, dass man vor seinem Verfasser die grösste Achtung haben und jedem politischen Arithmetiker empfehlen muss, von diesem interessanten Bericht nähere Kenntniss zu nehmen. Hier müssen wir uns natürlich begnügen, den Hauptinhalt ganz in der Kürze anzugeben: **Parte prima**. Stato della unificazione nell' amministrazione finanziaria. I. Norme con cui si riordinò il personale. II. Norme con cui si riordinarono gli Uffici finanziari. III. Corte dei conti. IV. Debito Pubblico. V. Contenzioso finanziario. VI. Tesoro. VII. Gabelle. VIII. Demanio e Tasse. IX. Contribuzioni dirette. X. Conclusione. — **Parte seconda**. Situazione finanziaria. XI. Risultati dell' Esercizio 1861 e precedenti. XII. Risultati del 1862. (Gabelle. Demanio e Tasse. Ministero dei Lavori Pubblici. Prodotto dal maggio a tutto ottobre. Maggiori Spese.) XIII. Appendice al Bilancio del 1863. (Risparmio. Riassunto.) — **Parte terza**. Modo di provvedere alla situazione delle finanze. XIV. Mezzi posti in opera durante il 1862. XV. Mezzi proposti pel 1863.

Der Verfasser schliesst seinen höchst interessanten Bericht mit dem Ausruf: „Italia una sotto lo Scettro costituzionale di Vittorio Emanuele II e dei suoi discendenti!"

G.

Maasse, Gewichte und Münzen.

Ueber die Einführung allgemeiner Maasse, Gewichte und Münzen. Mit Angabe der wichtigsten, in dieser Beziehung gemachten Vorschläge und ihre Beurtheilung; nebst einer gedrängten Uebersicht der unternommenen Breitegradmessungen. Von Dr. Karl Jos. Kreutzer. Wien. Karl Helf. 1863.

Ein sehr zeitgemässes, mit vieler Sachkenntniss und Deutlichkeit verfasstes Büchlein, welches wir einem Jeden, der sich

über Maasse, Gewichte und Münzen und die beste Einrichtung der betreffenden Systeme bestimmte und klare Begriffe verschaffen will, recht sehr empfehlen können. Der Inhalt ist folgender: 1. Entstehung der mannigfaltigen Maasse und Gewichte. 2. Nachtheile der grossen Anzahl verschiedener Maasse, und Versuche zu ihrer Vergleichung. 3. Verschiedene vorzuschlagende Maasseinheiten und Maasssisteme. Geschichte der Breitengradmessungen. 4. Eigenschaften, welche ein zweckentsprechendes Maasssistem besitzen soll. 5. Untersuchung der bisher üblichen oder vorgeschlagenen Maasssisteme in Bezug auf ihre Zweckmässigkeit. 6. Bemerkungen über die Einführung allgemeiner Maasse. Namentlich haben in dieser empfehlenswerthen Schrift auch die von der durch die deutsche Bundesversammlung berufenen Commission gemachten Vorschläge eine ausführlichere Besprechung gefunden, wodurch das Interesse der Schrift noch erhöht wird.

Astronomie.

Astronomische Beobachtungen auf der Grossherzoglichen Sternwarte zu Mannheim, angestellt und herausgegeben von Dr. E. Schönfeld, Professor und Grossherzoglicher Hofastronom. Erste Abtheilung. Beobachtungen von Nebelflecken und Sternhaufen. Mannheim. J. Bensheimer. 1862. 4°.

Im Literar. Ber. Nr. CXXXV. haben wir unseren Lesern mitgetheilt, wie sehr die Wissenschaft Sr. Königl. Hoheit dem Grossherzoge von Baden und dem Grossherzoglich Badischen Ministerium zu Dank verpflichtet ist für die Wiederherstellung der alten berühmten Sternwarte in Mannheim und für die neue Ausrüstung derselben in einer, den neueren Anforderungen völlig entsprechenden Weise, wobei wir aber auch von Neuem dankbar gedenken müssen des trefflichen W. Eisenlohr, der in warmer Liebe zur Wissenschaft und rührigem rastlosen Eifer die erste Anregung zu der Wiederherstellung dieses schönen Tempels Urania's gegeben hat. Die ersten Früchte der Thätigkeit des ausgezeichneten Directors der Sternwarte, des Herrn Professor und Grossherzoglichen Hofastronomen Dr. Schönfeld, liegen jetzt vor uns und liefern den rühmlichsten Beweis von dem auf der Sternwarte neu erwachten Leben; ermöglicht worden ist aber die Herausgabe dieser Beobachtungen in schönster und würdigster äusserer Ausstattung allein durch die Munificenz des Grossherzoglichen Ministeriums des Innern, welches die

Herausgabe als selbstständige Schrift angeordnet und die dazu erforderlichen Mittel mit der grössten Bereitwilligkeit und Liberalität angewiesen hat.

Mit richtiger Würdigung der ihm zu Gebote stehenden Beobachtungsmittel hat Herr Schönfeld die Nebelflecken und Sternhaufen zum nächsten Gegenstande seiner Arbeiten gemacht, über deren Wichtigkeit jetzt keinerlei Zweifel mehr herrscht. Die Einleitung verbreitet sich nach verschiedenen allgemeinen Bemerkungen in sehr lehrreicher Weise über Plan der Beobachtungen, Instrument (ein Steinheil'scher Refractor von 96,04 pariser Zoll Brennweite und 73 pariser Linien freier Oeffnung) und Local, Micrometer, Beobachtungsmethode, Reduction der Beobachtungen, Sicherheit der Beobachtungen. Die micrometrischen Ortsbestimmungen von Nebelflecken und Sternhaufen selbst umfassen nach vorausgeschickter Erklärung der einzelnen Columnen 99 Seiten, dann folgt Zusammenstellung der mittleren Oerter 1865, der Vergleichsterne nach den Bonner Beobachtungen, ferner Catalog der beobachteten Nebelflecke, und den Schluss bilden Bemerkungen über einzelne Nebelflecke.

Möge die neue Sternwarte eine immer reichere Thätigkeit entfalten!

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. apostol. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director der k. k. Sternwarte. Dritter Folge eilfter Band. Jahrgang 1861. Wien. 1862. 8°.

Die k. k. Sternwarte in Wien fährt in der regelmässigen Publication ihrer Beobachtungen in der verdienstlichsten Weise fort, wofür der Director der Sternwarte, Herr v. Littrow, den wärmsten Dank der Astronomen verdient. Der vorhergehende Band ist im Literar. Ber. CXLVI. S. 8. angezeigt worden. Der vorliegende Band enthält nach einer Einleitung die Beobachtungen am Meridiankreise im J. 1859, ferner die Resultate der Beobachtungen am Meridiankreise, nämlich: I. Planeten- und Cometen-Positionen aus den Jahren 1856 bis 1859. II. Mittlere Positionen von Fixsternen. III. Verzeichniss der im Jahre 1859 beobachteten Sterne der Histoire céleste. Hierauf folgen: Planeten- und Cometenbeobachtungen am Refractor von vier Zoll Oeffnung, vom August 1860 bis Jänner 1862; Zonenbeobachtungen am Mittagsrohre; meteorologische Beob-

achtungen im Jahre 1860; Tafeln zur Reduction der Zonenbeobachtungen; Uebersicht der Zonen. — Bei vielen Sternen wurden aus den Jahren 1850—1854 Grössenschätzungen beigefügt, die von den Herren A. Kunes, W. Oeltzen, E. Weiss herrühren.

Meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte in Wien von 1775 bis 1855. Auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director, und Carl Hornstein, Adjunct der k. k. Sternwarte. Dritter Band (1810—1822). Wien. 1862.

Wir freuen uns sehr, dass auch dieses so sehr verdienstliche Unternehmen, von welchem im Literar. Ber. Nr. CXLI. S. 12. und Nr. CXLVI. S. 9. ausführlich Nachricht gegeben worden ist, rüstig fortschreitet. Der vorliegende Band enthält die Jahre 1810 bis 1822.

Nautik.

Reise der österreichischen Fregatte Novara um die Erde in den Jahren 1857, 1858, 1859 unter den Befehlen des Commodore B. von Wüllerstorf-Urbair. Nautisch-physikalischer Theil. II. Abtheilung. Magnetische Beobachtungen. (Mittheilungen der hydrographischen Anstalt der k. k. Marine. I. Band. 2. Heft.) Wien. Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei. 1863. 4°. In Commission bei Carl Gerold's Sohn.

Die erste Abtheilung dieser wichtigen Mittheilungen der hydrographischen Anstalt der k. k. Marine in Triest, welche unter der Direction des Herrn Professor Schaub die erfolgreichste Thätigkeit entfaltet, ist im Literar. Ber. Nr. CLV. S. 10. von uns angezeigt worden. Die wiederum in schönster äusserer Ausstattung uns vorliegende zweite Abtheilung enthält die bei Gelegenheit der berühmten Novara-Expedition angestellten magnetischen Beobachtungen und besteht aus zwei Abtheilungen: Magnetische Beobachtungen auf dem Lande und Magnetische Beobachtungen auf der See. Jede der beiden Abtheilungen ist mit einer trefflichen Einleitung versehen, in welcher Alles, was zum Verständniss der Beobachtungen nöthig ist, was auf ihre Berechnung und Reduction sich bezieht, mit der grössten Deutlichkeit und Bestimmtheit dargelegt ist. Die Beobachtungen auf dem Lande sind angestellt in: Triest; Gibraltar;

Funchal (Madeira); Rio Janeiro; Capstadt; Insel Sanct Paul (Indischer Ocean); Carnicobar (Bucht von Saoui); Nangcovri-Hafen; Condul, Insel und Hafen; Galatheabucht, Gross-Nicobar; Batavia; Hongkong; Shanghai; Sidney, Auckland; Papiete; Valparaiso; Triest, nach der Reise. — Eine interessante Uebersichtliche Zusammenstellung der Beobachtungs-Resultate für Declination, Horizontale Intensität und Inclination ist gegeben. Die angewandten Instrumente waren von Barrow und Lamont. Ausser dem verdienten Herrn Herausgeber und dem Befehlshaber der ganzen Expedition, dem Herrn Commodore B. v. Wüllerstorf-Urbair, gebührt der Dank der Wissenschaft hauptsächlich den Herren Dr. F. Hochstetter und R. Müller, so wie dem General Sabine für die Bestimmung der Constanten der Barrow'schen Instrumente auf dem Observatorium in Kew, und dem leider nun bereits verstorbenen Director Kreil in Wien.

So haben wir also hier neue schöne Früchte der berühmten Novara-Expedition vor uns, durch welche die österreichische Regierung sich so grosse Ansprüche auf den Dank der gesammten Naturwissenschaft, der Geographie und der Nautik erworben hat.

Vermischte Schriften.

Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften in Görlitz.

Da die für den 31. Januar 1863 gestellte Preisaufgabe (m. s. Literar. Ber. Nr. CXLIV. S. 11.):

> Lebensbeschreibung des Ehrenfried Walther von Tschirnhaus auf Kiesslingswalde und Würdigung seiner Verdienste

eine genügende Lösung nicht gefunden hat, so ist diese schöne Aufgabe, durch deren Stellung die Oberlausitzische Gesellschaft der Wissenschaften sich jedenfalls ein mit besonderem Danke anzuerkennendes grosses Verdienst um die Geschichte der Mathematik, so wie auch der Physik und Philosophie, erworben hat, und welcher recht viele befähigte Bearbeiter, namentlich in Deutschland, gewiss sehr zu wünschen sind, jetzt wiederholt und von Neuem aufgegeben worden. Als Einlieferungs-Termin hat die Gesellschaft den 31. Januar 1865 bestimmt, und der Preis ist jetzt verdoppelt, nämlich auf Einhundert Thaler erhöhet worden.

G.

Literarischer Bericht
CLX.

Am 18ten Februar 1564 wurde in Pisa der grosse

Galilei

geboren; seit jenem ewig denkwürdigen Tage werden also am 18ten Februar 1864 dreihundert Jahre verflossen sein; dieses dreihundertjährige Jubelfest eines der grössten Menschen aller Zeiten sollte auf der ganzen Erde in der feierlichsten und freudigsten Weise begangen werden; denn was wäre die Menschheit vielleicht jetzt ohne solche Männer wie Galilei einer der ersten und grössten war! — Sollten diese wenigen Zeilen vielleicht Veranlassung geben, dass namentlich auf Lehranstalten aller Art, — auch in Deutschland, — an dem merkwürdigen nächsten 18ten Februar des grossen Mannes in würdigster Weise gedacht und sein Bild der Jugend lebhaft vor die Augen geführt würde: so würde ich mich in hohem Grade beglückt fühlen. Geeignete Mittheilungen hierüber würden im Archiv bereitwilligst Aufnahme finden.

Am 8. Juli 1863. Der Herausgeber.

Traugott Samuel Franke.

Am 14. Junius 1863 starb in Folge einer Lungenlähmung der zweite Director der polytechnischen Schule zu Hannover, Prof. Dr. phil. Traugott Samuel Franke, geboren am 14. October 1804 in der Stadt Schellenberg im Königreiche Sachsen.

Da dem Verstorbenen auch dieses Archiv einige Beiträge verdankt, so dürfte es schon aus diesem Grunde gerechtfertigt sein, dem nun Entschlafenen hier einige Worte zu widmen. Um so mehr aber glauben wir uns dazu berechtigt, weil der Verewigte namentlich Schülern gegenüber als Vorbild grosser sittlicher Kraft empfohlen zu werden verdient. Ja, Franke war ein ganzer Mann, ein Mann, den auch die grössten Widerwärtigkeiten nicht dazu verleiten konnten, von dem einmal als richtig erkannten Wege, das sich gesteckte Ziel zu erreichen, auch nur einen Schritt weit abzulenken! Schon in seiner Jugend zeigte der Dahingeschiedene diese Festigkeit des Charakters.

Obgleich von seinem Vater, der Leinweber war, nur zur Erlernung des Weberhandwerkes angehalten, in dem der Entschlafene — beiläufig bemerkt — später sogar zum Gesellen gesprochen wurde, wusste derselbe es doch schon während seiner Schulzeit möglich zu machen, dass ihm Privatunterricht in der lateinischen Sprache ertheilt wurde. Die Mittel hierzu wurden zum Theil dadurch erschwungen, dass der junge Franke mit in der Currende sang, oft bei grosser Kälte in nur dünner Kleidung! Da, wie schon erwähnt, Franke's Vater seinen Sohn durchaus nicht zum Studiren bestimmt hatte, so konnte dieser auch oft bloss während des „Spulens“ seine Lectionen verfertigen. Alles dies aber liess die Lernbegierde des jungen Franke nicht erkalten, im Gegentheil sie wurde dadurch nur gesteigert. Der Verstorbene besuchte daher auch später, nachdem er zuvor schon — von 1819 an — im Rochlitz'schen Institute zu Freiberg eine höhere Ausbildung genossen, das Gymnasium daselbst. Hier hatte, wie sich denken lässt, der Verewigte wiederum mit vielen Unannehmlichkeiten zu kämpfen. So musste er z. B. die Mittel zum Besuche des Gymnasiums sich durch Unterrichtgeben — besonders in den alten Sprachen, — Notenschreiben u. dgl. m. erwerben. Während der letzten Zeit seines Aufenthalts in Freiberg hörte er aus besonderer Vorliebe auf der Bergakademie Vorträge über Mathematik. Nach dem Tode seines Vaters studirte dann Franke auf den Wunsch seiner Angehörigen in Leipzig bis 1828 Theologie, betrat auch als Candidat der Theologie mehrere Male die Kanzel. Da jedoch die Theologie dem Ver-

storbenen zu wenig Aussicht zu weiterem Fortkommen zu bieten schien, so widmete er sich noch etwa zwei Jahre philosophischen Studien. Im Jahre 1830 wurde er Rector der Knabenschule zu Rosswein, gründete hierselbst im Verein mit einem befreundeten Prediger eine Sonntagsschule und wirkte als Sprecher in der Tuchmacherzunft. Als diese einst ein Gesuch bei dem damaligen Ministerio des Innern in Dresden durch eine Deputation, an deren Spitze Franke stand, vorbringen liess, wurde er höheren Ortes näher bekannt. Dies hatte zur Folge, dass Franke 1836 zum Lehrer an der technischen Lehranstalt zu Dresden ernannt und bald darauf zum Professor befördert wurde. Nach dem Tode des Directors Lohrmann, so wie nach dem Ableben des diesem folgenden Directors Seebeck, versah Franke längere Zeit das Directorat jener Anstalt. Im August des Jahres 1849 folgte er einem Rufe als zweiter Director der polytechnischen Schule zu Hannover, mit welcher Stellung in früheren Jahren zugleich der Lehrstuhl für niedere und höhere, später nur der für höhere Mathematik verbunden war. Hier hat der nun Entschlafene segensreich gewirkt bis zu seinem Tode, stets eingedenk der hohen Pflicht, welche ihm das Directorat auferlegte. Leider scheint es, als ob in den letzten Jahren seiner amtlichen Thätigkeit das redliche Streben des Dahingeschiedenen, die polytechnische Schule immer mehr der Vollendung entgegenzuführen, nicht immer in gerechter Weise gewürdigt ist; bittere Kränkungen sind ihm wenigstens öfter zu Theil geworden. Möge daher eine spätere Zeit den Verdiensten Franke's um diese Schule volle Gerechtigkeit widerfahren lassen!

In Betreff der wissenschaftlichen Leistungen des Verstorbenen wollen wir hier nur erwähnen, dass sein eigentliches Feld die beschreibende Geometrie war. Hier hat er Anerkennungswerthes geleistet. Wir verweisen in dieser Beziehung auf das Lob, welches Gugler in seinem „Lehrbuche der descriptiven Geometrie, — 2. Aufl., Vorrede“ — dem Verewigten zollt.

Hannover, im Juni 1863. M.

Arithmetik.

Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen für sieben Stellen. Berechnet von J. Zech. Besonderer Abdruck aus der Vega-Hülsse'schen Sammlung mathematischer Tafeln. Zweite Auflage. Berlin. Weidmann'sche Buchhandlung. 1863. 8°.

Je bekannter diese sehr empfehlenswerthen Tafeln der Additions- und Subtractions-Logarithmen längst sind, und je allgemeiner ihr Werth längst anerkannt ist: desto mehr wird hier die einfache Anzeige von dem Erscheinen einer zweiten Auflage des von der Weidmann'schen Buchhandlung in verdienstlicher Weise veranstalteten besonderen Abdrucks genügen. Das Papier ist schön und stark, der Druck ungemein deutlich und die Augen schonend. Wir empfehlen diese neue Ausgabe unseren Lesern in jeder Beziehung.

Nautik.

Ueber die Methode der Längenbestimmung durch Differenzen von Circummeridianhöhen und deren Anwendung während der Weltumsegelung S. M. Fregatte Novara. Von Karl v. Littrow, wirklichem Mitgliede der kais. Akad. der Wiss. Vorgelegt in der Sitzung am 8. Jänner 1863. (Sonderabdruck aus dem XLVII. Bde. der Sitzungsberichte der kais. Akad.) der Wissensch.)

Herr v. Littrow hat schon im Jahre 1841 in den Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Neuer Folge. Erster Band. S. XLIX. eine Abhandlung publicirt unter dem Titel: „Ueber ein Mittel, die Breitenbestimmung zu erleichtern, und zugleich näherungsweise die Zeit zu bestimmen" und ich selbst habe, an dieser Methode, sogleich als sie mir bekannt wurde, ganz besonderes Interesse nehmend, dieselbe analytisch zu entwickeln und näher zu charakterisiren gesucht, in einem im Archiv Thl. III. 1843. S. 107—S. 112. abgedruckten Aufsatze. Für Längenbestimmungen zur See hat diese Methode der Zeitbestimmung jedenfalls sehr wesentliche Vortheile, namentlich aber den Vortheil, dass die dazu erforderlichen Beobachtungen nahe zu derselben Zeit gemacht werden können, zu welcher die Breite durch die Mittagshöhe der Sonne bestimmt wird, welche einfache Methode aus leicht begreiflichen Gründen doch immer auf der See vorzugsweise Anwendung finden wird. Deshalb hat Herrn v. Littrows Methode der Zeitbestimmung auch bald nach ihrer Bekanntwerdung mehrfach Beifall gefunden, und es sind Uebersetzungen seines Aufsatzes erschienen schon im Jahre 1843 in der von Zescevich und Foscolo herausgegebenen „Raccolta di letture risguardanti la marina (Dispensa II)" von Herrn v. Wüllerstorf, ferner in dem „Almanacco Nautico für 1844"

von Herrn Prof. V. Gallo, u. s. w. Allgemeinere praktische Anwendung in der Nautik hat die Methode aber, — wie sie doch so sehr verdient, — so viel wir wissen, bis zur Weltumsegelung der Novara (s. nachher) nicht gefunden; und auch die uns bekannten nautischen Lehrbücher thun ihrer nicht besonders Erwähnung. Es ist daher in jeder Beziehung zeitgemäss, und wir haben uns sehr gefreu't, dass Herr v. Littrow seine jedenfalls alle Beachtung verdienende Methode in der obigen lehrreichen Abhandlung von Neuem entwickelt und — was die Hauptsache ist — rücksichtlich ihrer praktischen Brauchbarkeit sorgfältig discutirt hat, wobei eine grössere Anzahl bei der Weltumsegelung der Fregatte Novara angestellter, von Herrn v. Wüllerstorf gütigst mitgetheilter Originalbeobachtungen Verwendung gefunden haben. Hieraus hat sich die völlige Brauchbarkeit der Methode für nautische Zwecke ergeben. Aber auch bei der Weltumsegelung der Novara selbst hat die Methode vielfache Anwendung mit dem grössten Vortheil für die Praxis gefunden, worüber Herr v. Wüllerstorf, der sich selbst um die weitere praktische Ausbildung derselben sehr verdient gemacht hat, wie man in der obigen Abhandlung nachsehen kann, an Herrn v. Littrow Folgendes schreibt: „Darunter" — (nämlich unter den verschiedenen auf der Reise in Anwendung gebrachten Beobachtungs- und Rechnungsmethoden) — „ist natürlich die Methode der Längenbestimmung durch Unterschiede von Circummeridianhöhen, die uns so gute Dienste geleistet und so sehr an der Tagesordnung war, dass sie zu den laufenden gehörte. Ich glaube kaum zu fehlen, wenn ich behaupte, dass dieselbe besonders in der zweiten Hälfte der Reise fast täglich und zum mindesten eben so oft als die Stundenwinkelbestimmung in der Nähe des ersten Vertikals vorgenommen wurde." — „Die Grenzen der Verlässlichkeit der Methode bei starkem Seegange sind natürlich weiter als eben wünschenswerth; indess leiden alle Methoden dadurch in grösserem Maasse, als die Reduction auf die Zeit der Breitenbestimmung um so unsicherer wird." — Dieses Urtheil eines so ausgezeichneten Seemannes, wie Herr v. Wüllerstorf ist, spricht gewiss sehr für die praktische Brauchbarkeit dieser Methode, und wir empfehlen daher die obige lehrreiche Schrift des Herrn v. Littrow allen Seeleuten und Verfassern nautischer Lehrbücher dringendst zur Beachtung, indem wir jetzt noch weit mehr wie schon 1843 a. a. O. der Meinung sind, dass durch die Littrow'sche Methode die nautischen Beobachtungs- und Rechnungsmethoden eine sehr wesentliche, dankbar aufzunehmende und vorzüglich auch bei'm nautischen Unterrichte fernerhin besonders zu berücksichtigende, Bereicherung erhalten haben. Grunert.

Physik.

Lehrbuch der Physik für Ober-Gymnasien. Von **F. J. Pisko**, Lehrer der Physik an der Communal-Oberrealschule auf der Wieden und an der damit in Verbindung stehenden Gewerbeschule in Wien. Mit 497 im Texte aufgenommenen Holzschnitten. Brünn. C. Winiker. 1860. 8.

Lehrbuch der Physik für Ober-Gymnasien und Ober-Realschulen von **S. Subic**, Professor der Physik an der Communal-Oberrealschule in Pest. Pest. G. Heckenast. 1861. 8.

In gewisser Verbindung mit diesen beiden Lehrbüchern der Physik für Ober-Gymnasien und Ober-Realschulen stehen:

Lehrbuch der Physik für Unter-Realschulen. Von **F. J. Pisko.** Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 403 in den Text aufgenommenen Holzschnitten. Brünn. C. Winiker. 1861. 8.

Lehrbuch der Physik für die unteren Klassen der Gymnasien und Realschulen von **S. Subic.** Pest. G. Heckenast. 1861. 8.

Die Anzeige dieser alle Beachtung verdienenden Lehrbücher der Physik, welche ziemlich gleichzeitig erschienen sind, ist durch zufällige, hauptsächlich durch die ungemein grosse Masse anzuzeigender Schriften herbeigeführte Umstände verzögert worden, soll aber jetzt in der Kürze nachgeholt werden, weil im Interesse des physikalischen Unterrichts wir auf diese Schriften aufmerksam machen zu müssen glauben. Dieselben liefern sämmtlich wiederum den Beweis — worauf von uns schon früher öfters hingewiesen worden ist — mit wie grosser Sorgfalt, Gründlichkeit und verhältnissmässiger Ausführlichkeit der physikalische Unterricht auf den österreichischen Lehranstalten ertheilt wird, wobei zugleich ein sehr richtiger streng methodischer, vom Leichteren zum Schwereren stufenweise fortschreitender Lehrgang eingehalten wird.

Für den Unterricht auf der unteren Stufe sind die beiden oben zuletzt genannten Bücher bestimmt. Derselbe hält sich lediglich an das Experiment, mit fast vollständiger Vermeidung der mathematischen Demonstration, ohne jedoch, wie namentlich das in fünfter Auflage vorliegende Lehrbuch von **Pisko** zeigt, die

Einkleidung gewisser Naturgesetze in einfache mathematische Formeln ganz zu verschmähen, wobei überall, was natürlich von vorzüglicher Wichtigkeit ist, die Begriffe streng festgestellt und die Naturgesetze auf klare und bestimmte Ausdrücke gebracht werden. In beiden Schriften dienen zahlreiche, besonders in dem Buche von Subic gut ausgeführte Holzschnitte sehr zur Erläuterung der anzustellenden Experimente und der dabei in Anwendung zu bringenden Instrumente und sonstigen Vorrichtungen.

Dagegen sind die beiden zuerst genannten Bücher bestimmt, dem höheren physikalischen Unterrichte zur Grundlage zu dienen. In ihnen tritt die mathematische Demonstration in ihr volles Recht, ohne natürlich das höhere und feinere Experiment zu vernachlässigen, und dasselbe durch viele, namentlich auch in dem Buche von Pisko sehr schön und mit grosser Sauberkeit ausgeführte Holzschnitte zu erläutern. Besonders rühmend aber muss, wie wir dies bei allen für den höheren physikalischen Unterricht auf österreichischen Lehranstalten bestimmten, uns bekannt gewordenen Lehrbüchern vorzugsweise in erfreulichster Weise bemerkt und schon oft hervorzuheben uns bemühet haben, darauf hingewiesen werden, dass kein Naturgesetz, welches auf einer mathematischen Basis ruhet, ohne eine, natürlich elementar gehaltene, mathematische Demonstration geblieben ist, wenn dadurch auch, wie dies ganz in der Natur der Sache liegt und für den zu erreichenden Zweck nicht bloss genügt, sondern demselben auch vollständig entspricht, zuweilen für's Erste nur Näherungsausdrücke erlangt werden. In dem Buche von Pisko sind die Beweise mehr analytisch-geometrisch, und deshalb elementarer wie in dem Buche von Subic gehalten, wie schon daraus hervorgeht, dass die erste Grundlage aller mathematischen Betrachtungen in dem ersteren Buche das Parallelogramm der Kräfte mit dem von Duhamel entlehnten Beweise desselben bildet, wogegen Subic (S. 32.) von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausgeht, wodurch die Darstellung gleich von vorn herein eine vorzugsweise analytische und deshalb auch allgemeinere Gestalt annimmt. Welcher Darstellungsweise wir für den Unterricht auf den Lehranstalten, für welche beide Bücher bestimmt sind, den Vorzug einzuräumen geneigt wären, mögen wir nicht mit Bestimmtheit auszusprechen wagen, weil dazu eine genaue Kenntniss der betreffenden Lehranstalten erforderlich sein würde, die uns abgeht. Legen wir aber einen Maassstab an andere uns bekannte Lehranstalten, so würden wir der mehr elementaren Darstellung von Pisko den Vorzug geben, wenn wir auch in wissenschaftlicher Rücksicht das Verdienst der allgemeineren mehr analytischen, in

manchen Partieen, die wir hier nicht einzeln namhaft machen können, zugleich dem Herrn Verfasser eigenthümlichen, theilweise vereinfachten Darstellung in dem Buche von Subic, die uns mehrfach recht sehr angesprochen hat, in der bereitwilligsten Weise anerkennen. Beide Lehrbücher enthalten auch eine deutliche Entwickelung der elementaren Grundlehren der Astronomie, und das Buch von Subic zugleich eine in zehn Paragraphen vertheilte werthvolle Sammlung von Aufgaben aus den verschiedenen Gebieten der Physik.

In Summa haben diese beiden Lehrbücher uns wiederum ein sehr erfreuliches Bild von dem jedenfalls sehr ausgezeichneten Zustande des verhältnissmässig sehr weit getriebenen physikalischen Unterrichts auf den österreichischen Gymnasien und Realschulen geliefert, dem wir auch namentlich deshalb unsere volle Anerkennung zollen, weil er ganz unseren eigenen Ansichten über diesen Unterrichtsgegenstand entspricht, indem wir fortwährend der Meinung gewesen sind und noch sind, dass der physikalische Unterricht nur dann sich als kräftiges Bildungsmittel des jugendlichen Geistes vollständig geltend machen könne, wenn er überall, wo es die Wissenschaft fordert, auf einer streng mathematischen Basis ruhet, wobei natürlich das Recht, welches auch das Experiment, in welchem natürlich auch eine, eine besondere Seite des Geistes bildende Kraft liegt, für sich unbedingt in Anspruch nimmt, in keiner Weise geschmälert werden soll und darf.

Krystallographie.

A Tract on Crystallography designed for the use of students in the University. By W. H. Miller, Professor of Mineralogy in the University of Cambridge. Cambridge. 1863. 8.

Wir machen alle unsere Leser sehr auf dieses so eben erschienene Elementar-Lehrbuch der mathematischen Krystallographie aufmerksam, und möchten zugleich den Wunsch aussprechen, dass dasselbe recht bald durch eine Uebersetzung auf deutschen Boden verpflanzt werden möchte, welches bei dem geringen Umfange von nur 86 Seiten sehr leicht zu bewerkstelligen sein, und wodurch gewiss unserer mathematischen und mineralogischen Literatur ein sehr wesentlicher Nutzen geleistet werden würde, weil das Büchlein für den Mathematiker ganz eben so interessant ist, wie für den Krystallographen. Die Darstellung ist weder eine

rein-analytische, noch eine rein-geometrische, sondern eine gemischte, aber, wie wir versichern können, in dieser Weise höchst elegant und einfach, zugleich dem berühmten Verfasser in vieler Beziehung ganz eigenthümlich, und dabei völlig elementar, weil sie, etwa nur mit Ausnahme des kurzen zehnten Kapitels, keine über die Trigonometrie hinausgehenden Kenntnisse voraussetzt. Die Ueberschriften der einzelnen Kapitel sind die folgenden: I. Properties of a system of planes. (Vorzüglich auch in geometrischer Beziehung interessant.) II. Cubic system. III. Pyramidal system IV. Rhombohedral system. V. Prismatic system. VI. Oblique system. VII. Anorthic system. VIII. Twin crystals. IX. Geometrical investigation of the properties of a system of planes. X. Analytical investigation of the properties of a system of planes.

Wir fordern nochmals recht sehr zu einer recht baldigen Uebersetzung dieser sehr schönen Schrift auf, und werden zur Förderung einer solchen sehr gern unsere Hand bieten, so weit dieselbe in Anspruch genommen werden sollte.

Bei dieser Gelegenheit machen wir noch kurz auf die folgende uns gütigst mitgetheilte Schrift aufmerksam, wenn dieselbe auch nicht speciell krystallographischen Inhalts, aber doch mehrfach interessant ist:

Sul modo di fare la carta geologica del Regno d'Italia. Relazione del Commendatore **Quintino Sella.** Al Sig. Commendatore **Cordova,** Ministro di Agricoltura, Industria e Commercio. Torino, 8 Ottobre 1861.

In dieser Schrift theilt Herr Quintino Sella seine hauptsächlich während einer, auf Veranlassung der italienischen Regierung unternommenen Reise gewonnenen Anschauungen über die Fortschritte, welche die Anfertigung geologischer Karten in den verschiedenen Ländern gemacht hat, über die zur Anfertigung derselben getroffenen Veranstaltungen, über das zu diesem Behuf angestellte Personal, die aufgewandten Kosten u. dgl. mit, wodurch diese Schrift für einen Jeden, der sich für diese Dinge interessirt, von der grössten Wichtigkeit ist, weshalb wir namentlich hier auf dieselbe gelegentlich aufmerksam machen. Die besprochenen Länder sind: Francia, Inghilterra, Austria, Belgio, Germania (Prussia, Darmstadt, Sassonia), Svizzera, Canada (nach Berichten von T. Sterry Hunt), Stati uniti (nach Berichten von James D. Dana). — In den Conclusioni wendet nun Herr Quintino Sella seine Erfahrungen auf die Anfertigung einer geologischen Karte für das in dieser Beziehung so interessante König-

reich Italien an und macht dazu die geeignetsten Vorschläge. Man sieht auch hieraus von Neuem, wie in Italien in den Wissenschaften Alles auf den kräftigsten und raschesten Fortschritt drängt, was gewiss eine herzerhebende Erscheinung ist. Je weniger die Anfertigung geologischer Karten ohne die wesentlichste Beihülfe der Mathematik möglich ist, desto mehr wird die beiläufige Anzeige dieser sehr interessanten Schrift an diesem Orte gerechtfertigt sein.

Vermischte Schriften.

Carl Friedrich Gauss Werke. Erster Band. Herausgegeben von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 1863. 4.

Dieser mit dem Bilde von Gauss geschmückte erste Band der Werke des genannten grossen Mathematikers, durch deren Herausgabe die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen sich ein nicht genug anzuerkennendes sehr grosses Verdienst erwirbt, (m. vergl. Archiv Thl. XXXVIII. S. 188.), enthält die:

Disquisitiones arithmeticae. Auctore D. Carolo Friderico Gauss. Lipsiae. 1801.

in schönster und würdigster Ausstattung. Beigegeben sind dieser neuen Ausgabe Handschriftliche Aufzeichnungen von Gauss, so wie eine Schlussbemerkung zur neuen Ausgabe, in welcher die in derselben vorgenommenen wenigen „Textänderungen“ angegeben worden sind. Die achte Section, auf die an mehreren Stellen verwiesen wird, findet sich unter den Handschriften von Gauss, und wird in dieser neuen Ausgabe den arithmetischen Abhandlungen des Nachlasses sich anschliessen.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Pavia, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. 4°. (S. Literar. Ber. Nr. CLVII. S. 15.)

No. 6. tom. IV. 1861. La Teorica delle funzioni ellittiche. Monografia del Prof. E. Betti. p. 297. — Etude sur l'équilibre du Baromètre à balance. Par le P. M. Jullien. p. 337. — Cubature de la surface des ondes. Par M. W. Roberts. p. 345. — Errata corrige. p. 348. — Indice generale di tutti gli articoli. p. 349. — Errata corrige al tomo III. p. 350.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften in Prag. Jahrgang 1862. Juli—December. Prag. 1862. 8°. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLIV. S. 10.)

Mit Rücksicht auf unseren früheren Bericht über Jahrgang 1862. Januar—Juni (m. s. die vorher angeführte Nummer des Literar. Ber.) wiederholen wir dringend unsere dort ausgesprochene Bitte, dass es der königl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften, von deren grosser Thätigkeit auch die vorliegenden Sitzungsberichte wieder den erfreulichsten Beweis liefern, gefallen möge, das von Herrn Prof. Böhm aufgefundene Original-Manuscript Tycho de Brahe's: „Triangulorum Planorum et Sphaericorum Praxis Arithmetica" recht bald zu veröffentlichen, wodurch die königl. Gesellschaft der Wissenschaften ihren grossen Verdiensten gewiss noch ein neues hinzufügen wird. — Das vorliegende Semestral-Heft der Sitzungsberichte enthält die folgenden in den Kreis des Archivs gehörenden Aufsätze: S. 26—S. 27. Herr Czermak demonstrirte unter dem Mikroskop eine Probe von auf Glas gravirter Schrift, welche vermittelst der Maschine von Mr. Peters in London erzeugt worden war. Die Schriftzüge dieser Probe sind so klein, dass das ganze „Vater unser" in englischer Sprache in einer Kreisfläche Raum hat, deren Durchmesser $^1/_{50}$ Zoll beträgt. Ein Quadratzoll würde 2500 solcher Kreise, somit 2500mal das „Vater unser" enthalten können. Dennoch konnten die Anwesenden die Schrift unter dem Mikroskop vollkommen deutlich lesen. Mr. Peters Maschine ist eine Art Storchschnabel von höchster mechanischer Vollendung und Präcision, und dürfte nicht bloss zur Herstellung mikroskopischer Gemüths- und Augenergötzungen, geheimer Depeschen u. dgl., sondern auch zu wissenschaftlichen Zwecken nutzbar gemacht werden können, z. B. zur Erzeugung von Glasmikrometern, Interferenzgittern u. s. w. Nach Herrn Czermak's Vorschlag liesse sich der Mechanismus der Peters'schen Maschine in umgekehrtem Sinne benutzen, nämlich zur Herstellung von exakten vergrösserten Zeichnungen mikroskopischer Objecte. — S. 66—S. 82. Pierre: Ueber die Anwendung der Fluorescenz-Erscheinungen zur Erkennung von fluorescirenden Stoffen in Mischungen mit andern fluorescirenden oder nicht fluorescirenden Stoffen. (Ein ausführlicher sehr interessanter Aufsatz mit einer Abbildung). — S. 94—S. 95. Herr Pierre hielt einen Vortrag über einen Apparat (Tetrachord) zur Demonstration der Gesetze der Transversalschwingungen gespannter Saiten. (Der Apparat, mittelst welches

die mit dem Gebrauche des gewöhnlichen Monochords verbundene Umständlichkeit und der dadurch nothwendig herbeigeführte Zeitverlust, wenn man namentlich auch den Einfluss des Durchmessers und der Dichte des Materials der Saiten in den Bereich der experimentellen Demonstration ziehen will, möglichst vermieden wird, ist zwar kurz, aber deutlich beschrieben.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLVIII. S. 12.).

1863. I. Heft II. Christ: Ueber das: Argumentum calculandi des Victorius und dessen Commentar. S. 100—S. 152. Herr Director Halm stiess bei seiner Durchforschung der viele noch unbekannte Schätze bergenden bayerischen Bibliotheken auf eine Bamberger Pergamenthandschrift des X. oder XI. Jahrhunderts, deren Inhalt als liber arithmeticae auf der äusseren Aufschrift bezeichnet ist, und theilte dieselbe dem als Freund mathematischer Studien bekannten und namentlich für Alles, was auf antikes Maass und Gewicht Bezug hat, sich lebhaft interessirenden Herrn Christ zur näheren Untersuchung und weiteren Ausbeutung mit. Bei genauer Durchsicht erkannte Herr Christ bald, dass die Handschrift aus zwei Theilen bestehe, von denen der kleinere auf den vier ersten Blättern einen Tractat über die Weise der Multiplication und Division bei den Römern enthalte, der zweite auf den folgenden Blättern von Fol. 5—48 einen weitläufigen Commentar zu jenem Tractat aus den Zeiten des Mittelalters umfasse. In höchst interessanter Weise verbreitet sich Herr Christ in seiner gelehrten Abhandlung über diese für die Kenntniss des Unterrichts in der Arithmetik bei den Römern, für die Kenntniss der Metrologie des Alterthums und der Schuldisciplinen des Mittelalters, bei aller ihrer Mangelhaftigkeit doch wichtige Schrift des Victorius, über diesen ihren Verfasser selbst u. s. w., und theilt zuletzt auf S. 132 — S. 152. mehrere der wichtigsten Abschnitte aus derselben mit; eine vollständige Publication dieser Schrift möchte, bei der grossen Mangelhaftigkeit unserer Kenntnisse von dem Unterrichte in der Arithmetik bei den Römern, immerhin anzurathen und vielen, die ein besonderes Studium aus der Geschichte der Mathematik machen, gewiss sehr erwünscht sein. — Pettenkoffer: Ueber Bestimmung des luftförmigen Wassers im Respirations-Apparate. S. 152—S. 161.

Fig. 8.

Fig. 1

A B O

B B₁ S H B₂ A B₃ B₄ C X

g. 7.

Fig. 5.

B' O B A D A

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4. Fig. 5. Fig. 6. Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11.

Hoüel: Essai d'une exposition rationelle etc.

Fig. 1.

7.

Fig. 3.

Fig. 9.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.